Suite II - Die Arithmetische

Teil 5: Essays 138-147

FundamentalSatz Quotient1. FundamentalSatz Produkt1. Multiplikative EliminationsRegel. Multiplikative InversionsRegel. NullTeilerFreiheit in $\mathbb{A}$. Divisions-KürzungsRegeln $\mathbb{C}$. Divisions-EliminationsRegel. Divisions-InversionsRegel. $\leq$_Intervalle. E ist AD. Binomische 2er Formeln. Binomische 2er Formeln i. Divisions-KürzungsRegeln $\mathbb{T}$.

Andreas Unterreiter

25. April 2012

Einiges über $x : y$ unter Einbeziehung von Real- und ImaginärTeilen.

Ersterstellung: 27/07/10 **Letzte Änderung: 04/03/12**

138-1. Mit den nunmehrigen, auch an sich interessanten Formeln wird ein Schritt zum Beweis von **138-3** getan, wo $\mathsf{Re}(x:y)$ und $\mathsf{Im}(x:y)$ ähnlich wie hier, doch mit "ausgeklammertem $\mathsf{ab2}(y)$" dargestellt werden:

138-1(Satz)

a) $\mathsf{Re}(x:y) = ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

b) $\mathsf{Im}(x:y) = (-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **138-1** `a)`

`1.1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`1.2:` Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`2:` Aus `1.1` und aus `1.2` folgt:

$$(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl}) \vee x \notin \mathbb{A} \vee y \notin \mathbb{A}.$$

`Fallunterscheidung`

...

<u>Beweis **138-1**</u> `a)`

...

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl}).$

`3.1:` Aus `2.1.Fall`"x Zahl..."
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}).$

`3.2:` Aus `2.1.Fall`"...y Zahl"
folgt via **128-11**: $\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}.$

`4.1:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$..." und
aus `3.2`"$\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}$"
folgt via **137-7**: $(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y)) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).$

`4.2:` Aus `3.1`"...$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `3.2`"$\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}$"
folgt via **137-7**: $(\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y)) = ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).$

`5:`
$$\begin{aligned}
&\mathsf{Re}(x : y)\\
\stackrel{\mathbf{136-1}}{=}\ &\mathsf{Re}(x \cdot (1 : y))\\
\stackrel{\mathbf{96-26}}{=}\ &(\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Re}(1 : y) - (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Im}(1 : y)\\
\stackrel{\mathbf{123-9}}{=}\ &(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y)) - (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Im}(1 : y)\\
\stackrel{\mathbf{123-9}}{=}\ &(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y)) - (\mathsf{Im}x) \cdot ((-\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y))\\
\stackrel{\mathbf{FS}-:}{=}\ &(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y)) - (\mathsf{Im}x) \cdot (-(\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y))\\
\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\ &(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y)) - (-(\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y)))\\
\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=}\ &(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y)) + (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y))\\
\stackrel{4.1}{=}\ &((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) + (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y))\\
\stackrel{4.2}{=}\ &((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).
\end{aligned}$$

`6:` Aus `5`
folgt: $\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).$

...

Beweis **138-1** `a)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`4:`

$$\mathsf{Re}(x : y)$$

$$\stackrel{3.1}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U}$$

$$\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$$

$$\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$$

$$\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$$

$$\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathcal{U} \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$$

$$\stackrel{3.2}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).$$

`5:` Aus `4`
folgt: $\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

...

Beweis **138-1** a)

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.3.Fall}}$ $y \notin \mathbb{A}$.

3.1: Aus 2.3.Fall“$y \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}$.

3.2: Aus 2.3.Fall“$y \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}y = \mathcal{U}$.

4:
$$\begin{aligned}
&\mathsf{Re}(x : y) \\
&\stackrel{3.1}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) \\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) \\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathcal{U}) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) \\
&\stackrel{3.2}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).
\end{aligned}$$

5: Aus 4 folgt: $\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$$\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).$$

<u>Beweis **138-1**</u> `b)`

`1.1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`1.2:` Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl}) \vee x \notin \mathbb{A} \vee y \notin \mathbb{A}$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`3.1:` Aus `2.1.Fall`“x Zahl...”
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall`“...y Zahl”
folgt via **128-11**: $\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}$.

`4.1:` Aus `3.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$...” und
aus `3.2`“$\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}$”
folgt via **137-7**: $(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y)) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

`4.2:` Aus `3.1`“...$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$” und
aus `3.2`“$\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}$”
folgt via **137-7**: $(\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y)) = ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

`5:`
$$\begin{aligned}
&\mathsf{Im}(x : y)\\
&\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} \mathsf{Im}(x \cdot (1 : y))\\
&\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Im}(1 : y) + (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Re}(1 : y)\\
&\stackrel{\mathbf{123-9}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((-\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y)) + (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Re}(1 : y)\\
&\stackrel{\mathbf{123-9}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((-\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y)) + (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y))\\
&\stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (-(\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y)) + (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y))\\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y)) + (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y))\\
&\stackrel{4.1}{=} -((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) + (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y))\\
&\stackrel{4.2}{=} -((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).
\end{aligned}$$

`6:` Aus `5`
folgt: $\mathsf{Im}(x : y) = -((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

...

Beweis **138-1** `b)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`4:`

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Im}(x : y)\\
&\stackrel{3.1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U}\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -(\mathcal{U} \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)\\
&\stackrel{3.2}{=} -((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).
\end{aligned}$$

`5:` Aus `4`
folgt:

$$\mathsf{Im}(x : y) = -((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).$$

...

<u>Beweis **138-1**</u> `b)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.3.Fall}}$ $y \notin \mathbb{A}$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `2.3.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im} y = \mathcal{U}$.

`4:`
$$\begin{aligned}
&\mathsf{Im}(x : y)\\
&\stackrel{3.1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U}\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -((\mathsf{Re}x) \cdot \mathcal{U}) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)\\
&\stackrel{3.2}{=} -((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)
\end{aligned}$$

`5:` Aus `4`
folgt:
$$\mathsf{Im}(x : y) = -((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$$\mathsf{Im}(x : y) = -((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).$$

□

138-2. Mit der nunmehrigen, speziellen Aussage wird **138-3** vorbereitet:

138-2(Satz)

Es gelte:

→) x *Zahl.*

→) $y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

b) $\mathsf{Im}(x : y) = (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **138-2**</u>

1.1: Aus →) "x Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

1.2: Aus →) "$y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $(y \in \mathbb{A}) \wedge (y \notin \mathbb{B})$.

1.3: Aus →) "$y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **128-6**: $\mathsf{ab2}(y) = \mathsf{nan}$.

2.1: Aus 1.2 "$y \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

2.2: Aus 1.2 "$\ldots y \notin \mathbb{B}$" und
aus ⊆**SZ** "$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **0-4**: $y \notin \mathbb{C}$.

2.3: Aus **138-1** "$\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$" und
aus 1.3 "$\mathsf{ab2}(y) = \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan}$.

2.4: Aus **138-1** "$\mathsf{Im}(x : y)$
$= (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$" und
aus 1.3 "$\mathsf{ab2}(y) = \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{Im}(x : y) = (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan}$.

3: Aus 2.1 "y Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{T})$.

4.1: Aus 1.1 "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus 3 "$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via ·**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$.

4.2: Aus 1.1 "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus 3 "$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$"
folgt via ·**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$.

4.3: Aus 1.1 "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus 3 "$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via ·**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$.

4.4: Aus 1.1 "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus 3 "$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$"
folgt via ·**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$.

…

Beweis **138-2**

...

5.1: Es gilt: $(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)=0 \vee 0\neq(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y).$

`Fallunterscheidung`

`5.1.1.Fall` $(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)=0.$

6: Es gilt: $((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)=0)\vee(0\neq(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)).$

`Fallunterscheidung`

`6.1.Fall` $(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)=0.$

7: $(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)\stackrel{\mathbf{98-12}}{=}0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)\stackrel{\text{5.1.Fall}}{=}(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)\stackrel{\text{5.1.1.Fall}}{=}0.$

8: Aus 7 folgt: $(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)=0.$

9: $$\begin{aligned}\mathsf{Re}(x:y)&\stackrel{2.3}{=}((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)):\mathsf{nan}+((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)):\mathsf{nan}\\&\stackrel{\text{6.1.Fall}}{=}0:\mathsf{nan}+((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)):\mathsf{nan}\\&\stackrel{8}{=}0:\mathsf{nan}+0:\mathsf{nan}\\&\stackrel{\mathbf{98-24}}{=}0+0:\mathsf{nan}\\&\stackrel{\mathbf{98-12}}{=}0:\mathsf{nan}\\&\stackrel{\mathbf{98-10}}{=}(0+0):\mathsf{nan}\\&\stackrel{\text{6.1.Fall}}{=}((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+0):\mathsf{nan}\\&\stackrel{8}{=}((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)):\mathsf{nan}\\&\stackrel{1.3}{=}((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)):\mathsf{ab2}(y).\end{aligned}$$

10: Aus 9 folgt: $\mathsf{Re}(x:y)=((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)):\mathsf{ab2}(y).$

...

...

Beweis **138-2**

...

`Fallunterscheidung`

`5.1.1.Fall` $(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)=0.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`6.2.Fall` $0\neq(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y).$

`7:` Aus `5.1.1.Fall` "$(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)=0$" und aus `3.1` "$(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)\in\mathbb{T}$" folgt via **102-8**:

$$((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)\in\mathbb{R})\wedge((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)\in\mathbb{R})$$
$$\wedge((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)=-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y).$$

`8.1:` Aus `1.1` "$\mathsf{Re}x\in\mathbb{T}\ldots$", aus `6.2.Fall` "$0\neq(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)$" und aus `7` "$(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)\in\mathbb{R}\ldots$" folgt via **131-2**: $\mathsf{Re}y\in\mathbb{R}.$

`8.2:` Aus `6.2.Fall` "$0\neq(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)$" und aus `7` "$\ldots(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)=-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)$" folgt: $0\neq-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y).$

`9:` Aus `8.2` "$0\neq-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)$" folgt via **100-13**: $0\neq(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y).$

`10:` Aus `1.1` "$\ldots\mathsf{Im}x\in\mathbb{T}$", aus `9` "$0\neq(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)$" und aus `7` "$\ldots(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)\in\mathbb{R}\ldots$" folgt via **131-2**: $\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}.$

`11:` Aus `8.1` "$\mathsf{Re}y\in\mathbb{R}$" und aus `10` "$\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}$" folgt via **101-1**: $y\in\mathbb{C}.$

`12:` Es gilt `11` "$y\in\mathbb{C}$". Es gilt `2.2` "$y\notin\mathbb{C}$". Ex falso quodlibet folgt:

$$\mathsf{Re}(x:y)=((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)):\mathsf{ab2}(y).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\mathsf{Re}(x:y)=((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)):\mathsf{ab2}(y).$$

...

Beweis **138-2**

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{5.1.2.Fall}}$ $0 \neq (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y).$

`6:` Aus `3.1` "$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$" und
aus `3.4` "$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$"
folgt via $+$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}.$

`7:` Aus `5.1.2.Fall` "$0 \neq (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$" und
aus `6` "$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}.$

`8:` Aus `4.1.2.Fall` "$0 \neq (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$"
folgt via **98-11**: $(0 \neq (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \vee (0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

...

<u>Beweis **138-2**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.1.2.Fall` $0 \neq (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y).$

...

`Fallunterscheidung`

`8.1.Fall` $0 \neq (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y).$

`9.1:` Aus `8.1.Fall`“$0 \neq (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$” und
aus `4.1`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}.$

`9.2:` Aus `4.4`“$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$” und
aus **95-12**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$”
folgt via :**SZ**: $((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} \in \mathbb{T}.$

`10:` Aus `9.2`“$((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}.$

`11:`
$$\begin{aligned}
&\mathsf{Re}(x : y) \\
&\stackrel{2.3}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} \\
&\stackrel{\mathbf{137-5}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot \mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} \\
&\stackrel{9.1}{=} \mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} \\
&\stackrel{10}{=} \mathsf{nan} \\
&\stackrel{7}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot \mathsf{nan} \\
&\stackrel{\mathbf{137-5}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} \\
&\stackrel{1.3}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).
\end{aligned}$$

`12:` Aus `11`
folgt:
$$\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).$$

...

...

Beweis **138-2**

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.1.2.Fall` $0 \neq (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y).$

...

`Fallunterscheidung`

...

`8.2.Fall` $0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y).$

`9.1:` Aus `8.2.Fall`"$0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$" und
aus `3.4`"$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}.$

`9.2:` Aus `3.1`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$" und
aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **:SZ**: $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan} \in \mathbb{T}.$

`10:` Aus `9.2`"$((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan} + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}.$

`11:`
$$\begin{aligned}
&\mathsf{Re}(x : y)\\
&\stackrel{2.3}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{137-5}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot \mathsf{nan}\\
&\stackrel{9.1}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan} + \mathsf{nan}\\
&\stackrel{10}{=} \mathsf{nan}\\
&\stackrel{7}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot \mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{137-5}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan}\\
&\stackrel{1.3}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).
\end{aligned}$$

`12:` Aus `11`
folgt:
$\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).$$

...

<u>Beweis **138-2**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1`	"$\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$"

`5.2:` Es gilt:

$$-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) = 0$$
$$\vee$$
$$0 \neq -(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y).$$

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **138-2**

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{5.2.1.Fall}}$ $-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) = 0.$

6: Es gilt: $(-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = 0) \vee (0 \neq -(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{6.1.Fall}}$ $-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = 0.$

7: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \stackrel{\mathbf{98-12}}{=} 0 + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$
$\stackrel{\mathsf{6.1.Fall}}{=} -(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$
$\stackrel{\mathsf{5.2.1.Fall}}{=} 0.$

8: Aus 7 folgt: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) = 0.$

9: $\mathsf{Im}(x : y)$

$\stackrel{2.4}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan}$

$\stackrel{\mathsf{6.1.Fall}}{=} 0 : \mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan}$

$\stackrel{8}{=} 0 : \mathsf{nan} + 0 : \mathsf{nan}$

$\stackrel{\mathbf{98-24}}{=} 0 + 0 : \mathsf{nan}$

$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} 0 : \mathsf{nan}$

$\stackrel{\mathbf{98-10}}{=} (0 + 0) : \mathsf{nan}$

$\stackrel{\mathsf{6.1.Fall}}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0) : \mathsf{nan}$

$\stackrel{8}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan}$

$\stackrel{1.3}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).$

10: Aus 9 folgt:
$\mathsf{Im}(x : y) = (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).$

...

...

Beweis **138-2**

...

Fallunterscheidung

5.2.1.Fall $-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)=0.$

...

Fallunterscheidung

...

6.2.Fall $0\neq-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y).$

7.1: Aus 6.2.Fall“$0\neq-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)$”
folgt via **100-13**: $0\neq(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y).$

7.2: $(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)$
$\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=}-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)\stackrel{\text{5.2.1.Fall}}{=}0.$

8: Aus 7.2“$(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)=\ldots=0$” und
aus 3.3“$(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)\in\mathbb{T}$”
folgt via **102-9**:
$((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)\in\mathbb{R})\wedge((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)\in\mathbb{R})$
$\wedge((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)=(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)).$

9.1: Aus 1.1“$\mathsf{Re}x\in\mathbb{T}\ldots$”,
aus 7.1“$0\neq(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)$” und
aus 8“$\ldots(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)\in\mathbb{R}\ldots$”
folgt via **131-2**: $\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}.$

9.2: Aus 7.1“$0\neq(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)$” und
aus 8“$\ldots(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)=(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)$”
folgt: $0\neq(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y).$

10: Aus 1.1“$\ldots\mathsf{Im}x\in\mathbb{T}$”,
aus 9.2“$0\neq(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)$” und
aus 8“$(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)\in\mathbb{R}\ldots$”
folgt via **131-2**: $\mathsf{Re}y\in\mathbb{R}.$

11: Aus 10“$\mathsf{Re}y\in\mathbb{R}$” und
aus 9.1“$\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}$”
folgt via **101-1**: $y\in\mathbb{C}.$

12: Es gilt 11“$y\in\mathbb{C}$”.
Es gilt 2.2“$y\notin\mathbb{C}$”.
Ex falso quodlibet folgt:
$\mathsf{Im}(x:y)=(-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)):\mathsf{ab2}(y).$

...

...

Beweis **138-2**

...

`Fallunterscheidung`

`5.2.1.Fall` $-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)=0.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\mathsf{Im}(x:y)=(-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)):\mathsf{ab2}(y).$$

`5.2.2.Fall` $0\neq-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y).$

`6:` Aus `3.2`“$(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)\in\mathbb{T}$”
folgt via **117-4**: $-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)\in\mathbb{T}.$

`7:` Aus `6`“$-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)\in\mathbb{T}$” und
aus `3.3`“$(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)\in\mathbb{T}$”
folgt via +**SZ**: $-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)\in\mathbb{T}.$

`8:` Aus `5.2.2.Fall`“$0\neq-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)$” und
aus `7`“$-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)\in\mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $(-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot\mathsf{nan}=\mathsf{nan}.$

`9:` Aus `5.2.2.Fall`“$0\neq-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)$”
folgt via **98-11**: $(0\neq-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\vee(0\neq(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)).$

`Fallunterscheidung`

...

...

Beweis **138-2**

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.2.2.Fall` $0 \neq -(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

...

`Fallunterscheidung`

`9.1.Fall` $0 \neq -(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

`10.1:` Aus `9.1.Fall`“$0 \neq -(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$” und
aus `3.2`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $(-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`10.2:` Aus `3.3`“$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$” und
aus **95-12**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$”
folgt via :**SZ**: $((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$.

`11:` Aus `10.2`“$((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`12:`
$$\begin{aligned}
&\mathsf{Im}(x : y)\\
&\stackrel{2.4}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{137-5}}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot \mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan}\\
&\stackrel{10.1}{=} \mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan}\\
&\stackrel{11}{=} \mathsf{nan}\\
&\stackrel{8}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot \mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{137-5}}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan}\\
&\stackrel{1.3}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).
\end{aligned}$$

`13:` Aus `12`
folgt:
$\mathsf{Im}(x : y) = (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

...

...

Beweis **138-2**

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.2.2.Fall` $0 \neq (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`9.2.Fall` $0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

`10.1:` Aus `9.2.Fall` "$0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$" und
aus `3.3` "$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`10.2:` Aus `3.2` "$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$"
folgt via **117-4**: $-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$.

`11:` Aus `10.2` "$-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$" und
aus **95-12** "$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via :**SZ**: $(-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$.

`12:` Aus `11` "$(-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $(-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`13:`
$$\begin{aligned}
&\mathsf{Im}(x : y)\\
&\stackrel{2.4}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{137-5}}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot \mathsf{nan}\\
&\stackrel{10.1}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{nan} + \mathsf{nan}\\
&\stackrel{12}{=} \mathsf{nan}\\
&\stackrel{8}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot \mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{137-5}}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{nan}\\
&\stackrel{1.3}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).
\end{aligned}$$

`12:` Aus `11`
folgt:
$\mathsf{Im}(x : y) = (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

...

...

Beweis **138-2**

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.2.2.Fall` $0 \neq (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y).$

...

`Fallunterscheidung`

...

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\mathsf{Im}(x : y) = (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A2` | "$\mathsf{Im}(x : y) = (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$"

`5.a):` Aus `A1` folgt: $\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).$

`5.b):` Aus `A2` folgt: $\mathsf{Im}(x : y) = (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).$

□

138-3. Es werden nun die Formeln für $\mathsf{Re}(x:y)$ und $\mathsf{Im}(x:y)$ angegeben:

138-3(Satz)

a) $\mathsf{Re}(x:y) = \quad ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)):\mathsf{ab2}(y)$.

b) $\mathsf{Im}(x:y) = (-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)):\mathsf{ab2}(y)$.

c) $x:y = \mathsf{Re}(x:y)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(x:y)$.

d) $x:y = ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)):\mathsf{ab2}(y)$
$+\mathsf{i}\cdot((-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)):\mathsf{ab2}(y))$.

e) $x:y$
$= (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))+\mathsf{i}\cdot(-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)))$
$:\mathsf{ab2}(y)$.

f) $x:y = ((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x)):((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))$.

g) $x:y = x:((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))$.

h) $x:y = ((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x)):y$.

REIM.RECH-**Notation**.

<u>Beweis **138-3**</u> `a)`

`1:` Es gilt:

$$x \notin \mathbb{A} \vee y \notin \mathbb{A} \vee (x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`3:`

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Re}(x : y)\\
&\stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U}\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} : \mathsf{ab2}(y)\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathcal{U} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathcal{U} \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)\\
&\stackrel{2.2}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3` folgt: $\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).$

...

Beweis **138-3** `a)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}y = \mathcal{U}$.

`3:`

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Re}(x : y) \\
&\stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} : \mathsf{ab2}(y) \\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathcal{U} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) \\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathcal{U} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) \\
&\stackrel{2.2}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

...

Beweis **138-3** `a)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

`2:` Es gilt: $(y \in \mathbb{B}) \vee (y \notin \mathbb{B})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $y \in \mathbb{B}$.

`3.1:` Via **138-1** gilt:
$\mathsf{Re}(x : y)$
$= ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall`"$y \in \mathbb{B}$"
folgt via **128-5**: $0 \le \mathsf{ab2}(y)$.

`4:` Aus `3.2`"$0 \le \mathsf{ab2}(y)$"
folgt via **107-3**: $\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `4`"$\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{S}$"
folgt via **137-7**:
$((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$
$= ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

`6:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}(x : y)$
$= ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$"
und
aus `5`"$((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$
$= ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$"
folgt:
$\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

...

...

Beweis **138-3** `a)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $y \notin \mathbb{B}$.

`3.1:` Aus `1.3.Fall`"$x \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`3.2:` Aus `1.3.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{A}$" und
aus `2.2.Fall`"$y \notin \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`4:` Aus `3.1`"x Zahl" und
aus `3.2`"$y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **138-2**:
$\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$$\mathsf{Re}(x : y) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y).$$

Beweis **138-3** `b)`

`1:` Es gilt:

$$x \notin \mathbb{A} \vee y \notin \mathbb{A} \vee (x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`3:`

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Im}(x : y)\\
&\stackrel{2.1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U}\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} : \mathsf{ab2}(y)\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathcal{U} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (-\mathcal{U} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (-\mathcal{U} \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)\\
&\stackrel{2.2}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3` folgt: $\mathsf{Im}(x : y) = (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

...

<u>Beweis **138-3**</u> `b)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $y \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}y = \mathcal{U}$.

`3:`

$$\mathsf{Im}(x : y) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} : \mathsf{ab2}(y) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathcal{U} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (-\mathcal{U} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot \mathcal{U} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y) \stackrel{2.2}{=} (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{Im}(x : y) = (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

...

<u>Beweis **138-3**</u> `b)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

`2:` Es gilt: $(y \in \mathbb{B}) \vee (y \notin \mathbb{B})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $y \in \mathbb{B}$.

`3.1:` $\mathsf{Im}(x : y)$

$\stackrel{\mathbf{138-1}}{=} (-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$

$= ((-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall`“$y \in \mathbb{B}$”
folgt via **128-5**: $0 \leq \mathsf{ab2}(y)$.

`4:` Aus `3.2`“$0 \leq \mathsf{ab2}(y)$”
folgt via **107-3**: $\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `4`“$\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{S}$”
folgt via **137-7**:
$((-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)) + (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$
$= ((-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

`6:` Aus `3.1`“$\mathsf{Im}(x : y)$
$= ((-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$”
und
aus `5`“$((-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)) + (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$
$= ((-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))) : \mathsf{ab2}(y) + ((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$”
folgt:
$\mathsf{Im}(x : y) = ((-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)) + (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

`7:` Aus `6`
folgt:
$\mathsf{Im}(x : y) = (-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

...

...

Beweis **138-3** `b)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $y \notin \mathbb{B}$.

`3.1:` Aus `1.3.Fall`“$x \in \mathbb{A}$”
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`3.2:` Aus `1.3.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{A}$”
und aus `2.2.Fall`“$y \notin \mathbb{B}$”
folgt via **5-3**: $y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`4:` Aus `3.1`“x Zahl” und
aus `3.2`“$y \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$”
folgt via **138-2**:
$\mathsf{Im}(x : y) = (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\mathsf{Im}(x : y) = (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).$$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$\mathsf{Im}(x : y) = (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y).$$

`c)`

Via **126-2** gilt: $x : y = \mathsf{Re}(x : y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x : y)$.

<u>Beweis **138-3**</u> `d)`

`1:`

$$x : y$$

$$\overset{\text{c)}}{=} \mathsf{Re}(x : y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x : y)$$

$$\overset{\text{a)}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x : y)$$

$$\overset{\text{b)}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) \\ + \mathsf{i} \cdot ((-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)).$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$x : y = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) \\ + \mathsf{i} \cdot ((-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y)).$$

Beweis **138-3** e)

1: Es gilt:
$$x \notin \mathbb{A} \vee y \notin \mathbb{A} \vee (x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A}).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x \notin \mathbb{A}.$

2.1: Aus 1.1.Fall“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}.$

2.2: Aus 1.1.Fall“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}.$

3:
$$x : y \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} : \mathsf{ab2}(y)$$
$$\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))) : \mathsf{ab2}(y)$$
$$\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} ((\mathcal{U} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))) : \mathsf{ab2}(y)$$
$$\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} ((\mathcal{U} \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))) : \mathsf{ab2}(y)$$
$$\stackrel{2.2}{=} (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))) : \mathsf{ab2}(y).$$

4: Aus 3 folgt:
$$x : y = (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))) : \mathsf{ab2}(y).$$

...

Beweis **138-3** `e)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $y \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}y = \mathcal{U}$.

`3:`
$$x : y$$
$$\stackrel{2.1}{=} \mathcal{U}$$
$$\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} : \mathsf{ab2}(y)$$
$$\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))) : \mathsf{ab2}(y)$$
$$\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} ((\mathcal{U} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))) : \mathsf{ab2}(y)$$
$$\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (((\mathsf{Re}x) \cdot \mathcal{U} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))) : \mathsf{ab2}(y)$$
$$\stackrel{2.2}{=} (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))) : \mathsf{ab2}(y).$$

`4:` Aus `3`
folgt:
$$x : y = (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))) : \mathsf{ab2}(y).$$

...

Beweis **138-3** `e)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

`2.1:` Aus `1.3.Fall`"$x \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.3.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

`3.1:` Aus `2.1`"x Zahl…"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`3.2:` Aus `2.2`"…y Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{T})$.

`4.1:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `3.2`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$.

`4.2:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `3.2`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$.

`4.3:` Aus `3.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `3.2`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$.

`4.4:` Aus `3.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `3.2`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4.2`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$"
folgt via **117-4**: $-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$.

`6.1:` Aus `4.1`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$" und
aus `4.4`"$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$"
folgt via $+$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$.

`6.2:` Aus `5`"$-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$" und
aus `4.3`"$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$"
folgt via $+$**SZ**: $-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$.

...

...

<u>Beweis **138-3**</u> `e)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

...

`7:` Aus `5.1`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$” und
aus `5.2`“$-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$”
folgt via **DG**i:

$$(1 : \mathsf{ab2}(y)) \cdot (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)))$$
$$= (1 : \mathsf{ab2}(y)) \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot ((1 : \mathsf{ab2}(y)) \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))).$$

`8:` $x : y$

$$\stackrel{\text{d)}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) : \mathsf{ab2}(y) + \mathsf{i} \cdot ((-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y))$$

$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (1 : \mathsf{ab2}(y)) \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot ((-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(y))$$

$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (1 : \mathsf{ab2}(y)) \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot ((1 : \mathsf{ab2}(y)) \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)))$$

$$\stackrel{7}{=} (1 : \mathsf{ab2}(y)) \cdot (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot ((-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))))$$

$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot ((-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)))) : \mathsf{ab2}(y).$$

`8:` Aus `7`
folgt:

$$x : y = (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))) : \mathsf{ab2}(y).$$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$x : y = (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))) : \mathsf{ab2}(y).$$

<u>Beweis **138-3** `f)`</u>

`1:` Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` y Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“y Zahl” folgt via **96-24**: $y = (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`3:`
$$\begin{aligned} x : y &\overset{\mathbf{136-1}}{=} x \cdot (1 : y) \\ &\overset{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot (\mathsf{Re}(1 : y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(1 : y)) \\ &\overset{\mathbf{123-9}}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot (1 : y) \\ &\overset{\mathbf{136-1}}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) : y \\ &\overset{2}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) : ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)). \end{aligned}$$

`4:` Aus `3` folgt: $x : y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) : ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`1.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}y = \mathcal{U}$.

`3:`
$$\begin{aligned} x : y &\overset{2.1}{=} \mathcal{U} \\ &\overset{\mathbf{96-19}}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) : \mathcal{U} \\ &\overset{\mathbf{96-19}}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) : (\mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) \\ &\overset{2.2}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) : ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)). \end{aligned}$$

`4:` Aus `3` folgt: $x : y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) : ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x : y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) : ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

Beweis **138-3** g)

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`3:` $x : y \stackrel{\mathrm{f)}}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) : ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{2}{=} x : ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x : y = x : ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-18**: $x : ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $x : y = x : ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x : y = x : ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

<u>Beweis **138-3** `h)`</u>

`1:` Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` y Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`"y Zahl"
folgt via **96-24**: $y = (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`3:` $x : y \stackrel{\texttt{f)}}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{2}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) : y$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x : y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) : y$.

`1.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-18**: $((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) : y = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $x : y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) : y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x : y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) : y$.

□

138-4. Falls $a, b, c, d \in \mathbb{T}$, dann lassen sich via **AAIV** und **138-3** leicht die folgenden Formeln beweisen:

138-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *"$a \in \mathbb{T}$" und "$b \in \mathbb{T}$".*

$\rightarrow)$ *"$c \in \mathbb{T}$" und "$d \in \mathbb{T}$".*

Dann folgt:

a) $\mathsf{Re}((a + \mathsf{i} \cdot b) : (c + \mathsf{i} \cdot d)) = \quad (a \cdot c + b \cdot d) : (c \cdot c + d \cdot d)$.

b) $\mathsf{Im}((a + \mathsf{i} \cdot b) : (c + \mathsf{i} \cdot d)) = (-a \cdot d + b \cdot c) : (c \cdot c + d \cdot d)$.

c) $(a + \mathsf{i} \cdot b) : (c + \mathsf{i} \cdot d)$
$= (a \cdot c + b \cdot d) : (c \cdot c + d \cdot d) + \mathsf{i} \cdot ((-a \cdot d + b \cdot c) : (c \cdot c + d \cdot d))$.

d) $(a + \mathsf{i} \cdot b) : (c + \mathsf{i} \cdot d) = ((a \cdot c + b \cdot d) + \mathsf{i} \cdot (-a \cdot d + b \cdot c)) : (c \cdot c + d \cdot d)$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **138-4**</u>

1.1: Aus →) “$a \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus →) “$\ldots b \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = a.$

1.2: Aus →) “$a \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus →) “$\ldots b \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b.$

1.3: Aus →) “$c \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus →) “$\ldots d \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d) = c.$

1.4: Aus →) “$c \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus →) “$\ldots d \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d) = d.$

2:

$$\begin{aligned} &\mathsf{ab2}(c + \mathsf{i} \cdot d) \\ &\overset{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d)) \cdot (\mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d)) + (\mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d)) \cdot (\mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d)) \\ &\overset{1.3}{=} c \cdot c + (\mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d)) \cdot (\mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d) \\ &\overset{1.4}{=} c \cdot c + d \cdot d. \end{aligned}$$

3: Aus 2
folgt: $\mathsf{ab2}(c + \mathsf{i} \cdot d) = c \cdot c + d \cdot d.$

4.1: $\mathsf{Re}((a + \mathsf{i} \cdot b) : (c + \mathsf{i} \cdot d))$

$$\begin{aligned} &\overset{\mathbf{138-3}}{=} (\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d) + \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d)) : \mathsf{ab2}(c + \mathsf{i} \cdot d) \\ &\overset{1.1}{=} (a \cdot \mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d) + \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d)) : \mathsf{ab2}(c + \mathsf{i} \cdot d) \\ &\overset{1.3}{=} (a \cdot c + \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d)) : \mathsf{ab2}(c + \mathsf{i} \cdot d) \\ &\overset{1.2}{=} (a \cdot c + b \cdot \mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d)) : \mathsf{ab2}(c + \mathsf{i} \cdot d) \\ &\overset{1.4}{=} (a \cdot c + b \cdot d) : \mathsf{ab2}(c + \mathsf{i} \cdot d) \\ &\overset{3}{=} (a \cdot c + b \cdot d) : (c \cdot c + d \cdot d). \end{aligned}$$

4.2: $\mathsf{Im}((a + \mathsf{i} \cdot b) : (c + \mathsf{i} \cdot d))$

$$\begin{aligned} &\overset{\mathbf{138-3}}{=} (-\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d) + \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d)) : \mathsf{ab2}(c + \mathsf{i} \cdot d) \\ &\overset{1.1}{=} (-a \cdot \mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d) + \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d)) : \mathsf{ab2}(c + \mathsf{i} \cdot d) \\ &\overset{1.4}{=} (-a \cdot d + \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d)) : \mathsf{ab2}(c + \mathsf{i} \cdot d) \\ &\overset{1.2}{=} (-a \cdot d + b \cdot \mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d)) : \mathsf{ab2}(c + \mathsf{i} \cdot d) \\ &\overset{1.3}{=} (-a \cdot d + b \cdot c) : \mathsf{ab2}(c + \mathsf{i} \cdot d) \\ &\overset{3}{=} (-a \cdot d + b \cdot c) : (c \cdot c + d \cdot d). \end{aligned}$$

...

<u>Beweis **138-4**</u>

...

`4.3:` $(a+\mathsf{i}\cdot b):(c+\mathsf{i}\cdot d)$

$$\overset{\mathbf{138-3}}{=}(\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Re}(c+\mathsf{i}\cdot d)+\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d)):\mathsf{ab2}(c+\mathsf{i}\cdot d)$$
$$+\mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d)+\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Re}(c+\mathsf{i}\cdot d)):\mathsf{ab2}(c+\mathsf{i}\cdot d))$$

$$\overset{\mathsf{1.1}}{=}(a\cdot\mathsf{Re}(c+\mathsf{i}\cdot d)+\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d)):\mathsf{ab2}(c+\mathsf{i}\cdot d)$$
$$+\mathsf{i}\cdot((-a\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d)+\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Re}(c+\mathsf{i}\cdot d)):\mathsf{ab2}(c+\mathsf{i}\cdot d))$$

$$\overset{\mathsf{1.3}}{=}(a\cdot c+\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d)):\mathsf{ab2}(c+\mathsf{i}\cdot d)$$
$$+\mathsf{i}\cdot((-a\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d)+\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot c):\mathsf{ab2}(c+\mathsf{i}\cdot d))$$

$$\overset{\mathsf{1.2}}{=}(a\cdot c+b\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d)):\mathsf{ab2}(c+\mathsf{i}\cdot d)$$
$$+\mathsf{i}\cdot((-a\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d)+b\cdot c):\mathsf{ab2}(c+\mathsf{i}\cdot d))$$

$$\overset{\mathsf{1.4}}{=}(a\cdot c+b\cdot d):\mathsf{ab2}(c+\mathsf{i}\cdot d)+\mathsf{i}\cdot((-a\cdot d+b\cdot c):\mathsf{ab2}(c+\mathsf{i}\cdot d))$$

$$\overset{\mathsf{3}}{=}(a\cdot c+b\cdot d):(c\cdot c+d\cdot d)+\mathsf{i}\cdot((-a\cdot d+b\cdot c):(c\cdot c+d\cdot d)).$$

`4.4:` $(a+\mathsf{i}\cdot b):(c+\mathsf{i}\cdot d)$

$$\overset{\mathbf{138-3}}{=}((\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Re}(c+\mathsf{i}\cdot d)+\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d))$$
$$+\mathsf{i}\cdot(-\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d)+\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Re}(c+\mathsf{i}\cdot d)))$$
$$:\mathsf{ab2}(c+\mathsf{i}\cdot d)$$

$$\overset{\mathsf{1.1}}{=}((a\cdot\mathsf{Re}(c+\mathsf{i}\cdot d)+\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d))$$
$$+\mathsf{i}\cdot(-a\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d)+\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Re}(c+\mathsf{i}\cdot d)))$$
$$:\mathsf{ab2}(c+\mathsf{i}\cdot d)$$

$$\overset{\mathsf{1.3}}{=}((a\cdot c+\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d))+\mathsf{i}\cdot(-a\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d)+\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot c))$$
$$:\mathsf{ab2}(c+\mathsf{i}\cdot d)$$

$$\overset{\mathsf{1.2}}{=}((a\cdot c+b\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d))+\mathsf{i}\cdot(-a\cdot\mathsf{Im}(c+\mathsf{i}\cdot d)+b\cdot c)):\mathsf{ab2}(c+\mathsf{i}\cdot d)$$

$$\overset{\mathsf{1.4}}{=}((a\cdot c+b\cdot d)+\mathsf{i}\cdot(-a\cdot d+b\cdot c)):\mathsf{ab2}(c+\mathsf{i}\cdot d)$$

$$\overset{\mathsf{3}}{=}((a\cdot c+b\cdot d)+\mathsf{i}\cdot(-a\cdot d+b\cdot c)):(c\cdot c+d\cdot d)$$

<u>Beweis **138-4**</u>

...

3.a): Aus 2.1
folgt: $$\mathsf{Re}((a+\mathsf{i}\cdot b):(c+\mathsf{i}\cdot d)) = (a\cdot c+b\cdot d):(c\cdot c+d\cdot d).$$

3.b): Aus 2.2
folgt: $$\mathsf{Im}((a+\mathsf{i}\cdot b):(c+\mathsf{i}\cdot d)) = (-a\cdot d+b\cdot c):(c\cdot c+d\cdot d).$$

3.c): Aus 2.3
folgt:
$$(a+\mathsf{i}\cdot b):(c+\mathsf{i}\cdot d)$$
$$= (a\cdot c+b\cdot d):(c\cdot c+d\cdot d)+\mathsf{i}\cdot((-a\cdot d+b\cdot c):(c\cdot c+d\cdot d)).$$

3.d): Aus 2.4
folgt:
$$(a+\mathsf{i}\cdot b):(c+\mathsf{i}\cdot d) = ((a\cdot c+b\cdot d)+\mathsf{i}\cdot(-a\cdot d+b\cdot c)):(c\cdot c+d\cdot d).$$

□

FSQ1: FundamentalSatz Quotient1.
FSP1: FundamentalSatz Produkt1.
MER: Multiplikative EliminationsRegel.
MIR: Multiplikative InversionsRegel.

Ersterstellung: 29/07/10 **Letzte Änderung: 09/03/12**

139-1. Mit den nunmehrigen Formeln wird ein Kriterium für $x : x = 1$ vorbereitet:

139-1(Satz)

a) $0 : 0 \neq 1$.

b) $\mathsf{nan} : \mathsf{nan} \neq 1$.

c) $(+\infty) : (+\infty) \neq 1$.

d) $(-\infty) : (-\infty) \neq 1$.

RECH-**Notation**.

Beweis **139-1** a)

Aus **98-24**"$0 : 0 = 0$" und
aus **95-2**"$0 \neq 1$"
folgt: $0 : 0 \neq 1$.

b)

1: Aus **95-7**"$1 \neq \mathsf{nan}$" und
aus **97-5**"$\mathsf{nan} : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$"
folgt: $1 \neq \mathsf{nan} : \mathsf{nan}$.

2: Aus 1
folgt: $\mathsf{nan} : \mathsf{nan} \neq 1$.

c)

Aus **97-5**"$(+\infty) : (+\infty) = 0$" und
aus **95-2**"$0 \neq 1$"
folgt: $(+\infty) : (+\infty) \neq 1$.

d)

Aus **97-5**"$(-\infty) : (-\infty) = 0$" und
aus **95-2**"$0 \neq 1$"
folgt: $(-\infty) : (-\infty) \neq 1$.

□

139-2. Eine logisch äquivalente Formulierung von **139-1** ist durch die nunmehrige, im Folgenden gut zitierbare Aussage gegeben:

139-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ $x : x = 1$.

Dann folgt:

a) $0 \neq x$.

b) $x \neq \mathsf{nan}$.

c) $x \neq +\infty$.

d) $x \neq -\infty$.

RECH-**Notation**.

Beweis **139-2** a)

1: Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x = 0$.

2: Aus 1.1.Fall“$x = 0$” und aus **139-1**“$0 : 0 \neq 1$” folgt: $x : x \neq$.

3: Es gilt 2“$x : x \neq 1$”. Es gilt $\rightarrow\!)$“$x : x = 1$”. Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq x$.

1.2.Fall $0 \neq x$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $0 \neq x$.

Beweis **139-2** `b)`

`1:` Es gilt: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x \neq \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x = \mathsf{nan}$" und
aus **139-1**"$\mathsf{nan} : \mathsf{nan} \neq 1$"
folgt: $x : x \neq 1$.

`3:` Es gilt 2"$x : x \neq 1$" .
Es gilt →) "$x : x = 1$" .
Ex falso quodlibet folgt: $x \neq \mathsf{nan}$.

`1.2.Fall` $x \neq \mathsf{nan}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \neq \mathsf{nan}$.

`c)`

`1:` Es gilt: $(x = +\infty) \vee (x \neq +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = +\infty$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x = +\infty$" und
aus **139-1**"$(+\infty) : (+\infty) \neq 1$"
folgt: $x : x \neq 1$.

`3:` Es gilt 2"$x : x \neq 1$" .
Es gilt →) "$x : x = 1$" .
Ex falso quodlibet folgt: $x \neq +\infty$.

`1.2.Fall` $x \neq +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \neq +\infty$.

<u>Beweis **139-2** `d)`</u>

`1:` Es gilt: $(x = -\infty) \vee (x \neq -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = -\infty$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$x = -\infty$” und
aus **139-1**“$(-\infty) : (-\infty) \neq 1$”
folgt: $x : x \neq 1$.

`3:` Es gilt `2`“$x : x \neq 1$” .
Es gilt $\rightarrow$)“$x : x = 1$” .
Ex falso quodlibet folgt: $x \neq -\infty$.

`1.2.Fall` $x \neq -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \neq -\infty$.

$\square$

139-3. Die vertraute Gleichung $x : x = 1$ gilt genau dann, wenn $0 \neq x \in \mathbb{C}$:

139-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x : x = 1$.

`ii)` $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **139-3**

`REIM`-**Notation**.

$\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x : x = 1$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x : x = 1$" und
aus **95-5**"1 Zahl"
folgt: $x : x$ Zahl.

`2.1:`
$$1 \stackrel{\mathbf{99-15}}{=} \mathsf{Re}1 \stackrel{\texttt{VS}}{=} \mathsf{Re}(x : x) \stackrel{\mathbf{138-3}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) : \mathsf{ab2}(x) \stackrel{\mathbf{96-22}}{=} \mathsf{ab2}(x) : \mathsf{ab2}(x).$$

`2.2:` Aus `1`"$x : x$ Zahl"
folgt via **96-17**: x Zahl.

`3.1:` Aus `2.1`"$1 = \ldots = \mathsf{ab2}(x) : \mathsf{ab2}(x)$"
folgt: $\mathsf{ab2}(x) : \mathsf{ab2}(x) = 1$.

`3.2:` Aus `2.2`"x Zahl"
folgt via **128-11**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$.

...

Beweis **139-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $x : x = 1$.

...

4.1: Aus 3.1"$\mathsf{ab2}(x) : \mathsf{ab2}(x) = 1$"
folgt via **139-2**: $0 \neq \mathsf{ab2}(x)$.

4.2: Aus 3.1"$\mathsf{ab2}(x) : \mathsf{ab2}(x) = 1$"
folgt via **139-2**: $\mathsf{ab2}(x) \neq \mathsf{nan}$.

4.3: Aus 3.1"$\mathsf{ab2}(x) : \mathsf{ab2}(x) = 1$"
folgt via **139-2**: $\mathsf{ab2}(x) \neq +\infty$.

4.4: Aus 3"$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**:
$$(\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = +\infty) \vee (\mathsf{ab2}(x) = -\infty).$$

5.1: Aus 4.1"$0 \neq \mathsf{ab2}(x)$"
folgt via **128-3**: $0 \neq x$.

5.2: Aus 4.4"$(\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = +\infty)$
$\vee(\mathsf{ab2}(x) = -\infty)$" und
aus 4.2"$\mathsf{ab2}(x) \neq \mathsf{nan}$"
folgt: $(\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = +\infty) \vee (\mathsf{ab2}(x) = -\infty)$.

6: Aus 5.2"$(\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = +\infty) \vee (\mathsf{ab2}(x) = -\infty)$" und
aus 4.3"$\mathsf{ab2}(x) \neq +\infty$"
folgt: $(\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = -\infty)$.

7: Aus 6"$(\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = -\infty)$" und
aus **128-14**"$\mathsf{ab2}(x) \neq -\infty$"
folgt: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

8: Aus 7"$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **128-9**: $x \in \mathbb{C}$.

9: Aus 5.1"$0 \neq x$" und
aus 8"$x \in \mathbb{C}$"
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

<u>Beweis **139-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{C}$"
folgt via **128-10**: $0 \neq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-6**: $1 : \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `1.1`"$0 \neq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $\mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x)) = 1$.

`2.3:` Aus `1.2`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Aus `2.1`"$1 : \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $1 : \mathsf{ab2}(x)$ Zahl.

`3.2:` Aus `2.3`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{C}$.

`4.1:` Aus `3.1`"$1 : \mathsf{ab2}(x)$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x)) = 0$.

`4.2:` Aus `3.2`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-5**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = 0$.

$\ldots$

<u>Beweis **139-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

...

`5.1:` $\mathsf{Re}(x:x)$

$$\stackrel{\mathbf{138-3}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)):\mathsf{ab2}(x)$$

$$\stackrel{\mathbf{96-22}}{=} \mathsf{ab2}(x):\mathsf{ab2}(x)$$

$$= \mathsf{ab2}(x)\cdot\mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x))$$

$$\stackrel{\mathsf{2.2}}{=} 1.$$

`5.2:` $\mathsf{Im}(x:x)$

$$\stackrel{\mathbf{138-3}}{=} (-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}x)):\mathsf{ab2}(x)$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} ((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}x)-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}x)):\mathsf{ab2}(x)$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}x)-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}x)):\mathsf{ab2}(x)$$

$$\stackrel{\mathsf{4.2}}{=} 0:\mathsf{ab2}(x)$$

$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} 0\cdot(1:\mathsf{ab2}(x))$$

$$\stackrel{\mathsf{4.1}}{=} 0.$$

`6.1:` Aus `5.1`
folgt: $\mathsf{Re}(x:x)=1.$

`6.2:` Aus `5.2`
folgt: $\mathsf{Im}(x:x)=0.$

`7:` $x:x$

$$\stackrel{\mathbf{138-3}}{=} \mathsf{Re}(x:x)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(x:x)$$

$$\stackrel{\mathsf{6.1}}{=} 1+\mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(x:x)$$

$$\stackrel{\mathsf{6.2}}{=} 1+\mathsf{i}\cdot 0$$

$$\stackrel{\mathbf{99-15}}{=} 1.$$

`8:` Aus `7`
folgt: $x:x=1.$

□

139-4. Aus $0 \neq 1, 2, \mathsf{i} \in \mathbb{C}$ folgt unter anderem via **139-3** das nunmehrige Ergebnis:

139-4(Satz)

a) $1 : 1 = 1$.

b) $(-1) : (-1) = 1$.

c) $2 : 2 = 1$.

d) $(-2) : (-2) = 1$.

e) $\mathsf{i} : \mathsf{i} = 1$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **139-4**</u> `a)`

Aus **95-2**“$0 \neq 1$” und
aus **101-5**“$1 \in \mathbb{C}$”
folgt via **139-3**: $1 : 1 = 1.$

`b)`

`1:` $(-1) : (-1) \stackrel{\textbf{FS}-:}{=} 1 : 1 \stackrel{\texttt{a)}}{=} 1.$

`2:` Aus `1`
folgt: $(-1) : (-1) = 1.$

`c)`

`1:` Aus **109-26**“$2 \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $2 \in \mathbb{C}.$

`2:` Aus **109-26**“$0 \neq 2$” und
aus `1`“$2 \in \mathbb{C}$”
folgt via **139-3**: $2 : 2 = 1.$

`d)`

`1:` $(-2) : (-2) \stackrel{\textbf{FS}-:}{=} 2 : 2 \stackrel{\texttt{c)}}{=} 1.$

`2:` Aus `1`
folgt: $(-2) : (-2) = 1.$

`e)`

Aus **95-7**“$0 \neq \mathsf{i}$” und
aus **101-8**“$\mathsf{i} \in \mathbb{C}$”
folgt via **139-3**: $\mathsf{i} : \mathsf{i} = 1.$

$\square$

139-5. Die nun vorliegende, vorläufige Kürzungsregel ebnet den Weg zum Beweis von **FundamentalSatz Quotient**1:

139-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow$) $0 \neq a \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $(x \cdot a) : a = x$.

b) $(a \cdot x) : a = x$.

c) $a \cdot (x : a) = x$.

d) $(x : a) \cdot a = x$.

RECH-**Notation**.

Beweis **139-5** a)

1.1: Aus $\rightarrow$)"$a \in \mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: $a \in \mathbb{B}$.

1.2: Aus $\rightarrow$)"$0 \neq a \in \mathbb{C}$"
folgt via **139-3**: $a : a = 1$.

1.3: Aus $\rightarrow$)"$x \in \mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

2.1: Aus $\rightarrow$)"$x \in \mathbb{C}$" und
aus 1.1"$a \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-18**: $x \cdot (a : a) = (x \cdot a) : a$.

2.2: Aus 1.3"x Zahl"
folgt via **FSM**1: $x \cdot 1 = x$.

3: $(x \cdot a) : a \stackrel{2.1}{=} x \cdot (a : a) \stackrel{1.2}{=} x \cdot 1 \stackrel{2.2}{=} x$.

4: Aus 3
folgt: $(x \cdot a) : a = x$.

<u>Beweis</u> **139-5** `b)`

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{C}$" und
aus →) "$0 \neq a \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x \cdot a) : a = x$.

`2:` $(a \cdot x) : a \stackrel{\textbf{KGM}}{=} (x \cdot a) : a \stackrel{1}{=} x$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(a \cdot x) : a = x$.

`c)`

`1:` Aus →) "$a \in \mathbb{C}$"
folgt via ∈**SZ**: $a \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus →) "$a \in \mathbb{C}$" und
aus `1` "$a \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-18**: $a \cdot (x : a) = (a \cdot x) : a$.

`3:` Aus →) "$x \in \mathbb{C}$" und
aus →) "$0 \neq a \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(a \cdot x) : a = x$.

`4:` Aus `2` "$a \cdot (x : a) = (a \cdot x) : a$" und
aus `3` "$(a \cdot x) : a = x$"
folgt: $a \cdot (x : a) = x$.

`d)`

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{C}$" und
aus →) "$0 \neq a \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $a \cdot (x : a) = x$.

`2:` $(x : a) \cdot a \stackrel{\textbf{KGM}}{=} a \cdot (x : a) \stackrel{1}{=} x$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x : a) \cdot a = x$.

□

139-6. Auch das nunmehrige Resultat bereitet **FundamentalSatz Quotient**1 vor:

139-6(Satz)

Aus "$x : y = 1$" *folgt* "$x = y$" *und* "$0 \neq x \in \mathbb{C}$".

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **139-6**</u> `VS` gleich $x : y = 1.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x : y = 1$" und
aus **95-5**"1 Zahl"
folgt: $x : y$ Zahl.

`1.2:` Aus **95-2**"$0 \neq 1$" und
aus `VS` gleich "$x : y = 1$"
folgt: $0 \neq x : y.$

`1.3:` Aus `VS` gleich "$x : y = 1$" und
aus **101-5**"$1 \in \mathbb{C}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{C}.$

`2.1:` Aus `1.1`"$x : y$ Zahl"
folgt via **96-17**: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl}).$

`2.2:` Aus `1.2`"$0 \neq x : y$" und
aus `1.3`"$x : y \in \mathbb{C}$"
folgt: $0 \neq x : y \in \mathbb{C}.$

`3.1:` Aus `2.1`"$\ldots y$ Zahl"
folgt via **FSM**1: $1 \cdot y = y.$

`3.2:` Aus `2.2`"$0 \neq x : y \in \mathbb{C}$" und
aus **136-1**"$x : y = x \cdot (1 : y)$"
folgt: $0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}.$

`4:` Aus `3.2`"$0 \neq x \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}$"
folgt via **132-2**: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq 1 : y \in \mathbb{C}).$

`5:` Aus `4`"$\ldots 0 \neq 1 : y \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-30**: $0 \neq y \in \mathbb{C}.$

`6:` Aus `4`"$\ldots x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `5`"$0 \neq y \in \mathbb{C}$"
folgt via **139-5**: $(x : y) \cdot y = x.$

`7:` $x \stackrel{6}{=} (x : y) \cdot y \stackrel{\mathtt{VS}}{=} 1 \cdot y \stackrel{3.1}{=} y.$

`8:` Aus `7`"$x = \ldots = y$" und
aus `4`"$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt: $(x = y) \wedge (0 \neq x \in \mathbb{C}).$

$\square$

139-7. Im **FundamentalSatz Quotient**1 werden **139-3** und **139-6** erweitert:

139-7(Satz) **(FSQ1: FundamentalSatz Quotient1)**

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $x : y = 1$.

`ii)` $y : x = 1$.

`iii)` "$x = y$" *und* "$0 \neq x \in \mathbb{C}$".

`iv)` "$x = y$" *und* "$0 \neq y \in \mathbb{C}$".

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **139-7**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x : y = 1.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x : y = 1$"
folgt via **139-6**: $(x = y) \wedge (0 \neq x \in \mathbb{C}).$

`2:` Aus `1`"$\ldots 0 \neq x \in \mathbb{C}$"
folgt via **139-3**: $x : x = 1.$

`3:` Aus `1`"$x = y \ldots$" und
aus `2`"$x : x = 1$"
folgt: $y : x = 1.$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $y : x = 1.$

`1:` Aus `VS` gleich "$y : x = 1$"
folgt via **139-6**: $(y = x) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}).$

`2.1:` Aus `1`"$y = x \ldots$"
folgt: $x = y.$

`2.2:` Aus `1`"$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{C}$" und
aus `1`"$y = x \ldots$"
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{C}.$

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(x = y) \wedge (0 \neq x \in \mathbb{C}).$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(x = y) \wedge (0 \neq x \in \mathbb{C}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq x \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$x = y \ldots$"
folgt: $0 \neq y \in \mathbb{C}.$

`2:` Aus `VS` gleich "$x = y \ldots$" und
aus `1`"$0 \neq y \in \mathbb{C}$"
folgt: $(x = y) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}).$

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x = y) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{C}$"
folgt via **139-3**: $y : y = 1.$

`2:` Aus `VS` gleich "$x = y \ldots$" und
aus `1`"$y : y = 1$"
folgt: $x : y = 1.$

$\square$

139-8. Mit dem folgenden Satz wird eine weitere Vorbereitung zum Beweis von **FundamentalSatz Produkt**1 getroffen:

139-8(Satz)

Aus "$x \cdot y = 1$" *folgt* "$0 \neq x \in \mathbb{C}$" *und* "$x = 1 : y$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **139-8** `VS` gleich $x \cdot y = 1$.

`1.1:` Aus **95-2**"$0 \neq 1$" und
aus `VS` gleich "$x \cdot y = 1$"
folgt: $0 \neq x \cdot y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \cdot y = 1$" und
aus **101-5**"$1 \in \mathbb{C}$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$"
folgt via **132-2**: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$.

`4:` Aus `3`"$\ldots x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `3`"$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{C}$"
folgt via **139-5**: $(x \cdot y) : y = x$.

`5:` Aus `4`"$(x \cdot y) : y = x$" und
aus `VS` gleich "$x \cdot y = 1$"
folgt: $1 : y = x$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x = 1 : y$.

`7:` Aus `3`"$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `6`"$x = 1 : y$"
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (x = 1 : y)$.

□

139-9. Nun kann der **FundamentalSatz Produkt**1 bewiesen werden.

139-9(Satz) (FSP1: FundamentalSatz Produkt1)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot y = 1$.

`ii)` "$0 \neq x \in \mathbb{C}$" *und* "$x = 1 : y$".

`iii)` "$0 \neq x \in \mathbb{C}$" *und* "$y = 1 : x$".

`iv)` "$0 \neq y \in \mathbb{C}$" *und* "$x = 1 : y$".

`v)` "$0 \neq y \in \mathbb{C}$" *und* "$y = 1 : x$".

`RECH.`-**Notation**

Beweis **139-9** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $x \cdot y = 1$.

Aus `VS` gleich "$x \cdot y = 1$"
folgt via **139-8**: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (x = 1 : y)$.

Beweis **139-9** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (x = 1 : y)$.

`1.1:` Aus `VS`
folgt: $x = 1 : y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x = 1 : y$"
folgt: $0 \neq 1 : y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1.2`"$0 \neq 1 : y \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-30**: $0 \neq y \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq y \in \mathbb{C}$"
folgt via **139-3**: $y : y = 1$.

`4:` $y \cdot x \stackrel{\texttt{1.1}}{=} y \cdot (1 : y) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} y : y \stackrel{\texttt{3}}{=} 1$.

`5:` Aus `4`"$y \cdot x = \ldots = 1$"
folgt via **139-8**: $y = 1 : x$.

`6:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `5`"$y = 1 : x$"
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (y = 1 : x)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (y = 1 : x)$.

`1.1:` Aus `VS`
folgt: $y = 1 : x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **137-30**: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **139-3**: $x : x = 1$.

`2.1:` $x \cdot y \stackrel{\texttt{1.1}}{=} x \cdot (1 : x) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x : x \stackrel{\texttt{1.3}}{=} 1$.

`2.2:` Aus `1.2`"$0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$" und
aus `1.1`"$y = 1 : x$"
folgt: $0 \neq y \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2.1`"$x \cdot y = \ldots = 1$"
folgt via **139-8**: $x = 1 : y$.

`4:` Aus `2.2`"$0 \neq y \in \mathbb{C}$" und
aus `3`"$x = 1 : y$"
folgt: $(0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (x = 1 : y)$.

<u>Beweis **139-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $(0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (x = 1 : y)$.

`1.1`: Aus `VS`
folgt: $x = 1 : y$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$0 \neq y \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **139-3**: $y : y = 1$.

`2`: $y \cdot x \stackrel{1.1}{=} y \cdot (1 : y) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} y : y \stackrel{1.2}{=} 1$.

`3`: Aus `2`"$y \cdot x = \ldots = 1$"
folgt via **139-8**: $y = 1 : x$.

`4`: Aus `VS` gleich "$0 \neq y \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `3`"$y = 1 : x$"
folgt: $(0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (y = 1 : x)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(0 \neq y \in \mathbb{C}) \wedge (y = 1 : x)$.

`1.1`: Aus `VS` folgt: $y = 1 : x$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$0 \neq y \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y = 1 : x$"
folgt: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$.

`2`: Aus `1.2`"$0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-30**: $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`3`: Aus `2`"$0 \neq x \in \mathbb{C}$"
folgt via **139-3**: $x : x = 1$.

`4`: $x \cdot y \stackrel{1.1}{=} x \cdot (1 : x) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x : x \stackrel{3}{=} 1$.

`5`: Aus `4`
folgt: $x \cdot y = 1$.

$\square$

139-10. Mit der nunmehrigen **Multiplikativen EliminationsRegel** wird Hinreichendes dafür angegeben, um aus $x \cdot a = y \cdot a$ auf $x = y$ schließen zu können:

139-10(Satz) (MER: Multiplikative EliminationsRegel)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x \cdot a = y \cdot a$.

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{C}$. *oder* $y \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow)$ $0 \neq a \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{C}$.

b) $y \in \mathbb{C}$.

c) $x = y$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **139-10**</u>

`1.1:` Nach $\rightarrow$) gilt: $(x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall` "$x \in \mathbb{C}$" und
aus $\rightarrow$) "$\ldots a \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot a \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "$x \cdot a = y \cdot a$" und
aus `2` "$x \cdot a \in \mathbb{C}$"
folgt: $y \cdot a \in \mathbb{C}$.

`4:` Via **KGM** gilt: $a \cdot y = y \cdot a$.

`5:` Aus `4` "$a \cdot y = y \cdot a$" und
aus `3` "$y \cdot a \in \mathbb{C}$"
folgt: $a \cdot y \in \mathbb{C}$.

`6:` Aus $\rightarrow$) "$0 \neq a \ldots$" und
aus `5` "$a \cdot y \in \mathbb{C}$"
folgt via **132-1**: $y \in \mathbb{C}$.

`7:` Aus `1.1.1.Fall` "$x \in \mathbb{C}$" und
aus `6` "$y \in \mathbb{C}$"
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1.1.2.Fall` $y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1.1.2.Fall` "$y \in \mathbb{C}$" und
aus $\rightarrow$) "$\ldots a \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $y \cdot a \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "$x \cdot a = y \cdot a$" und
aus `2` "$y \cdot a \in \mathbb{C}$"
folgt: $x \cdot a \in \mathbb{C}$.

`4:` Via **KGM** gilt: $a \cdot x = x \cdot a$.

`5:` Aus `4` "$a \cdot x = x \cdot a$" und
aus `3` "$x \cdot a \in \mathbb{C}$"
folgt: $a \cdot x \in \mathbb{C}$.

`6:` Aus $\rightarrow$) "$0 \neq a \ldots$" und
aus `5` "$a \cdot x \in \mathbb{C}$"
folgt via **132-1**: $x \in \mathbb{C}$.

`7:` Aus `6` "$x \in \mathbb{C}$" und
aus `1.1.2.Fall` "$y \in \mathbb{C}$"
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

...

<u>Beweis **139-10**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$"

`1.2:` Aus `A1` gleich "$x \in \mathbb{C} \dots$" und
aus →) "$0 \neq a \in \mathbb{C}$"
folgt via **139-5**: $(x \cdot a) : a = x.$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\dots y \in \mathbb{C}$" und
aus →) "$0 \neq a \in \mathbb{C}$"
folgt via **139-5**: $(y \cdot a) : a = y.$

`1.a):` Aus `A1`
folgt: $x \in \mathbb{C}.$

`1.b):` Aus `A1`
folgt: $y \in \mathbb{C}.$

`2:` $x \stackrel{1.2}{=} (x \cdot a) : a \stackrel{\rightarrow)}{=} (y \cdot a) : a \stackrel{1.3}{=} y.$

`3.c):` Aus `2`
folgt: $x = y.$

□

139-11. In der **Multiplikativen InversionsRegel** werden Bedingungen angegeben unter denen von $x \cdot a = y$ auf $x = y : a$ geschlossen werden kann:

139-11(Satz) (MIR: Multiplikative InversionsRegel)

Es gelte:

→) $x \cdot a = y$.

→) $x \in \mathbb{C}$. *oder* $y \in \mathbb{C}$.

→) $0 \neq a \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{C}$.

b) $y \in \mathbb{C}$.

c) $x = y : a$.

RECH-**Notation**.

Beweis **139-11**

`1.1:` Nach →) gilt: $(x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall`"$x \in \mathbb{C}$" und
aus →) "$\ldots a \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot a \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus →) "$x \cdot a = y$" und
aus 2"$x \cdot a \in \mathbb{C}$"
folgt: $y \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `1.1.1.Fall`"$x \in \mathbb{C}$" und
aus 3"$y \in \mathbb{C}$"
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1.1.2.Fall` $y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus →) "$x \cdot a = y$" und
aus `1.1.2.Fall`"$y \in \mathbb{C}$"
folgt: $x \cdot a \in \mathbb{C}$.

`3:` Via **KGM** gilt: $a \cdot x = x \cdot a$.

`4:` Aus 3"$a \cdot x = x \cdot a$" und
aus 2"$x \cdot a \in \mathbb{C}$"
folgt: $a \cdot x \in \mathbb{C}$.

`5:` Aus →) "$0 \neq a \ldots$" und
aus 4"$a \cdot x \in \mathbb{C}$"
folgt via **132-1**: $x \in \mathbb{C}$.

`6:` Aus 5"$x \in \mathbb{C}$" und
aus `1.1.2.Fall`"$y \in \mathbb{C}$"
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$"

. . .

<u>Beweis **139-11**</u>

...

`1.2:` Aus `A1` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus →) "$0 \neq a \in \mathbb{C}$"
folgt via **139-5**: $$(x \cdot a) : a = x.$$

`1.a):` Aus `A1`
folgt: $$x \in \mathbb{C}.$$

`1.b):` Aus `A1`
folgt: $$y \in \mathbb{C}.$$

`2:` $$x \stackrel{1.2}{=} (x \cdot a) : a \stackrel{\rightarrow)}{=} y : a.$$

`3.c):` Aus `2`
folgt: $$x = y : a.$$

$\square$

NTF$\mathbb{A}$: NullTeilerFreiheit in $\mathbb{A}$.

Ersterstellung: 29/07/10 **Letzte Änderung: 11/03/12**

140-1. Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist genau dann$\neq 0$, wenn beide Zahlen$\neq 0$ sind:

140-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$.

`ii)` $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **140-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$.

Aus `VS` gleich "$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$"
folgt via **132-2**: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$.

Beweis **140-1** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{C}$.

`2:` Es gilt: $(0 = x \cdot y) \vee (0 \neq x \cdot y)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $0 = x \cdot y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **139-5**: $(x \cdot y) : x = y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`2:` Aus `1.2`"x Zahl"
folgt via **FSD**0: $0 : x = 0$.

`3:`

$$0 \stackrel{2}{=} 0 : x \stackrel{\texttt{2.1.Fall}}{=} (x \cdot y) : x \stackrel{1.1}{=} y.$$

`4:` Es gilt `3`"$0 = \ldots = y$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots 0 \neq y \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq x \cdot y$.

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $0 \neq x \cdot y$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}0 \neq x \cdot y\text{"}}$

`3:` Aus `A1` gleich "$0 \neq x \cdot y$" und
aus `1`"$x \cdot y \in \mathbb{C}$"
folgt: $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$.

$\square$

140-2. Das nachfolgende Beispiel vorwegnehmend wird hier fest gestellt:

140-2.Bemerkung

- Gemäß **106-3** gilt "$((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})) \Rightarrow (0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R})$" .

- Die Aussage
  "$(0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}) \Rightarrow ((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$"
  ist nicht ohne Weiters verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow ((0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R}))$"
  ist nicht ohne Weiters verfügbar.

140-3. Das nunmehrige Beispiel belegt **140-2(Bem)**, wonach aus $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$ nicht unbedingt $(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$ folgen muss. Damit ist auch klar, dass es keine Äquivalenz von $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$ und $(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$ gibt:

140-3.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) $x = \mathsf{i}$.

$\rightarrow$) $y = \mathsf{i}$.

Dann folgt:

a) $x \cdot y = -1$.

b) $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$.

c) $0 \neq x$.

d) $0 \neq y$.

e) $x \notin \mathbb{R}$.

f) $y \notin \mathbb{R}$.

g) $\neg(0 \neq x \in \mathbb{R})$.

h) $\neg(0 \neq y \in \mathbb{R})$.

140-4. Die **NullTeilerFreiheit in** $\mathbb{A}$ besagt unter anderem, dass aus $0 \neq x \cdot y$ Zahl sowohl $0 \neq x$ Zahl als auch $0 \neq y$ Zahl folgt. Auch folgt aus $x \cdot y = 0$, dass x, y akomplexe Zahlen sind, von denen mindestens eine$= 0$ ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b) - e) - d) - f) - g) - h)- i)- j) - k)`:

140-4(Satz) (NTF$\mathbb{A}$: NullTeilerFreiheit in $\mathbb{A}$)

`a)` *Aus* "$0 \neq x \cdot y$" *folgt* "$0 \neq x$" *oder* "$0 \neq y$".

`b)` *Aus* "$0 \neq x \cdot y$"
folgt "$x \notin \mathbb{A}$" *oder* "$y \notin \mathbb{A}$" *oder* "$(0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl})$".

`c)` *Aus* "$0 \neq x \cdot y$ *Zahl*" *folgt* "$0 \neq x$ *Zahl*" *und* "$0 \neq y$ *Zahl*".

`d)` *Aus* "$x \cdot y = 0$" *folgt* "$x = 0$" *oder* "$y = 0$".

`e)` *Aus* "$x \cdot y = 0$" *folgt* "$(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$" *oder* "$(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$".

`f)` *Aus* "$x \notin \mathbb{A}$" *folgt* "$0 \neq x \cdot y$".

`g)` *Aus* "$y \notin \mathbb{A}$" *folgt* "$0 \neq x \cdot y$".

`h)` *Aus* "$0 \neq x$ *Zahl*" *und* "$0 \neq y$ *Zahl*" *folgt* "$0 \neq x \cdot y$ *Zahl*".

`i)` *Aus* "$0 \neq x$" *und* "$0 \neq y$" *folgt* "$0 \neq x \cdot y$".

`j)` *Aus* "$x = 0$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x \cdot y = 0$".

`k)` *Aus* "x *Zahl*" *und* "$y = 0$" *folgt* "$x \cdot y = 0$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **140-4** `a)` `VS` gleich $0 \neq x \cdot y$.

Aus `VS` gleich "$0 \neq x \cdot y$"
folgt via **98-20**: $(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$.

Beweis **140-4** `c)` `VS` gleich $0 \neq x \cdot y$ Zahl.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y$ Zahl"
folgt via **96-15**: (x Zahl) $\wedge$ (y Zahl).

`2.1:` Es gilt: $(x = 0) \vee (y = 0) \vee ((0 \neq x) \wedge (0 \neq y))$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $x = 0$.

`3:` Aus `1`"$\ldots y$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0$.

`4:` Aus `2.1.1.Fall`"$x = 0$" und
aus `3`"$0 \cdot y = 0$"
folgt: $x \cdot y = 0$.

`5:` Es gilt `VS` gleich "$0 \neq x \cdot y \ldots$".
Es gilt `4`"$x \cdot y = 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`2.1.2.Fall` $y = 0$.

`3:` Aus `1`"$x \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0$.

`4:` Aus `3`"$x \cdot 0 = 0$" und
aus `2.1.2.Fall`"$y = 0$"
folgt: $x \cdot y = 0$.

`5:` Es gilt `VS` gleich "$0 \neq x \cdot y \ldots$".
Es gilt `4`"$x \cdot y = 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`2.3.Fall` $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: `A1` | "$(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$"

`2.2:` Aus `A1` gleich "$0 \neq x \ldots$" und
aus `1`"x Zahl$\ldots$"
folgt: $0 \neq x$ Zahl.

`2.3:` Aus `A1` gleich "$\ldots 0 \neq y$" und
aus `1`"$\ldots y$ Zahl"
folgt: $0 \neq y$ Zahl.

...

<u>Beweis **140-4**</u> `c)` `VS` gleich $0 \neq x \cdot y$ Zahl.

...

`3:` Aus `2.2` und
aus `2.3`
folgt: $(0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl})$.

`b)` `VS` gleich $0 \neq x \cdot y$.

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \cdot y \text{ Zahl}) \vee (x \cdot y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \cdot y$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich “$0 \neq x \cdot y \ldots$” und
aus `1.1.Fall`“$x \cdot y$ Zahl”
folgt: $0 \neq x \cdot y$ Zahl.

`3:` Aus `2`“$0 \neq x \cdot y$ Zahl”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl})$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl}))$.

`1.2.Fall` $x \cdot y \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x \cdot y \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-16**: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl}))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl})).$$

<u>Beweis **140-4**</u> `e)` `VS` gleich $x \cdot y = 0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot y = 0$" und
aus **101-5**"$0 \in \mathbb{C}$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{C}.$

`2:` Aus `1`"$x \cdot y \in \mathbb{C}$"
folgt via **132-3**:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})).$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}).$

Aus `2.1.Fall`
folgt: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)).$

`2.2.Fall` $(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0).$

Aus `2.2.Fall`
folgt: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)).$

`2.3.Fall` $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}).$

`3:` Aus `2.3.Fall`"$0 \neq x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `2.3.Fall`"$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{C}$"
folgt via **140-1**: $0 \neq x \cdot y.$

`4:` Es gilt `3`"$0 \neq x \cdot y$".
Es gilt `VS` gleich "$x \cdot y = 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)).$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)).$$

`d)` `VS` gleich $x \cdot y = 0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot y = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`:
$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $(x = 0) \vee (y = 0).$

<u>Beweis **140-4**</u> `f)` `VS` gleich $x \notin \mathbb{A}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`2:` Aus **0-18**"$0 \neq \mathcal{U}$" und
aus `1`"$x \cdot y = \mathcal{U}$"
folgt: $0 \neq x \cdot y$.

`g)` `VS` gleich $y \notin \mathbb{A}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`2:` Aus **0-18**"$0 \neq \mathcal{U}$" und
aus `1`"$x \cdot y = \mathcal{U}$"
folgt: $0 \neq x \cdot y$.

`h)` `VS` gleich $(0 \neq x$ Zahl$) \wedge (0 \neq y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ Zahl$\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y$ Zahl.

`2:` Es gilt: $(x \cdot y = 0) \vee (0 \neq x \cdot y)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \cdot y = 0$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$x \cdot y = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(x = 0) \vee (y = 0)$.

`4:` Aus `3`"$(x = 0) \vee (y = 0)$" und
aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt: $y = 0$.

`5:` Es gilt `4`"$y = 0$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots 0 \neq y \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq x \cdot y$ Zahl.

`2.2.Fall` $0 \neq x \cdot y$.

Aus `2.2.Fall`"$0 \neq x \cdot y$" und
aus `1`"$x \cdot y$ Zahl"
folgt: $0 \neq x \cdot y$ Zahl.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq x \cdot y$ Zahl.

<u>Beweis **140-4**</u> `i)` `VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`1:` Es gilt: $(x \cdot y = 0) \vee (0 \neq x \cdot y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \cdot y = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$x \cdot y = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(x = 0) \vee (y = 0)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\neg(\neg((x = 0) \vee (y = 0)))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\neg((0 \neq x) \wedge (0 \neq y))$.

`5:` Es gilt `4` "$\neg((0 \neq x) \wedge (0 \neq y))$".
Es gilt `VS` gleich "$(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq x \cdot y$.

`1.2.Fall` $0 \neq x \cdot y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq x \cdot y$.

`j)` `VS` gleich $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x = 0 \ldots$" und
aus `1` "$0 \cdot y = 0$"
folgt: $x \cdot y = 0$.

`k)` `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "x Zahl$\ldots$"
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0$.

`2:` Aus `1` "$x \cdot 0 = 0$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y = 0$"
folgt: $x \cdot y = 0$.

□

140-5. Unter Bezugnahme auf folgende Beispiele wird hier unter anderem fest gestellt, dass aus $0 \neq x \cdot y$ nicht ohne Weiteres $0 \neq x$ *und* $0 \neq y$ folgt:

140-5.Bemerkung

- Die Aussage
  “$(0 \neq x) \Rightarrow (0 \neq x \cdot y)$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  “$(0 \neq y) \Rightarrow (0 \neq x \cdot y)$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  “$(x = 0) \Rightarrow (x \cdot y = 0)$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  “$(y = 0) \Rightarrow (x \cdot y = 0)$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  “$(0 \neq x \cdot y) \Rightarrow ((0 \neq x) \wedge (0 \neq y))$”
  ist nicht ohne Weiters verfg̈bar.

140-6. Das nunmehrige Beispiel belegt, dass aus $0 \neq x$ nicht ohne Weiteres $0 \neq x \cdot y$ folgt:

140-6.BEISPIEL

Es gelte:

$\longrightarrow$) $x = 1$.

$\longrightarrow$) $y = 0$.

Dann folgt:

a) $0 \neq x$.

b) $0 = x \cdot y$.

140-7. Das nunmehrige Beispiel belegt, dass aus $0 \neq y$ nicht ohne Weiteres $0 \neq x \cdot y$ folgt:

<u>140-7.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) $x = 0$.

$\rightarrow$) $y = 1$.

Dann folgt:

a) $0 \neq y$.

b) $0 = x \cdot y$.

140-8. Das nunmehrige Beispiel belegt, dass aus $x = 0$ nicht ohne Weiteres $x \cdot y = 0$ folgt. Auch ergibt sich aus diesem Beispiel, dass aus $0 \neq x \cdot y$ nicht ohne Weiteres $0 \neq x$ *und* $0 \neq y$ folgt:

140-8.BEISPIEL

Es gelte:

→) $x = 0$.

→) $y = \mathcal{U}$.

Dann folgt:

a) $x = 0$.

b) $x \cdot y = \mathcal{U}$.

c) $0 \neq x \cdot y$.

140-9. Das nunmehrige Beispiel belegt, dass aus $y = 0$ nicht ohne Weiteres $x \cdot y = 0$ folgt:

<u>140-9.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) $x = \mathcal{U}$.

→) $y = 0$.

Dann folgt:

a) $y = 0$.

b) $x \cdot y = \mathcal{U}$.

b) $0 \neq x \cdot y$.

140-10. Nun werden einige Folgerungen aus **NTF**$\mathbb{A}$, die späteres Zitieren vereinfachen, angegeben:

140-10(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq x \cdot y$" *und* "$x = 0$" *folgt* "$0 \neq y \notin \mathbb{A}$" *und* "$x \cdot y = \mathcal{U}$".

b) *Aus* "$0 \neq x \cdot y$" *und* "$y = 0$" *folgt* "$0 \neq x \notin \mathbb{A}$" *und* "$x \cdot y = \mathcal{U}$".

c) *Aus* "$0 \neq x \cdot y$" *und* "x *Zahl*"
folgt "$y \notin \mathbb{A}$" *oder* "$(0 \neq x) \wedge (0 \neq y$ *Zahl*$)$".

d) *Aus* "$0 \neq x \cdot y$" *und* "y *Zahl*"
folgt "$x \notin \mathbb{A}$" *oder* "$(0 \neq x$ *Zahl*$) \wedge (0 \neq y)$".

e) *Aus* "$0 \neq x \cdot y$" *und* "x *Zahl*" *und* "y *Zahl*"
folgt "$(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$".

f) *Aus* "$x \cdot y = 0$" *und* "$0 \neq x$" *folgt* "$y = 0$".

g) *Aus* "$x \cdot y = 0$" *und* "$0 \neq y$" *folgt* "$x = 0$".

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **140-10**</u> `a)` `VS` gleich $(0 \neq x \cdot y) \wedge (x = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \cdot y$"
folgt via **NFT**$\mathbb{A}$: $(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$.

`2:` Aus `1`"$(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x = 0$"
folgt: $0 \neq y$.

`3.1:` Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` y Zahl.

`4:` Aus `3.1.1.Fall`"y Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots x = 0$" und
aus `4`"$0 \cdot y = 0$"
folgt: $x \cdot y = 0$.

`6:` Es gilt `5`"$x \cdot y = 0$".
Es gilt `VS` gleich "$0 \neq x \cdot y \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $y \notin \mathbb{A}$.

`3.1.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` "$y \notin \mathbb{A}$"

`3.2:` Aus `A1` gleich "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`3.3:` Aus `2`"$0 \neq y$" und
aus `A1` gleich "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt: $0 \neq y \notin \mathbb{A}$.

`4:` Aus `3.3`"$0 \neq y \notin \mathbb{A}$" und
aus `3.2`"$x \cdot y = \mathcal{U}$"
folgt: $(0 \neq y \notin \mathbb{A}) \wedge (x \cdot y = \mathcal{U})$.

<u>Beweis **140-10**</u> `b)` `VS` gleich $(0 \neq x \cdot y) \wedge (y = 0)$.

`1:` Via **KGM** gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \cdot y \ldots$" und
aus `1`"$x \cdot y = y \cdot x$"
folgt: $0 \neq y \cdot x$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq y \cdot x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(0 \neq x \notin \mathbb{A}) \wedge (y \cdot x = \mathcal{U})$.

`4:` Aus `3`"$(0 \neq x \notin \mathbb{A}) \wedge (y \cdot x = \mathcal{U})$" und
aus `1`"$x \cdot y = y \cdot x$"
folgt: $(0 \neq x \notin \mathbb{A}) \wedge (x \cdot y = \mathcal{U})$.

`c)` `VS` gleich $(0 \neq x \cdot y) \wedge (x \text{ Zahl})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \text{ Zahl}$"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \cdot y \ldots$"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl}))$.

`2:` Aus `1.2`"$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl}))$" und
aus `1.1`"$x \in \mathbb{A}$"
folgt: $(y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl}))$.

`d)` `VS` gleich $(0 \neq x \cdot y) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \text{ Zahl}$"
folgt via **95-4(Def)**: $y \in \mathbb{A}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \cdot y \ldots$"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl}))$.

`2:` Aus `1.2`"$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl}))$" und
aus `1.1`"$y \in \mathbb{A}$"
folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y))$.

<u>Beweis **140-10**</u> `e)` `VS` gleich $(0 \neq x \cdot y) \wedge (x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ Zahl$\ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $y \in \mathbb{A}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \cdot y \ldots$"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl}))$.

`2:` Aus `1.3`"$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl}))$" und
aus `1.1`"$x \in \mathbb{A}$"
folgt: $(y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl}))$.

`3:` Aus `2`"$(y \notin \mathbb{A}) \vee ((0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl}))$" und
aus `1.2`"$y \in \mathbb{A}$"
folgt: $(0 \neq x \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq y \text{ Zahl})$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`f)` `VS` gleich $(x \cdot y = 0) \wedge (0 \neq x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot y = 0 \ldots$"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $(x = 0) \vee (y = 0)$.

`2:` Aus `1`"$(x = 0) \vee (y = 0)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq x$"
folgt: $y = 0$.

`g)` `VS` gleich $(x \cdot y = 0) \wedge (0 \neq y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot y = 0 \ldots$"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $(x = 0) \vee (y = 0)$.

`2:` Aus `1`"$(x = 0) \vee (y = 0)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq y$"
folgt: $x = 0$.

$\square$

DKR$\mathbb{C}$: Divisions-KürzungsRegel $\mathbb{C}$.
DER: Divisions-EliminationsRegel.
DIR: Divisions-InversionsRegel.

Ersterstellung: 29/07/10 **Letzte Änderung: 14/03/12**

141-1. Mit diesem Satz werden all jene x erfasst, für die $x = 1 : (1 : x)$ gilt. Interessanter Weise gehört 0 zu jenen x:

141-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = 1 : (1 : x)$.

`ii)` *"*$x \in \mathbb{C}$*" oder "*$x = \mathsf{nan}$*"*
oder "$x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$*" oder "*$x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$*" oder "*$x = \mathcal{U}$*".*

`RECH`-**Notation**.

Beweis **141-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = 1 : (1 : x)$.

`1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{A}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{A}$.

`2:` Es gilt: $(x \in \mathbb{B}) \vee (x \notin \mathbb{B})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{B}$.

`3:` Aus `2.1.Fall` "$x \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-27**: $1 : x \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3` "$1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-10**: $1 : (1 : x) \in \mathbb{C}$.

`5:` Aus `VS` gleich "$x = 1 : (1 : x)$" und
aus `4` "$1 : (1 : x) \in \mathbb{C}$"
folgt : $x \in \mathbb{C}$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \vee (x = \mathsf{nan})$
$\vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

...

...

Beweis **141-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = 1 : (1 : x)$.

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{A}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $x \notin \mathbb{B}$.

`3:` Aus `1.1.Fall`"x Zahl" und
aus `2.2.Fall`"$x \notin \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`4:` Aus `3`"$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**: $1 : x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`5:` Aus `4`"$1 : x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**:
$$(1 : (1 : x) = \mathsf{nan}) \vee (1 : (1 : x) = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : (1 : x) = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}).$$

`6:` Aus `VS` gleich "$x = 1 : (1 : x)$" und
aus `5`"$(1 : (1 : x) = \mathsf{nan}) \vee (1 : (1 : x) = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : (1 : x) = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$"
folgt: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

`7:` Aus `6`
folgt:
$$(x \in \mathbb{C}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U}).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(x \in \mathbb{C}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U}).$$

...

Beweis **141-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = 1 : (1 : x)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-18**: $1 : x = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`“$1 : x = \mathcal{U}$” und
aus **96-19**“$1 : \mathcal{U} = \mathcal{U}$”
folgt: $1 : (1 : x) = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `VS` gleich “$x = 1 : (1 : x)$” und
aus `3`“$1 : (1 : x) = \mathcal{U}$”
folgt: $x = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `4`
folgt:
$(x \in \mathbb{C}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$(x \in \mathbb{C}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U}).$$

Beweis **141-1** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`1:` Nach `VS` gilt:

$$(x \in \mathbb{C}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{C}$.

`2:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = 0$.

`3:`
$$1 : (1 : x) \stackrel{\text{2.1.Fall}}{=} 1 : (1 : 0) \stackrel{\mathbf{98-24}}{=} 1 : 0 \stackrel{\mathbf{98-24}}{=} 0.$$

`4:` Aus `2.1.Fall`“$x = 0$” und aus 3“$1 : (1 : x) = \ldots = 0$” folgt: $x = 1 : (1 : x)$.

`2.2.Fall` $0 \neq x$.

`3:` Aus `2.2.Fall`“$0 \neq x$” und aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{C}$” folgt: $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus 2“$0 \neq x \in \mathbb{C}$” folgt via **139-3**: $x : x = 1$.

`5:` Via **136-1** gilt: $x : x = x \cdot (1 : x)$.

`6:` Aus 5“$x : x = x \cdot (1 : x)$” und aus 4“$x : x = 1$” folgt: $x \cdot (1 : x) = 1$.

`7:` Aus 6“$x \cdot (1 : x) = 1$” folgt via **FSP**1: $x = 1 : (1 : x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x = 1 : (1 : x)$.

...

Beweis **141-1** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $x = \mathsf{nan}$.

2: $1 : (1 : x) \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} 1 : (1 : \mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{137-9}}{=} 1 : \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{137-9}}{=} \mathsf{nan}$.

3: Aus `1.2.Fall`“$x = \mathsf{nan}$” und
aus 2“$1 : (1 : x) = \ldots = \mathsf{nan}$”
folgt: $x = 1 : (1 : x)$.

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

2: $1 : (1 : x) \stackrel{\texttt{1.3.Fall}}{=} 1 : (1 : (\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})) \stackrel{\mathbf{137-9}}{=} 1 : (\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{137-9}}{=} \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

3: Aus `1.3.Fall`“$x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$” und
aus 2“$1 : (1 : x) = \ldots = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$”
folgt: $x = 1 : (1 : x)$.

...

Beweis **141-1** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathcal{U})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.4.Fall}}$ $x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

2: $$1 : (1 : x) \stackrel{\text{1.4.Fall}}{=} 1 : (1 : (\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})) \stackrel{\mathbf{137-9}}{=} 1 : (\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{137-9}}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}.$$

3: Aus `1.4.Fall`"$x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$" und
aus 2"$1 : (1 : x) = \ldots = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$"
folgt: $x = 1 : (1 : x)$.

$\boxed{\texttt{1.5.Fall}}$ $x = \mathcal{U}$.

2: $$1 : (1 : x) \stackrel{\text{1.1.Fall}}{=} 1 : (1 : \mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} 1 : \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}.$$

3: Aus `1.5.Fall`"$x = \mathcal{U}$" und
aus 2"$1 : (1 : x) = \ldots = \mathcal{U}$"
folgt: $x = 1 : (1 : x)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $x = 1 : (1 : x)$.

□

141-2. Es gilt stets $1 : (1 : (1 : x)) = 1 : x$:

141-2(Satz)

$$1 : (1 : (1 : x)) = 1 : x.$$

RECH-**Notation**.

Beweis **141-2**

`1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{A}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{A}$.

`2:` Es gilt: $(x \in \mathbb{B}) \vee (x \notin \mathbb{B})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{B}$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-27**: $1 : x \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3`"$1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-1**: $1 : (1 : (1 : x)) = 1 : x$.

`2.2.Fall` $x \notin \mathbb{B}$.

`3:` Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{A}$" und
aus `2.2.Fall`"$x \notin \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`4:` Aus `3`"$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**:
$(1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

`5:` Aus `4`"$(1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$
$\vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$"
folgt via **141-1**:
$1 : x = 1 : (1 : (1 : x))$.

`6:` Aus `5`
folgt: $1 : (1 : (1 : x)) = 1 : x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$1 : (1 : (1 : x)) = 1 : x$.

...

<u>Beweis **141-2**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

2: Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-18**: $1 : x = \mathcal{U}$.

3: $1 : (1 : (1 : x)) \stackrel{2}{=} 1 : (1 : \mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} 1 : \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2}{=} 1 : x$.

4: Aus 3
folgt: $1 : (1 : (1 : x)) = 1 : x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : (1 : (1 : x)) = 1 : x$.

□

141-3. Falls x, y komplexe Zahlen sind und falls $1 : x = 1 : y$, dann $x = y$:

141-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $1 : x = 1 : y$.

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow)$ $y \in \mathbb{C}$.

Dann folgt "$x = y$".

RECH-**Notation**.

Beweis **141-3**

1.1: Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-1**: $x = 1 : (1 : x)$.

1.2: Aus $\rightarrow)$ "$y \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-1**: $y = 1 : (1 : y)$.

2:
$$x \stackrel{1.1}{=} 1 : (1 : x) \stackrel{\rightarrow)}{=} 1 : (1 : y) \stackrel{1.2}{=} y.$$

4: Aus 3
folgt: $x = y$.

□

141-4. Die vertrauten Formeln $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$ und $1 : (x : y) = y : x$ gelten für alle komplexen Zahlen x, y. Falls x oder y in $\mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$ sind, dann sind diese Formel nicht ohne Weiteres gültig, siehe **141-5,6,7,8,9**:

141-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

b) $1 : (x : y) = y : x$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **141-4**</u> `a)`

`1.1:` Aus →) “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **137-10**: $1 : x \in \mathbb{C}$.

`1.2:` Aus →) “$y \in \mathbb{C}$”
folgt via **137-10**: $1 : y \in \mathbb{C}$.

`2:` Es gilt: $(x = 0) \vee (y = 0) \vee ((0 \neq x) \wedge (0 \neq y))$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = 0$.

`3.1:` Aus →) “$y \in \mathbb{C}$”
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`3.2:` Aus `1.2`“$1 : y \in \mathbb{C}$”
folgt via $\in$**SZ**: $1 : y$ Zahl.

`3.3:` $1 : x \stackrel{\texttt{2.1.Fall}}{=} 1 : 0 \stackrel{\mathbf{98-24}}{=} 0$.

`4.1:` Aus `3.1`“y Zahl”
folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0$.

`4.2:` Aus `3.2`“$1 : y$ Zahl”
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (1 : y) = 0$.

`4.3:` Aus `3.3`
folgt: $1 : x = 0$.

`5:` $1 : (x \cdot y) \stackrel{\texttt{2.1.Fall}}{=} 1 : (0 \cdot y) \stackrel{\texttt{4.1}}{=} 1 : 0 \stackrel{\mathbf{98-24}}{=} 0 \stackrel{\texttt{4.2}}{=} 0 \cdot (1 : y) \stackrel{\texttt{4.3}}{=} (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

...

Beweis **141-4** `a)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $y = 0.$

`3.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via ∈**SZ**: x Zahl.

`3.2:` Aus `1.1`"$1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt via ∈**SZ**: $1 : x$ Zahl.

`3.3:` $1 : y \overset{\texttt{2.2.Fall}}{=} 1 : 0 \overset{\mathbf{98-24}}{=} 0.$

`4.1:` Aus `3.1`"x Zahl"
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0.$

`4.2:` Aus `3.2`"$1 : x$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $(1 : x) \cdot 0 = 0.$

`4.3:` Aus `3.3`
folgt: $1 : y = 0.$

`5:` $1 : (x \cdot y) \overset{\texttt{2.2.Fall}}{=} 1 : (x \cdot 0) \overset{4.1}{=} 1 : 0 \overset{\mathbf{98-24}}{=} 0 \overset{4.2}{=} (1 : x) \cdot 0 \overset{4.3}{=} (1 : x) \cdot (1 : y).$

`6:` Aus `5`
folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y).$

...

Beweis **141-4** `a)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall`“$0 \neq x \ldots$” und
aus →)“$x \in \mathbb{C}$”
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`3.2:` Aus `2.3.Fall`“$\ldots 0 \neq y$” und
aus →)“$y \in \mathbb{C}$”
folgt: $0 \neq y \in \mathbb{C}$.

`3.3:` Aus `1.1`“$1 : x \in \mathbb{C}$” und
aus `1.2`“$1 : y \in \mathbb{C}$”
folgt via ·**SZ**: $(1 : x) \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}$.

`3.4:` Aus →)“$\ldots y \in \mathbb{C}$” und
aus `1.1`“$1 : x \in \mathbb{C}$”
folgt via **AGM**ℂ: $y \cdot ((1 : y) \cdot (1 : x)) = (y \cdot (1 : y)) \cdot (1 : x)$.

`3.5:` Aus `1.1`“$1 : x \in \mathbb{C}$”
folgt via ∈**SZ**: $1 : x$ Zahl.

`4.1:` Aus `3.1`“$0 \neq x \in \mathbb{C}$”
folgt via **139-3**: $x : x = 1$.

`4.2:` Aus `3.2`“$0 \neq y \in \mathbb{C}$”
folgt via **139-3**: $y : y = 1$.

`4.3:` Aus →)“$x \in \mathbb{C} \ldots$” und
aus `3.3`“$(1 : x) \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}$”
folgt via **AGM**ℂ:

$$x \cdot (y \cdot ((1 : x) \cdot (1 : y)) = (x \cdot y) \cdot ((1 : x) \cdot (1 : y)).$$

`4.4:` Aus `3.5`“$1 : x$ Zahl”
folgt via **FSM**1: $1 \cdot (1 : x) = 1 : x$.

...

...

Beweis **141-4** `a)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.3.Fall}}$ $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

...

`5:`

$$(x \cdot y) \cdot ((1 : x) \cdot (1 : y))$$
$$\stackrel{4.3}{=} x \cdot (y \cdot ((1 : x) \cdot (1 : y))$$
$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} x \cdot (y \cdot ((1 : y) \cdot (1 : x)))$$
$$\stackrel{3.4}{=} x \cdot ((y \cdot (1 : y)) \cdot (1 : x))$$
$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x \cdot ((y : y) \cdot (1 : x))$$
$$\stackrel{4.2}{=} x \cdot (1 \cdot (1 : x))$$
$$\stackrel{4.4}{=} x \cdot (1 : x)$$
$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x : x$$
$$\stackrel{4.1}{=} 1.$$

`6:` Aus `5`“$(x \cdot y) \cdot ((1 : x) \cdot (1 : y)) = \ldots = 1$”
folgt via **FSP**1: $(1 : x) \cdot (1 : y) = 1 : (x \cdot y)$.

`7:` Aus `6`
folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

Beweis **141-4** `b)`

`1.1:` Aus →) "$y \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-10**: $1 : y \in \mathbb{C}$.

`1.2:` Aus →) "$y \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-1**: $y = 1 : (1 : y)$.

`2:` Aus →) "$x \in \mathbb{C}$" und
aus `1.1` "$1 : y \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $1 : (x \cdot (1 : y)) = (1 : x) \cdot (1 : (1 : y))$.

`3:`
$$1 : (x : y) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} 1 : (x \cdot (1 : y)) \stackrel{2}{=} (1 : x) \cdot (1 : (1 : y)) \stackrel{1.2}{=} (1 : x) \cdot y \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} y : x.$$

`4:` Aus `3`
folgt: $1 : (x : y) = y : x$.

□

141-5. Unter Vorwegnahme folgender Beispiele wird hier fest gestellt, dass die Formeln von **141-4** nicht ohne Weiteres für *nicht*-komplexe Zahlen zur Verfügung stehen:

141-5.Bemerkung

- Die Aussage
  “$((x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C})) \Rightarrow (1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y))$”
  ist nicht ohne Weiters verfügbar.

- Die Aussage
  “$((x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})) \Rightarrow (1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y))$”
  ist nicht ohne Weiters verfügbar.

- Die Aussage
  “$((x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C})) \Rightarrow (1 : (x : y) = y : x)$”
  ist nicht ohne Weiters verfügbar.

- Die Aussage
  “$((x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})) \Rightarrow (1 : (x \cdot y) = y : x)$”
  ist nicht ohne Weiters verfügbar.

141-6. Mit dem nunmehrigen Beispiel wird klar gemacht, dass aus $x \in \mathbb{B}$ und $y \in \mathbb{C}$ nicht ohne Weiteres $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$ folgt:

141-6.BEISPIEL

Es gelte:

→) $x = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

→) $y = 1 + \mathsf{i}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{B}$.

b) $y \in \mathbb{C}$.

c) $x \cdot y = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

d) $1 : x = 0$.

e) $1 : y = (1 : 2) - \mathsf{i} \cdot (1 : 2)$.

f) $1 : (x \cdot y) = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

g) $(1 : x) \cdot (1 : y) = 0$.

h) $1 : (x \cdot y) \neq (1 : x) \cdot (1 : y)$.

141-7. Mit dem nunmehrigen Beispiel wird klar gemacht, dass aus $x \in \mathbb{C}$ und $y \in \mathbb{B}$ nicht ohne Weiteres $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$ folgt:

141-7.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) $x = 1 + \mathsf{i}$.

$\rightarrow$) $y = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{C}$.

b) $y \in \mathbb{B}$.

c) $x \cdot y = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

d) $1 : x = (1 : 2) - \mathsf{i} \cdot (1 : 2)$.

e) $1 : y = 0$.

f) $1 : (x \cdot y) = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

g) $(1 : x) \cdot (1 : y) = 0$.

h) $1 : (x \cdot y) \neq (1 : x) \cdot (1 : y)$.

141-8. Mit dem nunmehrigen Beispiel wird klar gemacht, dass aus $x \in \mathbb{B}$ und $y \in \mathbb{C}$ nicht ohne Weiteres $1 : (x : y) = y : x$ folgt:

141-8.BEISPIEL

Es gelte:

→) $x = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

→) $y = 1 + \mathsf{i}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{B}$.

b) $y \in \mathbb{C}$.

c) $1 : x = 0$.

d) $1 : y = (1 : 2) - \mathsf{i} \cdot (1 : 2)$.

e) $x : y = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

f) $1 : (x : y) = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

g) $y : x = 0$.

h) $1 : (x : y) \neq y : x$.

141-9. Mit dem nunmehrigen Beispiel wird klar gemacht, dass aus $x \in \mathbb{C}$ und $y \in \mathbb{B}$ nicht ohne Weiteres $1 : (x : y) = y : x$ folgt:

<u>141-9.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) $x = 1 + \mathsf{i}$.

→) $y = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{C}$.

b) $y \in \mathbb{B}$.

c) $1 : x = (1 : 2) - \mathsf{i} \cdot (1 : 2)$.

d) $1 : y = 0$.

e) $x : y = 0$.

f) $1 : (x : y) = 0$.

g) $y : x = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

h) $1 : (x : y) \neq y : x$.

141-10. Unter Einsatz von **141-4** werden die nunmehrigen Formeln bewiesen, die im Hinblick auf **141-5(Bem)** nicht ohne Weiteres auf *nicht*-komplexe Zahlen erweiterbar sind - auch wenn dies hier nicht weiter thematisiert wird:

141-10(Satz)

Es gelte:

→) $x \in \mathbb{C}$.

→) $y \in \mathbb{C}$.

→) $z \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $x : (y \cdot z) = (x : y) : z$.

b) $x : (y \cdot z) = (x : z) : y$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **141-10**</u> `a)`

`1.1:` Aus →) “$y \in \mathbb{C}$”
folgt via **137-10**: $1 : y \in \mathbb{C}$.

`1.2:` Aus →) “$z \in \mathbb{C}$”
folgt via **137-10**: $1 : z \in \mathbb{C}$.

`1.3:` Aus →) “$y \in \mathbb{C}$” und
aus →) “$z \in \mathbb{C}$”
folgt via **141-4**: $1 : (y \cdot z) = (1 : y) \cdot (1 : z)$.

`2:` Aus →) “$x \in \mathbb{C}$” und
aus `1.2`“$1 : z \in \mathbb{C}$”
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $x \cdot ((1 : y) \cdot (1 : z)) = (x \cdot (1 : y)) \cdot (1 : z)$.

`3:`
$$x : (y \cdot z)$$
$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x \cdot (1 : (y \cdot z))$$
$$\stackrel{1.3}{=} x \cdot ((1 : y) \cdot (1 : z))$$
$$\stackrel{2}{=} (x \cdot (1 : y)) \cdot (1 : z)$$
$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (x : y) \cdot (1 : z)$$
$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (x : y) : z.$$

`4:` Aus `3`
folgt: $x : (y \cdot z) = (x : y) : z$.

`b)`

`1:` Aus →) “$x \in \mathbb{C}$”,
aus →) “$z \in \mathbb{C}$” und
aus →) “$y \in \mathbb{C}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x : (z \cdot y) = (x : z) : y$.

`2:` Via **KGM** gilt: $z \cdot y = y \cdot z$.

`3:` Aus `1`“$x : (z \cdot y) = (x : z) : y$” und
aus `2`“$z \cdot y = y \cdot z$”
folgt: $x : (y \cdot z) = (x : z) : y$.

□

141-11. Unter Einsatz von **141-4** werden die nunmehrigen Formeln bewiesen, die im Hinblick auf **141-5(Bem)** nicht ohne Weiteres auf *nicht*-komplexe Zahlen erweiterbar sind - auch wenn dies hier nicht weiter thematisiert wird:

141-11(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow)$ $y \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow)$ $z \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $x : (y : z) = (x \cdot z) : y$.

b) $x : (y : z) = z : (y : x)$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **141-11**</u> `a)`

`1.1:` Aus →) “ $y \in \mathbb{C}$ ” und
aus →) “ $z \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **141-4**: $$1 : (y : z) = z : y.$$

`1.2:` Aus →) “ $y \in \mathbb{C}$ ”
folgt via ∈**SZ**: $$y \in \mathbb{B}.$$

`2:` Aus →) “ $x \in \mathbb{C}$ ” und
aus `1.2` “ $y \in \mathbb{B}$ ”
folgt via **137-18**: $$x \cdot (z : y) = (x \cdot z) : y.$$

`3:` $$x : (y : z) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x \cdot (1 : (y : z)) \stackrel{1.1}{=} x \cdot (z : y) \stackrel{3}{=} (x \cdot z) : y.$$

`5:` Aus `4`
folgt: $$x : (y : z) = (x \cdot z) : y.$$

`b)`

`1.1:` Aus →) “ $x \in \mathbb{C}$ ” ,
aus →) “ $y \in \mathbb{C}$ ” und
aus →) “ $z \in \mathbb{C}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $$x : (y : z) = (x \cdot z) : y.$$

`1.2:` Aus →) “ $z \in \mathbb{C}$ ” ,
aus →) “ $y \in \mathbb{C}$ ” und
aus →) “ $x \in \mathbb{C}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $$z : (y : x) = (z \cdot x) : y.$$

`2:` $$x : (y : z) \stackrel{1.1}{=} (x \cdot z) : y \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (z \cdot x) : y \stackrel{1.2}{=} z : (y : x).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$x : (y : z) = z : (y : x).$$

□

141-12. Unter Einsatz von **141-4** werden die nunmehrigen Formeln bewiesen, die im Hinblick auf **141-5(Bem)** nicht ohne Weiteres auf *nicht*-komplexe Zahlen erweiterbar sind - auch wenn dies hier nicht weiter thematisiert wird:

141-12(Satz)

Es gelte:

→) $x \in \mathbb{C}$.

→) $y \in \mathbb{C}$.

→) $z \in \mathbb{C}$.

→) $w \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $(x : y) \cdot (z : w) = (x \cdot z) : (y \cdot w)$.

b) $(x : y) \cdot (z : w) = (x : w) \cdot (z : y)$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **141-12** `a)`</u>

`1.1:` Aus →) “$y \in \mathbb{C}$”
folgt via **137-10**: $1 : y \in \mathbb{C}$.

`1.2:` Aus →) “$w \in \mathbb{C}$”
folgt via **137-10**: $1 : w \in \mathbb{C}$.

`1.3:` Aus →) “$y \in \mathbb{C}$” und
aus →) “$w \in \mathbb{C}$”
folgt via **141-4**: $1 : (y \cdot w) = (1 : y) \cdot (1 : w)$.

`2:` Aus →) “$x \in \mathbb{C}$”,
aus `1.1`“$1 : y \in \mathbb{C}$”,
aus →) “$z \in \mathbb{C}$” und
aus `1.2`“$1 : w \in \mathbb{C}$”
folgt via **114-14**: $(x \cdot (1 : y)) \cdot (z \cdot (1 : w)) = (x \cdot z) \cdot ((1 : y) \cdot (1 : w))$.

`3:`
$$\begin{aligned}
&(x : y) \cdot (z : w)\\
&\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (x \cdot (1 : y)) \cdot (z : w)\\
&\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (x \cdot (1 : y)) \cdot (z \cdot (1 : w))\\
&\stackrel{2}{=} (x \cdot z) \cdot ((1 : y) \cdot (1 : w))\\
&\stackrel{1.3}{=} (x \cdot z) \cdot (1 : (y \cdot w))\\
&\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (x \cdot z) : (y \cdot w).
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $(x : y) \cdot (z : w) = (x \cdot z) : (y \cdot w)$.

Beweis **141-12** `b)`

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{C}$",
aus $\rightarrow$) "$y \in \mathbb{C}$",
aus $\rightarrow$) "$z \in \mathbb{C}$" und
aus $\rightarrow$) "$w \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x : y) \cdot (z : w) = (x \cdot z) : (y \cdot w)$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{C}$",
aus $\rightarrow$) "$w \in \mathbb{C}$",
aus $\rightarrow$) "$z \in \mathbb{C}$" und
aus $\rightarrow$) "$y \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x : w) \cdot (z : y) = (x \cdot z) : (w \cdot y)$.

`2:`
$$(x : w) \cdot (z : y) \stackrel{1.2}{=} (x \cdot z) : (w \cdot y) \stackrel{\textbf{KGM}}{=} (x \cdot z) : (y \cdot w) \stackrel{1.1}{=} (x : y) \cdot (z : w).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $(x : y) \cdot (z : w) = (x : w) \cdot (z : y)$.

□

141-13. Unter Einsatz von **141-4** werden die nunmehrigen Formeln bewiesen, die im Hinblick auf **141-5(Bem)** nicht ohne Weiteres auf *nicht*-komplexe Zahlen erweiterbar sind - auch wenn dies hier nicht weiter thematisiert wird:

141-13(Satz)

Es gelte:

→) $x \in \mathbb{C}$.

→) $y \in \mathbb{C}$.

→) $z \in \mathbb{C}$.

→) $w \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $(x : y) : (z : w) = (x \cdot w) : (y \cdot z)$.

b) $(x : y) : (z : w) = (x : z) : (y : w)$.

c) $(x : y) : (z : w) = (w : y) : (z : x)$.

d) $(x : y) : (z : w) = (w : z) : (y : x)$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **141-13**</u>

`1.1:` Aus →) “ $z \in \mathbb{C}$ ” und
aus →) “ $w \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **141-4**: $$1 : (z : w) = w : z.$$

`1.2:` Aus →) “ $y \in \mathbb{C}$ ” und
aus →) “ $w \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **141-4**: $$1 : (y : w) = w : y.$$

`1.3:` Aus →) “ $z \in \mathbb{C}$ ” und
aus →) “ $x \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **141-4**: $$1 : (z : x) = x : z.$$

`1.4:` Aus →) “ $y \in \mathbb{C}$ ” und
aus →) “ $x \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **141-4**: $$1 : (y : x) = x : y.$$

`1.5:` Aus →) “ $x \in \mathbb{C}$ ” ,
aus →) “ $y \in \mathbb{C}$ ” ,
aus →) “ $w \in \mathbb{C}$ ” und
aus →) “ $z \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **141-12**: $$(x : y) \cdot (w : z) = (x \cdot w) : (y \cdot z).$$

`1.6:` Aus →) “ $x \in \mathbb{C}$ ” ,
aus →) “ $z \in \mathbb{C}$ ” ,
aus →) “ $w \in \mathbb{C}$ ” und
aus →) “ $y \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **141-12**: $$(x : z) \cdot (w : y) = (x \cdot w) : (z \cdot y).$$

`1.7:` Aus →) “ $w \in \mathbb{C}$ ” ,
aus →) “ $y \in \mathbb{C}$ ” ,
aus →) “ $x \in \mathbb{C}$ ” und
aus →) “ $z \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **141-12**: $$(w : y) \cdot (x : z) = (w \cdot x) : (y \cdot z).$$

`1.8:` Aus →) “ $w \in \mathbb{C}$ ” ,
aus →) “ $z \in \mathbb{C}$ ” ,
aus →) “ $x \in \mathbb{C}$ ” und
aus →) “ $y \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **141-12**: $$(w : z) \cdot (x : y) = (w \cdot x) : (z \cdot y).$$

...

Beweis **141-13**

...

2: $$(x:y):(z:w)$$

$$\overset{\mathbf{136-1}}{=} (x:y)\cdot(1:(z:w))$$

$$\overset{1.1}{=} (x:y)\cdot(w:z)$$

$$\overset{1.5}{=} (x\cdot w):(y\cdot z).$$

3.a): Aus 2 folgt: $$(x:y):(z:w) = (x\cdot w):(y\cdot z).$$

4.1: $$(x:y):(z:w)$$

$$\overset{3.a)}{=} (x\cdot w):(y\cdot z)$$

$$\overset{\mathbf{KGM}}{=} (x\cdot w):(z\cdot y)$$

$$\overset{1.6}{=} (x:z)\cdot(w:y)$$

$$\overset{1.2}{=} (x:z)\cdot(1:(y:w))$$

$$\overset{\mathbf{136-1}}{=} (x:z):(y:w).$$

4.2: $$(x:y):(z:w)$$

$$\overset{3.a)}{=} (x\cdot w):(y\cdot z)$$

$$\overset{\mathbf{KGM}}{=} (w\cdot x):(y\cdot z)$$

$$\overset{1.7}{=} (w:y)\cdot(x:z)$$

$$\overset{1.3}{=} (w:y)\cdot(1:(z:x))$$

$$\overset{\mathbf{136-1}}{=} (w:y):(z:x).$$

...

<u>Beweis **141-13**</u>

...

`4.3:`

$$(x:y):(z:w)$$

$$\overset{\mathsf{3.a)}}{=} (x\cdot w):(y\cdot z)$$

$$\overset{\mathbf{KGM}}{=} (w\cdot x):(y\cdot z)$$

$$\overset{\mathbf{KGM}}{=} (w\cdot x):(z\cdot y)$$

$$\overset{\mathsf{1.8}}{=} (w:z)\cdot(x:y)$$

$$\overset{\mathsf{1.4}}{=} (w:z)\cdot(1:(y:x))$$

$$\overset{\mathbf{136-1}}{=} (w:z):(y:x).$$

`5.b):` Aus `4.1` folgt:

$$(x:y):(z:w)=(x:z):(y:w).$$

`5.c):` Aus `4.2` folgt:

$$(x:y):(z:w)=(w:y):(z:x).$$

`5.d):` Aus `4.3` folgt:

$$(x:y):(z:w)=(w:z):(y:x).$$

□

141-14. Unter Einsatz von **141-4** werden die nunmehrigen Formeln bewiesen, die im Hinblick auf **141-5(Bem)** nicht ohne Weiteres auf *nicht*-komplexe Zahlen erweiterbar sind - auch wenn dies hier nicht weiter thematisiert wird:

141-14(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $z \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow)$ $w \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $(x : y) \cdot (z : w) = (x : y) : (w : z)$.

b) $(x : y) : (z : w) = (x : y) \cdot (w : z)$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **141-14**</u>

`1.1:` Aus →) “$w \in \mathbb{C}$” und
aus →) “$z \in \mathbb{C}$”
folgt via **141-4**: $$1 : (w : z) = z : w.$$

`1.2:` Aus →) “$z \in \mathbb{C}$” und
aus →) “$w \in \mathbb{C}$”
folgt via **141-4**: $$1 : (z : w) = w : z.$$

`2.1:`
$$\begin{aligned}&(x : y) \cdot (z : w)\\ \stackrel{1.1}{=}\ &(x : y) \cdot (1 : (w : z))\\ \stackrel{\mathbf{136-1}}{=}\ &(x : y) : (w : z).\end{aligned}$$

`2.2:`
$$\begin{aligned}&(x : y) : (z : w)\\ \stackrel{\mathbf{136-1}}{=}\ &(x : y) \cdot (1 : (z : w))\\ \stackrel{1.2}{=}\ &(x : y) \cdot (w : z).\end{aligned}$$

`3.a):` Aus `2.1`
folgt: $$(x : y) \cdot (z : w) = (x : y) : (w : z).$$

`3.b):` Aus `2.2`
folgt: $$(x : y) : (z : w) = (x : y) \cdot (w : z).$$

□

141-15. In der **DivisionsKürzungsRegel** $\mathbb{C}$ werden die vertrauten Kürzungsregeln von Brüchen zusammengefasst:

141-15(Satz) (DKR$\mathbb{C}$: Divisions-KürzungsRegeln $\mathbb{C}$)

a) *Aus* "$0 \neq a \in \mathbb{C}$" *und* "$x \in \mathbb{C}$" *folgt* "$(a \cdot x) : a = x$".

b) *Aus* "$0 \neq a \in \mathbb{C}$" *und* "$x \in \mathbb{C}$" *folgt* "$a : (a \cdot x) = 1 : x$".

c) *Aus* "$0 \neq a \in \mathbb{C}$" *und* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$"
folgt "$(a \cdot x) : (a \cdot y) = x : y$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **141-15** `a)` `VS` gleich $(0 \neq a \in \mathbb{C}) \wedge (x \in \mathbb{C})$.

Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$0 \neq a \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **139-5**: $(a \cdot x) : a = x$.

`b)` `VS` gleich $(0 \neq a \in \mathbb{C}) \wedge (x \in \mathbb{C})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{C} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-10**: $a : (a \cdot x) = (a : a) : x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq a \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **139-3**: $a : a = 1$.

`2:` $(a \cdot x) : a \stackrel{1.1}{=} (a : a) : x \stackrel{1.2}{=} 1 : x$.

`3:` Aus 2
folgt: $(a \cdot x) : a = 1 : x$.

<u>Beweis **141-15**</u> `c)` `VS` gleich $(0 \neq a \in \mathbb{C}) \wedge (x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{C} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{C} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-12**: $(a : a) \cdot (x : y) = (a \cdot x) : (a \cdot y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq a \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **139-3**: $a : a = 1$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via :**SZ**: $x : y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1.3`"$x : y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x : y$ Zahl.

`3:` Aus `2`"$x : y$ Zahl"
folgt via **FSM**1: $1 \cdot (x : y) = x : y$.

`4:`
$$(a \cdot x) : (a \cdot y) \stackrel{1.1}{=} (a : a) \cdot (x : y) \stackrel{1.2}{=} 1 \cdot (x : y) \stackrel{3}{=} x : y.$$

`5:` Aus `4`
folgt: $(a \cdot x) : (a \cdot y) = x : y$.

$\square$

141-16. Nun wird die **Divisions-EliminationsRegel** bewiesen:

141-16(Satz) (DER: Divisions-EliminationsRegel)

Es gelte:

→) $x : a = y : a$.

→) $x \in \mathbb{C}$. *oder* $y \in \mathbb{C}$.

→) $0 \neq a \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{C}$.

b) $y \in \mathbb{C}$.

c) $x = y$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **141-16**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ "$0 \neq a \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-30**: $0 \neq 1 : a \in \mathbb{C}$.

`1.2:` $x \cdot (1 : a) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x : a \stackrel{\rightarrow)}{=} y : a \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} y \cdot (1 : a)$.

`2:` Aus `1.2`"$x \cdot (1 : a) = \ldots = y \cdot (1 : a)$",
aus $\rightarrow)$ "$(x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C})$" und
aus `1.1`"$0 \neq 1 : a \in \mathbb{C}$"
folgt via **MER**: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (x = y)$.

`3.a):` Aus `2`
folgt: $x \in \mathbb{C}$.

`3.b):` Aus `2`
folgt: $y \in \mathbb{C}$.

`3.c):` Aus `3`
folgt: $x = y$.

□

141-17. Nun wird die **Divisions-InversionsRegel** bewiesen:

141-17(Satz) (DIR: Divisions-InversionsRegel)

Es gelte:

→) $x : a = y$.

→) $x \in \mathbb{C}$. *oder* $y \in \mathbb{C}$.

→) $0 \neq a \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{C}$.

b) $y \in \mathbb{C}$.

c) $x = y \cdot a$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **141-17**</u>

`1.1:` Aus →) “ $0 \neq a \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **137-30**: $0 \neq 1 : a \in \mathbb{C}.$

`1.2:` Aus →) “ $0 \neq a \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **139-3**: $a : a = 1.$

`1.3:` Via **136-1** gilt: $x : a = x \cdot (1 : a).$

`2:` Aus →) “ $x : a = y$ ” und
aus `1.3` “ $x : a = x \cdot (1 : a)$ ”
folgt: $x \cdot (1 : a) = y.$

`3:` Aus `2` “ $x \cdot (1 : a) = y$ ” ,
aus →) “ $(x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C})$ ” und
aus `1.1` “ $0 \neq 1 : a \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **MIR**: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (x = y : (1 : a)).$

`4.a):` Aus `3`
folgt: $x \in \mathbb{C}.$

`4.b):` Aus `3`
folgt: $y \in \mathbb{C}.$

`4.1:` Aus `3`
folgt: $x = y : (1 : a).$

`4.2:` Aus →) “ $\ldots a \in \mathbb{C}$ ”
folgt via **141-1**: $a = 1 : (1 : a).$

`5:` $x \overset{\mathbf{4.1}}{=} y : (1 : a) \overset{\mathbf{136-1}}{=} y \cdot (1 : (1 : a)) \overset{\mathbf{4.2}}{=} y \cdot a.$

`6.c):` Aus `7`
folgt: $x = y \cdot a.$

□

141-18. Wie durch folgende Beispiele belegt ist die Gleichung $a : x = a : y$ nicht ohne Weiters unter den gleichen Voraussetzungen wie **141-16** in $x = y$ transformierbar. Ähnlich vorsichtig ist mit $a : x = y$ umzugehen, wenn hieraus x ermittelt werden soll:

141-18.Bemerkung

a) Die Aussage
"$((a : x = a : y) \wedge ((x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C})) \wedge (0 \neq a \in \mathbb{C})) \Rightarrow (x = y)$"
ist nicht ohne Weiters verfügbar.

b) Die Aussage
"$((a : x = y) \wedge ((x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C})) \wedge (0 \neq a \in \mathbb{C})) \Rightarrow (x = a : y)$"
ist nicht ohne Weiters verfügbar.

141-19. Aus dem nunmehrigen Beispiel folgt, dass **DER** nicht ohne Weiteres auf die Gleichung $a : x = a : y$ übertragbar ist:

141-19.BEISPIEL

Es gelte:

→) $x = 0$.

→) $y = +\infty$.

→) $a = 1$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{C}$.

b) $a : x = 0$.

c) $a : y = 0$

d) $a : x = a : y$.

e) $(x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C})$.

f) $0 \neq a \in \mathbb{C}$.

g) $x \neq y$.

141-20. Aus dem nunmehrigen Beispiel folgt, dass **DIR** nicht ohne Weiteres auf die Gleichung $a : x = y$ übertragbar ist:

141-20.BEISPIEL

Es gelte:

→) $x = +\infty$.

→) $y = 0$.

→) $a = 1$.

Dann folgt:

a) $y \in \mathbb{C}$.

b) $a : x = 0$.

c) $a : y = 0$.

d) $a : x = y$.

e) $(x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C})$.

f) $0 \neq a \in \mathbb{C}$.

g) $x \neq a : y$.

141-21. Wie aus **141-19(BSP)** ersichtlich, scheitert die Überführung von **DER** auf $a : x = a : y$ mitunter in jenen Fällen, in denen $x = 0$ und $y \notin \mathbb{C}$ - oder $x \notin \mathbb{C}$ und $y = 0$ unter Vertauschung der Rollen von x und y - ist. In gewissem Sinn sind dies auch die einzigen Fälle, in denen etwas schief gehen kann:

141-21(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $a : x = a : y$.

$\rightarrow)$
$0 \neq x \in \mathbb{C}$.

oder

$0 \neq y \in \mathbb{C}$.

oder

$(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

$\rightarrow)$ $0 \neq a \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{C}$.

b) $y \in \mathbb{C}$.

c) $x = y$.

RECH-**Notation**.

Beweis **141-21**

1: $$(1 : x) \cdot a \overset{\mathbf{136-1}}{=} a : x \overset{\rightarrow)}{=} a : y \overset{\mathbf{136-1}}{=} (1 : y) \cdot a.$$

2.1: Nach $\rightarrow)$ gilt: $$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \vee (0 \neq y \in \mathbb{C}) \vee ((x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

<u>Beweis **141-21**</u>

...

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`3.1:` Aus `2.1.1.Fall`“$0 \neq x \in \mathbb{C}$”
folgt via **139-3**: $x : x = 1$.

`3.2:` Aus `2.1.1.Fall`“$0 \neq x \in \mathbb{C}$”
folgt via **137-30**: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `1`“$(1 : x) \cdot a = \ldots = (1 : y) \cdot a$”,
aus `3.2`“$\ldots 1 : x \in \mathbb{C}$” und
aus →) “$0 \neq a \in \mathbb{C}$”
folgt via **MER**: $1 : x = 1 : y$.

`5:` Aus `3.2`“$0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$” und
aus `4`“$1 : x = 1 : y$”
folgt: $0 \neq 1 : y \in \mathbb{C}$.

`6:` Aus `5`“$0 \neq 1 : y \in \mathbb{C}$”
folgt via **137-30**: $0 \neq y \in \mathbb{C}$.

`7:` Aus `4`“$1 : x = 1 : y$”,
aus `2.1.1.Fall`“$\ldots x \in \mathbb{C}$” und
aus `6`“$\ldots y \in \mathbb{C}$”
folgt via **141-3**: $x = y$.

`8:` Aus `2.1.1.Fall`“$\ldots x \in \mathbb{C}$”,
aus `6`“$\ldots y \in \mathbb{C}$” und
aus `7`“$x = y$”
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (x = y)$.

...

Beweis **141-21**

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.1.2.Fall` $0 \neq y \in \mathbb{C}$.

`3.1:` Aus `2.1.2.Fall`"$0 \neq y \in \mathbb{C}$"
folgt via **139-3**: $y : y = 1$.

`3.2:` Aus `2.1.2.Fall`"$0 \neq y \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-30**: $0 \neq 1 : y \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `1`"$(1 : x) \cdot a = \ldots = (1 : y) \cdot a$",
aus `3.2`"$\ldots 1 : y \in \mathbb{C}$" und
aus →) "$0 \neq a \in \mathbb{C}$"
folgt via **MER**: $1 : x = 1 : y$.

`5:` Aus `3.2`"$0 \neq 1 : y \in \mathbb{C}$" und
aus `4`"$1 : x = 1 : y$"
folgt: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$.

`6:` Aus `5`"$0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-30**: $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`7:` Aus `4`"$1 : x = 1 : y$",
aus `6`"$\ldots x \in \mathbb{C}$" und
aus `2.1.2.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-3**: $x = y$.

`8:` Aus `6`"$\ldots x \in \mathbb{C}$",
aus `2.1.2.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{C}$" und
aus `7`"$x = y$"
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (x = y)$.

...

<u>Beweis **141-21**</u>

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.1.3.Fall}}$ $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`3:` Aus `2.1.3.Fall`"$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **137-10**: $1 : x \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `1`"$(1 : x) \cdot a = \ldots = (1 : y) \cdot a$",
aus `3`"$1 : x \in \mathbb{C}$" und
aus →) "$0 \neq a \in \mathbb{C}$"
folgt via **MER**: $1 : x = 1 : y$.

`5:` Aus `4`"$1 : x = 1 : y$",
aus `2.1.3.Fall`"$x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `2.1.3.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-3**: $x = y$.

`6:` Aus `2.1.3.Fall`"$x \in \mathbb{C} \ldots$",
aus `2.1.3.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{C}$" und
aus `5`"$x = y$"
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (x = y)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (x = y)\text{”}}$

`2.a):` Aus `A1`
folgt: $x \in \mathbb{C}$.

`2.b):` Aus `A1`
folgt: $y \in \mathbb{C}$.

`2.c):` Aus `A1`
folgt: $x = y$.

□

141-22. Wie aus **141-20(BSP)** ersichtlich, scheitert die Überführung von **DIR** auf $a : x = y$ mitunter in jenen Fällen, in denen $x \notin \mathbb{C}$ und $y = 0$ ist. In gewissem Sinn sind dies auch die einzigen Fälle, in denen etwas schief gehen kann:

141-22(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $a : x = y$.

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{C}$. *oder* $0 \neq y \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow)$ $0 \neq a \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{C}$.

b) $y \in \mathbb{C}$.

c) $x = a : y$.

RECH-**Notation**.

Beweis **141-22**

1: $$(1 : x) \cdot a \overset{\mathbf{136-1}}{=} a : x \overset{\rightarrow)}{=} y.$$

2.1: Nach $\rightarrow)$ gilt: $$(x \in \mathbb{C}) \vee (0 \neq y \in \mathbb{C}).$$

Fallunterscheidung

...

Beweis **141-22**

...

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $x \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2.1.1.Fall` "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-10**: $1 : x \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `1` "$(1 : x) \cdot a = \ldots = y$",
aus `3` "$1 : x \in \mathbb{C}$" und
aus →) "$0 \neq a \in \mathbb{C}$"
folgt via **MIR**: $(y \in \mathbb{C}) \wedge (1 : x = y : a)$.

`5.1:` Aus `2.1.1.Fall` "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-1**: $x = 1 : (1 : x)$.

`5.2:` Aus `4` "$y \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus →) "$\ldots a \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-4**: $1 : (y : a) = a : y$.

`5.3:` Aus `4`
folgt: $1 : x = y : a$.

`6:` $x \stackrel{5.1}{=} 1 : (1 : x) \stackrel{5.3}{=} 1 : (y : a) \stackrel{5.2}{=} a : y$.

`7:` Aus `2.1.1.Fall` "$x \in \mathbb{C}$",
aus `4` "$y \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `6` "$x = \ldots = a : y$"
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (x = a : y)$.

...

Beweis **141-22**

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.1.2.Fall}}$ $0 \neq y \in \mathbb{C}$.

`3.1:` Aus `1`“$(1 : x) \cdot a = \ldots = y$”,
aus `2.1.2.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{C}$” und
aus →)“$0 \neq a \in \mathbb{C}$”
folgt via **MIR**: $(1 : x \in \mathbb{C}) \wedge (1 : x = y : a)$.

`3.2:` Aus →)“$0 \neq a \in \mathbb{C}$”
folgt via **137-30**: $0 \neq 1 : a \in \mathbb{C}$.

`4.1:` Aus `2.1.2.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{C}$” und
aus →)“$\ldots a \in \mathbb{C}$”
folgt via **141-4**: $1 : (y : a) = a : y$.

`4.2:` Aus `2.1.2.Fall`“$0 \neq y \ldots$” und
aus `3.2`“$0 \neq 1 : a \ldots$”
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $0 \neq y \cdot (1 : a)$.

`4.3:` Aus `3.1`
folgt: $1 : x = y : a$.

`5:` Via **136-1** gilt: $y : a = y \cdot (1 : a)$.

`6:` Aus `4.2`“$0 \neq y \cdot (1 : a)$” und
aus `5`“$y : a = y \cdot (1 : a)$”
folgt: $0 \neq y : a$.

`7:` Aus `4.3`“$1 : x = y : a$” und
aus `6`“$0 \neq y : a$”
folgt: $0 \neq 1 : x$.

`8:` Aus `7`“$0 \neq 1 : x$” und
aus `3.1`“$1 : x \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$.

`9:` Aus `8`“$0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$”
folgt via **137-30**: $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`10:` Aus `9`“$\ldots x \in \mathbb{C}$”
folgt via **141-1**: $x = 1 : (1 : x)$.

`11:` $x \overset{10}{=} 1 : (1 : x) \overset{4.3}{=} 1 : (y : a) \overset{4.1}{=} a : y$.

`12:` Aus `9`“$\ldots x \in \mathbb{C}$”,
aus `2.1.2.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{C}$” und
aus `11`“$x = \ldots = a : y$”
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (x = a : y)$.

...

<u>Beweis **141-22**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (x = a : y)$"

`2.a):` Aus `A1` folgt: $x \in \mathbb{C}$.

`2.b):` Aus `A1` folgt: $y \in \mathbb{C}$.

`2.c):` Aus `A1` folgt: $x = a : y$.

□

$\leq$ _Intervalle.

Ersterstellung: 29/07/10 **Letzte Änderung: 16/03/12**

142-1. Die in **#41** eingeführten M_Intervalle werden nun für $M = \leq$ spezifiziert und mit eigenen Symbolen versehen. Auf eine eigene Namensgebung wird verzichtet, so dass etwa $]a|b[$ das "offene $\leq$_Intervall von a bis b" ist:

142-1(Definition)

1) $[a|b] = [a \overset{\leq}{|} b]$.

2) $]a|b[=]a \overset{\leq}{|} b[$.

3) $]a|b] =]a \overset{\leq}{|} b]$.

4) $[a|b[= [a \overset{\leq}{|} b[$.

142-2. Mit dem hier vorliegenden Satz wird klar gemacht, warum auf andere als in **142-1(Def)** eingeführte $\leq$-Intervalle verzichtet werden kann:

142-2(Satz)

a) $[a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle = [a| + \infty]$.

b) $]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle =]a| + \infty]$.

c) $\langle\cdot \overset{\leq}{|} b] = [-\infty|b]$.

d) $\langle\cdot \overset{\leq}{|} b[= [-\infty|b[$.

e) $\langle\cdot \overset{\leq}{|} \cdot\rangle = \mathbb{S}$.

Beweis **142-2**

$\leq$-Notation.

---

a)

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\gamma \in [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$.

2: Aus Thema1.1 "$\gamma \in [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: $a \leq \gamma$.

3: Aus 2 "$a \leq \gamma$"
folgt via **107-3**: $\gamma \in \mathbb{S}$.

4: Aus 3 "$\gamma \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $\gamma \leq +\infty$.

5: Aus 2 "$a \leq \gamma$" und
aus 4 "$\gamma \leq +\infty$"
folgt via **41-25**: $\gamma \in [a \overset{\leq}{|} +\infty]$.

6: Via **142-1(Def)** gilt: $[a \overset{\leq}{|} +\infty] = [a| + \infty]$.

7: Aus 5 "$\gamma \in [a \overset{\leq}{|} +\infty]$" und
aus 6 "$[a \overset{\leq}{|} +\infty] = [a| + \infty]$"
folgt: $\gamma \in [a| + \infty]$.

Ergo Thema1.1: $\forall \gamma : (\gamma \in [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\gamma \in [a| + \infty])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \Big| \text{ "} [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle \subseteq [a| + \infty] \text{ "}}$

...

Beweis **142-2** a)

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\gamma \in [a| + \infty]$.

2: Via **142-1(Def)** gilt: $[a| + \infty] = [a \overset{\leq}{|} +\infty]$.

3: Aus Thema1.2 "$\gamma \in [a| + \infty]$" und

aus 2 "$[a| + \infty] = [a \overset{\leq}{|} +\infty]$"

folgt: $\gamma \in [a \overset{\leq}{|} +\infty]$.

4: Aus 3 "$\gamma \in [a \overset{\leq}{|} +\infty]$"
folgt via **41-25**: $a \leq \gamma$.

5: Aus 4 "$a \leq \gamma$"

folgt via **41-25**: $\gamma \in [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$.

Ergo Thema1.2: $\forall \gamma : (\gamma \in [a| + \infty]) \Rightarrow (\gamma \in [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \Big| \text{ "} [a| + \infty] \subseteq [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle \text{"}}$

2: Aus A1 gleich "$[a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle \subseteq [a| + \infty]$" und

aus A2 gleich "$[a| + \infty] \subseteq [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $[a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle = [a| + \infty]$.

Beweis **142-2** `b)`

`Thema1.1` $\gamma \in]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\gamma \in]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **41-25**: $a < \gamma$.

`3:` Aus `2`“$a < \gamma$”
folgt via **107-9**: $\gamma \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3`“$\gamma \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-5**: $\gamma \leq +\infty$.

`5:` Aus `2`“$a < \gamma$” und
aus `4`“$\gamma \leq +\infty$”
folgt via **41-25**: $\gamma \in]a \overset{\leq}{|} +\infty]$.

`6:` Via **142-1(Def)** gilt: $]a \overset{\leq}{|} +\infty] =]a| + \infty]$.

`7:` Aus `5`“$\gamma \in]a \overset{\leq}{|} +\infty]$” und
aus `6`“$]a \overset{\leq}{|} +\infty] =]a| + \infty]$”
folgt: $\gamma \in]a| + \infty]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \gamma : (\gamma \in]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle) \Rightarrow (\gamma \in]a| + \infty])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle \subseteq]a| + \infty]$”

...

<u>Beweis **142-2** `b)`</u>

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\gamma \in \,]a\| + \infty]$.
`2:` Via **142-1(Def)** gilt:	$]a\| + \infty] = \,]a \overset{\le}{\|} +\infty]$.
`3:` Aus `Thema1.2`“$\gamma \in \,]a\| + \infty]$” und aus `2`“$]a\| + \infty] = \,]a \overset{\le}{\|} +\infty]$” folgt:	$\gamma \in \,]a \overset{\le}{\|} +\infty]$.
`4:` Aus `3`“$\gamma \in \,]a \overset{\le}{\|} +\infty]$” folgt via **41-25**:	$a < \gamma$.
`5:` Aus `4`“$a < \gamma$” folgt via **41-25**:	$\gamma \in \,]a \overset{\le}{\|} \cdot\rangle$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \gamma : (\gamma \in \,]a| + \infty]) \Rightarrow (\gamma \in \,]a \overset{\le}{|} \cdot\rangle)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \big| \text{“}]a| + \infty] \subseteq \,]a \overset{\le}{|} \cdot\rangle \text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich “$]a \overset{\le}{|} \cdot\rangle \subseteq \,]a| + \infty]$” und
aus `A2` gleich “$]a| + \infty] \subseteq \,]a \overset{\le}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $]a \overset{\le}{|} \cdot\rangle = \,]a| + \infty]$.

<u>Beweis **142-2** `c)`</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\gamma \in \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\gamma \in \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$”
folgt via **41-25**: $\gamma \leq b$.

`3:` Aus `2`“$\gamma \leq b$”
folgt via **107-3**: $\gamma \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3`“$\gamma \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-5**: $-\infty \leq \gamma$.

`5:` Aus `4`“$-\infty \leq \gamma$” und
aus `2`“$\gamma \leq b$”
folgt via **41-25**: $\gamma \in [-\infty \overset{\leq}{|} b]$.

`6:` Via **142-1(Def)** gilt: $[-\infty \overset{\leq}{|} b] = [-\infty|b]$.

`7:` Aus `5`“$\gamma \in [-\infty \overset{\leq}{|} b]$” und
aus `6`“$[-\infty \overset{\leq}{|} b] = [-\infty|b]$”
folgt: $\gamma \in [-\infty|b]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\gamma : (\gamma \in \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]) \Rightarrow (\gamma \in [-\infty|b])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1}\Big|\ “\langle\cdot \overset{\leq}{|} b] \subseteq [-\infty|b]”}$

...

Beweis **142-2** `c)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\gamma \in [-\infty|b]$.

`2:` Via **142-1(Def)** gilt: $[-\infty|b] = [-\infty \overset{\le}{|} b]$.

`3:` Aus `Thema1.2`“$\gamma \in [-\infty|b]$” und

aus `2`“$[-\infty|b] = [-\infty \overset{\le}{|} b]$”

folgt: $\gamma \in [-\infty \overset{\le}{|} b]$.

`4:` Aus `3`“$\gamma \in [-\infty \overset{\le}{|} b]$”
folgt via **41-25**: $\gamma \le b$.

`5:` Aus `4`“$\gamma \le b$”

folgt via **41-25**: $\gamma \in \langle\cdot \overset{\le}{|} b]$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \gamma : (\gamma \in [-\infty|b]) \Rightarrow (\gamma \in \langle\cdot \overset{\le}{|} b])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\Big|\, \text{“} [-\infty|b] \subseteq \langle\cdot \overset{\le}{|} b] \text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich “$\langle\cdot \overset{\le}{|} b] \subseteq [-\infty|b]$” und

aus `A2` gleich “$[-\infty|b] \subseteq \langle\cdot \overset{\le}{|} b]$”

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\langle\cdot \overset{\le}{|} b] = [-\infty|b]$.

<u>Beweis</u> **142-2** `d)`

`Thema1.1` $\gamma \in \langle\cdot \overset{\leq}{|}\, b[$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in \langle\cdot \overset{\leq}{|}\, b[$"
folgt via **41-25**: $\gamma < b$.

`3:` Aus `2`"$\gamma < b$"
folgt via **107-9**: $\gamma \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3`"$\gamma \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $-\infty \leq \gamma$.

`5:` Aus `4`"$-\infty \leq \gamma$" und
aus `2`"$\gamma < b$"
folgt via **41-25**: $\gamma \in [-\infty \overset{\leq}{|}\, b[$.

`6:` Via **142-1(Def)** gilt: $[-\infty \overset{\leq}{|}\, b[= [-\infty|b[$.

`7:` Aus `5`"$\gamma \in [-\infty \overset{\leq}{|}\, b[$" und
aus `6`"$[-\infty \overset{\leq}{|}\, b[= [-\infty|b[$"
folgt: $\gamma \in [-\infty|b[$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \gamma : (\gamma \in \langle\cdot \overset{\leq}{|}\, b[) \Rightarrow (\gamma \in [-\infty|b[)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\langle\cdot \overset{\leq}{|}\, b[\subseteq [-\infty|b[$"

...

<u>Beweis **142-2** `d)`</u>

...

`Thema1.2` $\qquad \gamma \in [-\infty|b[.$

2: Via **142-1(Def)** gilt: $\qquad [-\infty|b[= [-\infty \overset{\leq}{|} b[.$

3: Aus `Thema1.2` "$\gamma \in [-\infty|b[$" und

aus 2 "$[-\infty|b[= [-\infty \overset{\leq}{|} b[$"

folgt: $\qquad \gamma \in [-\infty \overset{\leq}{|} b[.$

4: Aus 3 "$\gamma \in [-\infty \overset{\leq}{|} b[$"

folgt via **41-25**: $\qquad \gamma < b.$

5: Aus 4 "$\gamma < b$"

folgt via **41-25**: $\qquad \gamma \in \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[.$

Ergo `Thema1.2`: $\qquad \forall\gamma : (\gamma \in [-\infty|b[) \Rightarrow (\gamma \in \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad \boxed{\texttt{A2} \,\Big|\, \text{"}[-\infty|b[\subseteq \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[\text{"}}$

2: Aus `A1` gleich "$\langle\cdot \overset{\leq}{|} b[\subseteq [-\infty|b[$" und

aus `A2` gleich "$[-\infty|b[\subseteq \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\qquad \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[= [-\infty|b[.$

<u>Beweis **142-2**</u> `e)`

`1.1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-14**: $\mathsf{dom}\,(\leq) = \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-14**: $\mathsf{ran}\,(\leq) = \mathbb{S}$.

`2:`
$$\langle\cdot \overset{\leq}{|} \cdot\rangle \overset{\mathbf{41-18(Def)}}{=} \mathsf{dom}\,(\leq) \cup \mathsf{ran}\,(\leq) \overset{1.1}{=} \mathbb{S} \cup \mathsf{ran}\,(\leq) \overset{1.2}{=} \mathbb{S} \cup \mathbb{S} \overset{\mathbf{2-14}}{=} \mathbb{S}.$$

`3:` Aus `2`
folgt: $\langle\cdot \overset{\leq}{|} \cdot\rangle = \mathbb{S}$.

$\square$

142-3. Nun wird eine Auflistung von Kriterien für die Zugehörigkeit zu den in **142-1(Def)** eingeführten $\leq$ _Intervallen gegeben. Dabei wird zu einem großen Teil auf **41-25** zurück gegriffen. Den Zahlen $\pm\infty$ kommen Sonderrollen zu:

142-3(Satz)

a) *“$p \in [a|b]$” genau dann, wenn “$a \leq p \leq b$”.*

b) *“$p \in [a|+\infty]$” genau dann, wenn “$a \leq p$”.*

c) *“$p \in [-\infty|b]$” genau dann, wenn “$p \leq b$”.*

d) *“$p \in [-\infty|+\infty]$” genau dann, wenn “$p \in \mathbb{S}$”.*

e) *“$p \in]a|b[$” genau dann, wenn “$a < p < b$”.*

f) *“$p \in]a|+\infty[$” genau dann, wenn “$a < p \in \mathbb{R}$”.*

g) *“$p \in]-\infty|b[$” genau dann, wenn “$\mathbb{R} \ni p < b$”.*

h) *“$p \in]-\infty|+\infty[$” genau dann, wenn “$p \in \mathbb{R}$”.*

i) *“$p \in]a|b]$” genau dann, wenn “$a < p \leq b$”.*

j) *“$p \in]a|+\infty]$” genau dann, wenn “$a < p$”.*

k) *“$p \in]-\infty|b]$” genau dann, wenn “$-\infty < p \leq b$”.*

l) *“$p \in]-\infty|+\infty]$” genau dann, wenn “$-\infty < p$”.*

m) *“$p \in [a|b[$” genau dann, wenn “$a \leq p < b$”.*

n) *“$p \in [a|+\infty[$” genau dann, wenn “$a \leq p < +\infty$”.*

o) *“$p \in [-\infty|b[$” genau dann, wenn “$p < b$”.*

p) *“$p \in [-\infty|+\infty[$” genau dann, wenn “$p < +\infty$”.*

$\leq$-Notation.

Beweis **142-3** `a)`

`1:` Via **142-1(Def)** gilt: $[a|b] = [a \overset{\leq}{|} b]$.

`2:` Via **41-25** gilt: $(p \in [a \overset{\leq}{|} b]) \Leftrightarrow ((a \leq p) \wedge (p \leq b))$.

`3:` Aus `1` „ $[a|b] = [a \overset{\leq}{|} b]$ " und
aus `2` „ $(p \in [a \overset{\leq}{|} b]) \Leftrightarrow ((a \leq p) \wedge (p \leq b))$ "
folgt: $(p \in [a|b]) \Leftrightarrow ((a \leq p) \wedge (p \leq b))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(p \in [a|b]) \Leftrightarrow (a \leq p \leq b)$.

`b)`

`1:` Via **142-2** gilt: $[a| + \infty] = [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Via **41-25** gilt: $(p \in [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle) \Leftrightarrow (a \leq p)$.

`3:` Aus `1` „ $[a| + \infty] = [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$ " und
aus `2` „ $(p \in [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle) \Leftrightarrow (a \leq p)$ "
folgt: $(p \in [a| + \infty]) \Leftrightarrow (a \leq p)$.

`c)`

`1:` Via **142-2** gilt: $[-\infty|b] = \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$.

`2:` Via **41-25** gilt: $(p \in \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]) \Leftrightarrow (p \leq b)$.

`3:` Aus `1` „ $[-\infty|b] = \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$ " und
aus `2` „ $(p \in \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]) \Leftrightarrow (p \leq b)$ "
folgt: $(p \in [-\infty|b]) \Leftrightarrow (p \leq b)$.

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:
$(p \in [-\infty| + \infty]) \Leftrightarrow (-\infty \leq p \leq +\infty)$.

`2:` Via **107-5** gilt: $(p \in \mathbb{S}) \Leftrightarrow (-\infty \leq p \leq +\infty)$.

`3:` Aus `1` „ $(p \in [-\infty| + \infty]) \Leftrightarrow (-\infty \leq p \leq +\infty)$ " und
aus `2` „ $(p \in \mathbb{S}) \Leftrightarrow (-\infty \leq p \leq +\infty)$ "
folgt: $(p \in [-\infty| + \infty]) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{S})$.

Beweis **142-3** `e)`

1: Via **142-1(Def)** gilt: $]a|b[=]a \overset{\leq}{|} b[.$

2: Via **41-25** gilt: $(p \in]a \overset{\leq}{|} b[) \Leftrightarrow ((a < p) \wedge (p < b)).$

3: Aus 1“$]a|b[=]a \overset{\leq}{|} b[$” und
aus 2“$(p \in]a \overset{\leq}{|} b[) \Leftrightarrow ((a < p) \wedge (p < b))$”
folgt: $(p \in]a|b[) \Leftrightarrow ((a < p) \wedge (p < b)).$

4: Aus 3
folgt: $(p \in]a|b[) \Leftrightarrow (a < p < b).$

`f)` $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $p \in]a| + \infty[.$

1: Aus VS gleich “$p \in]a| + \infty[$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $a < p < +\infty.$

2: Aus 1“$a < p < +\infty$”
folgt via **107-12**: $p \in \mathbb{R}.$

3: Aus 1“$a < p \ldots$” und
aus 2“$p \in \mathbb{R}$”
folgt: $a < p \in \mathbb{R}.$

`f)` $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $a < p \in \mathbb{R}.$

1: Aus VS gleich “$\ldots p \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAVII**: $p < +\infty.$

2: Aus VS gleich “$a < p \ldots$” und
aus 1“$p < +\infty$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $p \in]a| + \infty[.$

`g)` $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $p \in] - \infty|b[.$

1: Aus VS gleich “$p \in] - \infty|b[$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $-\infty < p < b.$

2: Aus 1“$-\infty < p < b$”
folgt via **107-12**: $p \in \mathbb{R}.$

3: Aus 2“$p \in \mathbb{R}$” und
aus 1“$\ldots p < b$”
folgt: $\mathbb{R} \ni p < b.$

<u>Beweis</u> **142-3** `g)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\mathbb{R} \ni p < b.$

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathbb{R} \ni p \ldots$"
folgt: $p \in \mathbb{R}.$

`2:` Aus `1`"$p \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < p.$

`3:` Aus `1`"$-\infty < p$" und
aus `VS` gleich "$p < b \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $p \in \,]-\infty|b[.$

`h)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \in \,]-\infty|+\infty[.$

Aus `VS` gleich "$p \in \,]-\infty|+\infty[$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $p \in \mathbb{R}.$

`h)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $p \in \mathbb{R}.$

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < p < +\infty.$

`2:` Aus `1`"$-\infty < p < +\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $p \in \,]-\infty|+\infty[.$

`i)`

`1:` Via **142-1(Def)** gilt: $]a|b] = \,]a \overset{\leq}{|} b].$

`2:` Via **41-25** gilt: $(p \in \,]a \overset{\leq}{|} b]) \Leftrightarrow ((a < p) \wedge (p \leq b)).$

`3:` Aus `1`"$]a|b] = \,]a \overset{\leq}{|} b]$" und
aus `2`"$(p \in \,]a \overset{\leq}{|} b]) \Leftrightarrow ((a < p) \wedge (p \leq b))$"
folgt: $(p \in \,]a|b]) \Leftrightarrow ((a < p) \wedge (p \leq b)).$

`4:` Aus `3`
folgt: $(p \in \,]a|b]) \Leftrightarrow (a < p \leq b).$

Beweis **142-3** `j)`

`1:` Via **142-2** gilt: $$]a|+\infty] =]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle.$$

`2:` Via **41-25** gilt: $$(p \in]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle) \Leftrightarrow (a < p).$$

`3:` Aus `1`“ $]a|+\infty] =]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$ ” und
aus `2`“ $(p \in]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle) \Leftrightarrow (a < p)$ ”
folgt: $$(p \in]a|+\infty]) \Leftrightarrow (a < p).$$

`k)`

Via des bereits bewiesenen `i)` gilt: $$(p \in]-\infty|b]) \Leftrightarrow (-\infty < p \leq b).$$

`l)`

Via des bereits bewiesenen `j)` gilt: $$(p \in]-\infty|+\infty]) \Leftrightarrow (-\infty < p).$$

`m)`

`1:` Via **142-1(Def)** gilt: $$[a|b[= [a \overset{\leq}{|} b[.$$

`2:` Via **41-25** gilt: $$(p \in [a \overset{\leq}{|} b[) \Leftrightarrow ((a \leq p) \wedge (p < b)).$$

`3:` Aus `1`“ $[a|b[= [a \overset{\leq}{|} b[$ ” und
aus `2`“ $(p \in [a \overset{\leq}{|} b[) \Leftrightarrow ((a \leq p) \wedge (p < b))$ ”
folgt: $$(p \in [a|b[) \Leftrightarrow ((a \leq p) \wedge (p < b)).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $$(p \in [a|b[) \Leftrightarrow (a \leq p < b).$$

`n)`

Via des bereits bewiesenen `m)` gilt: $$(p \in [a|+\infty[) \Leftrightarrow (a \leq p < +\infty).$$

`o)`

`1:` Via **142-2** gilt: $$[-\infty|b[= \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[.$$

`2:` Via **41-25** gilt: $$(p \in \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[) \Leftrightarrow (p < b).$$

`3:` Aus `1`“ $[-\infty|b[= \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[$ ” und
aus `2`“ $(p \in \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[) \Leftrightarrow (p < b)$ ”
folgt: $$(p \in [-\infty|b[) \Leftrightarrow (p < b).$$

<u>Beweis **142-3** `p)`</u>

Via des bereits bewiesenen `o)` gilt: $(p \in [\![-\infty|+\infty[\![) \Leftrightarrow (p < +\infty).$

$\square$

142-4. Jedes $\leq$ _Intervall ist eine TeilKlasse von $\mathbb{S}$. Ferner gilt $]-\infty|+\infty[\,=\mathbb{R}$ und $[-\infty|+\infty]=\mathbb{S}$:

142-4(Satz)

a) $[a|b]\subseteq\mathbb{S}$.

b) $]a|b[\,\subseteq\mathbb{R}$.

c) $]a|b[\,\subseteq\mathbb{S}$.

d) $]a|b]\subseteq\mathbb{S}$.

e) $[a|b[\,\subseteq\mathbb{S}$.

f) $]-\infty|+\infty[\,=\mathbb{R}$.

g) $[-\infty|+\infty]=\mathbb{S}$.

h) *Aus "I ist $\leq$_Intervall" folgt "$I\subseteq\mathbb{S}$".*

Beweis **142-4**

$\leq$-Notation.

a)

`Thema1` $\gamma\in[a|b]$.

2: Aus `Thema1` "$\gamma\in[a|b]$" folgt via **142-3**: $a\leq\gamma$.

3: Aus 2 "$a\leq\gamma$" folgt via **107-3**: $\gamma\in\mathbb{S}$.

Ergo `Thema1`: $\forall\gamma:(\gamma\in[a|b])\Rightarrow(\gamma\in\mathbb{S})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $[a|b]\subseteq\mathbb{S}$.

<u>Beweis **142-4**</u> `b)`

`Thema1`	$\gamma \in]a\|b[$.
`2:` Aus `Thema1`"$\gamma \in]a\|b[$" folgt via **142-3**:	$a < \gamma < b$.
`3:` Aus `2`"$a < \gamma < b$" folgt via **107-12**:	$\gamma \in \mathbb{R}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in]a|b[) \Rightarrow (\gamma \in \mathbb{R})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $]a|b[\subseteq \mathbb{R}$.

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $]a|b[\subseteq \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$]a|b[\subseteq \mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $]a|b[\subseteq \mathbb{S}$.

`d)`

`Thema1`	$\gamma \in]a\|b]$.
`2:` Aus `Thema1`"$\gamma \in]a\|b]$" folgt via **142-3**:	$\gamma \le b$.
`3:` Aus `2`"$\gamma \le b$" folgt via **107-3**:	$\gamma \in \mathbb{S}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in]a|b]) \Rightarrow (\gamma \in \mathbb{S})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $]a|b] \subseteq \mathbb{S}$.

Beweis **142-4** `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\gamma \in [a\|b[$.
`2:` Aus `Thema1`"$\gamma \in [a\|b[$" folgt via **142-3**:	$a \leq \gamma$.
`3:` Aus 2"$a \leq \gamma$" folgt via **107-3**:	$\gamma \in \mathbb{S}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in [a|b[) \Rightarrow (\gamma \in \mathbb{S})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $[a|b[\subseteq \mathbb{S}$.

`f)`

`1:` Via **142-3** gilt: $(p \in]-\infty|+\infty[) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{R})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in]-\infty|+\infty[) \Leftrightarrow (\alpha \in \mathbb{R})$.

`3:` Aus 2"$\forall \alpha : (\alpha \in]-\infty|+\infty[) \Leftrightarrow (\alpha \in \mathbb{R})$"
folgt via **0-8**: $]-\infty|+\infty[= \mathbb{R}$.

`g)`

`1:` Via **142-3** gilt: $(p \in [-\infty|+\infty]) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{S})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in [-\infty|+\infty]) \Leftrightarrow (\alpha \in \mathbb{S})$.

`3:` Aus 2"$\forall \alpha : (\alpha \in [-\infty|+\infty]) \Leftrightarrow (\alpha \in \mathbb{S})$"
folgt via **0-8**: $[-\infty|+\infty] = \mathbb{S}$.

`h)` `VS` gleich I ist $\leq$_Intervall.

`1:` Aus `VS` gleich "I ist $\leq$_Intervall"
folgt via **41-26**: $I \subseteq \langle \cdot \overset{\leq}{|} \cdot \rangle$.

`2:` Aus `1`"$I \subseteq \langle \cdot \overset{\leq}{|} \cdot \rangle$" und
aus **142-2**"$\langle \cdot \overset{\leq}{|} \cdot \rangle = \mathbb{S}$"
folgt: $I \subseteq \mathbb{S}$.

$\square$

142-5. Für $\leq$-Intervalle stehen die hier vorliegenden Inklusionen zur Verfügung. Beim Beweis wird gelegentlich auf **41-27** zurück gegriffen:

142-5(Satz)

a) $[a|b] \subseteq [a|+\infty]$ *und* $[a|b] \subseteq [-\infty|b]$.

b) $]a|b[\subseteq [a|b]$ *und* $]a|b[\subseteq]a|b]$ *und* $]a|b[\subseteq [a|b[$

und $]a|b[\subseteq [a|+\infty]$ *und* $]a|b[\subseteq]a|+\infty]$

und $]a|b[\subseteq [a|+\infty[$ *und* $]a|b[\subseteq]a|+\infty[$

und $]a|b[\subseteq [-\infty|b]$ *und* $]a|b[\subseteq [-\infty|b[$

und $]a|b[\subseteq]-\infty|b]$ *und* $]a|b[\subseteq]-\infty|b[$.

c) $]a|b] \subseteq [a|b]$

und $]a|b] \subseteq [a|+\infty]$ *und* $]a|b] \subseteq]a|+\infty]$

und $]a|b] \subseteq [-\infty|b]$ *und* $]a|b] \subseteq]-\infty|b]$.

d) $[a|b[\subseteq [a|b]$

und $[a|b[\subseteq [a|+\infty]$ *und* $[a|b[\subseteq [a|+\infty[$

und $[a|b[\subseteq [-\infty|b]$ *und* $[a|b[\subseteq [-\infty|b[$.

Beweis **142-5**

$\le$-Notation.

---

a)

`Thema1.1` $\gamma \in [a|b]$.

2: Aus `Thema1.1`"$\gamma \in [a|b]$"
folgt via **142-3**: $a \le \gamma$.

3: Aus 2"$a \le \gamma$"
folgt via **142-3**: $\gamma \in [a| + \infty]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \gamma : (\gamma \in [a|b]) \Rightarrow (\gamma \in [a| + \infty])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$[a|b] \subseteq [a| + \infty]$"

`Thema1.2` $\gamma \in [a|b]$.

2: Aus `Thema1.1`"$\gamma \in [a|b]$"
folgt via **142-3**: $\gamma \le b$.

3: Aus 2"$\gamma \le b$"
folgt via **142-3**: $\gamma \in [-\infty|b]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \gamma : (\gamma \in [a|b]) \Rightarrow (\gamma \in [-\infty|b])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$[a|b] \subseteq [-\infty|b]$"

2: Aus `A1` und
aus `A2`
folgt: $([a|b] \subseteq [a| + \infty]) \wedge ([a|b] \subseteq [-\infty|b])$.

<u>Beweis</u> **142-5** `b)`

`1.1:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{\leq}{|} b[\subseteq [a \overset{\leq}{|} b]$.

`2:` Aus “$]a|b[=]a \overset{\leq}{|} b[$” und
aus `1.1`“$]a \overset{\leq}{|} b[\subseteq [a \overset{\leq}{|} b]$”
folgt: $]a|b[\subseteq [a \overset{\leq}{|} b]$.

`3:` Aus 2“$]a|b[\subseteq [a \overset{\leq}{|} b]$” und
aus “$[a|b] = [a \overset{\leq}{|} b]$”
folgt: $\boxed{\texttt{A1} \;\big|\; \text{“}]a|b[\subseteq [a|b]\text{”}}$

`1.2:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{\leq}{|} b[\subseteq]a \overset{\leq}{|} b]$.

`2:` Aus “$]a|b[=]a \overset{\leq}{|} b[$” und
aus `1.2`“$]a \overset{\leq}{|} b[\subseteq]a \overset{\leq}{|} b]$”
folgt: $]a|b[\subseteq]a \overset{\leq}{|} b]$.

`3:` Aus 2“$]a|b[\subseteq]a \overset{\leq}{|} b]$” und
aus “$]a|b] =]a \overset{\leq}{|} b]$”
folgt: $\boxed{\texttt{A2} \;\big|\; \text{“}]a|b[\subseteq]a|b]\text{”}}$

`1.3:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{\leq}{|} b[\subseteq [a \overset{\leq}{|} b[$.

`2:` Aus “$]a|b[=]a \overset{\leq}{|} b[$” und
aus `1.3`“$]a \overset{\leq}{|} b[\subseteq [a \overset{\leq}{|} b[$”
folgt: $]a|b[\subseteq [a \overset{\leq}{|} b[$.

`3:` Aus 2“$]a|b[\subseteq [a \overset{\leq}{|} b[$” und
aus “$[a|b[= [a \overset{\leq}{|} b[$”
folgt: $\boxed{\texttt{A3} \;\big|\; \text{“}]a|b[\subseteq [a|b[\text{”}}$

...

<u>Beweis **142-5**</u> `b)`

...

`1.4:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{\leq}{|} b[\subseteq [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle.$

`2:` Aus "$]a|b[=]a \overset{\leq}{|} b[$" und
aus `1.4`"$]a \overset{\leq}{|} b[\subseteq [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $]a|b[\subseteq [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle.$

`3:` Aus `2`"$]a|b[\subseteq [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$" und
aus **142-2**"$[a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle = [a|+\infty]$"
folgt: $\boxed{\texttt{A4} \,\big|\, \text{"}]a|b[\subseteq [a|+\infty]\text{"}}$

`1.5:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{\leq}{|} b[\subseteq]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle.$

`2:` Aus "$]a|b[=]a \overset{\leq}{|} b[$" und
aus `1.5`"$]a \overset{\leq}{|} b[\subseteq]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $]a|b[\subseteq]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle.$

`3:` Aus `2`"$]a|b[\subseteq]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$" und
aus **142-2**"$]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle =]a|+\infty]$"
folgt: $\boxed{\texttt{A5} \,\big|\, \text{"}]a|b[\subseteq]a|+\infty]\text{"}}$

...

Beweis **142-5** `b)`

...

`Thema1.6` $\gamma \in \,]a|b[\,.$

`2.1:` Aus `Thema1.6`"$\gamma \in \,]a|b[$"
folgt via **142-3**: $a < \gamma.$

`2.2:` Aus `Thema1.6`"$\gamma \in \,]a|b[$" und
aus **142-4**"$]a|b[\, \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in \mathbb{R}.$

`3.1:` Aus `2.1`"$a < \gamma$"
folgt via **41-3**: $a \le \gamma.$

`3.2:` Aus `2.2`"$\gamma \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $\gamma < +\infty.$

`4:` Aus `3.1`"$a \le \gamma$" und
aus `3.2`"$\gamma < +\infty$"
folgt via **142-3**: $\gamma \in [a| +\infty[\,.$

Ergo `Thema1.6`: $\forall \gamma : (\gamma \in \,]a|b[) \Rightarrow (\gamma \in [a| +\infty[).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A6` "$]a|b[\, \subseteq [a| +\infty[$"

...

Beweis **142-5** `b)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.7}}$ $\gamma \in \,]a|b[.$

`2.1:` Aus `Thema1.7`"$\gamma \in \,]a|b[$"
folgt via **142-3**: $a < \gamma.$

`2.2:` Aus `Thema1.7`"$\gamma \in \,]a|b[$" und
aus **142-4**"$]a|b[\, \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in \mathbb{R}.$

`3:` Aus `2.2`"$\gamma \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $\gamma < +\infty.$

`4:` Aus `2.1`"$a < \gamma$" und
aus `3`"$\gamma < +\infty$"
folgt via **142-3**: $\gamma \in \,]a| + \infty[.$

Ergo `Thema1.7`: $\forall \gamma : (\gamma \in \,]a|b[) \Rightarrow (\gamma \in \,]a| + \infty[).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A7} \Big| \text{"}]a|b[\, \subseteq \,]a| + \infty[\text{"}}$

`1.8:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{\leq}{|} b[\, \subseteq \langle\cdot \overset{\leq}{|} b].$

`2:` Aus "$]a|b[\, = \,]a \overset{\leq}{|} b[$" und
aus `1.8`"$]a \overset{\leq}{|} b[\, \subseteq \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$"
folgt: $]a|b[\, \subseteq \langle\cdot \overset{\leq}{|} b].$

`3:` Aus `2`"$]a|b[\, \subseteq \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$" und
aus **142-2**"$\langle\cdot \overset{\leq}{|} b] = [-\infty|b]$"
folgt: $\boxed{\texttt{A8} \Big| \text{"}]a|b[\, \subseteq [-\infty|b]\text{"}}$

...

<u>Beweis</u> **142-5** `b)`

...

`1.9:` Via **41-27** gilt: $\mathbf{]}a\overset{\leq}{|}b\mathbf{[}\subseteq\langle\cdot\overset{\leq}{|}b\mathbf{[}.$

`2:` Aus "$\mathbf{]}a|b\mathbf{[}=\mathbf{]}a\overset{\leq}{|}b\mathbf{[}$" und
aus `1.9`"$\mathbf{]}a\overset{\leq}{|}b\mathbf{[}\subseteq\langle\cdot\overset{\leq}{|}b\mathbf{[}$"
folgt: $\mathbf{]}a|b\mathbf{[}\subseteq\langle\cdot\overset{\leq}{|}b\mathbf{[}.$

`3:` Aus 2"$\mathbf{]}a|b\mathbf{[}\subseteq\langle\cdot\overset{\leq}{|}b\mathbf{[}$" und
aus **142-2**"$\langle\cdot\overset{\leq}{|}b\mathbf{[}=\mathbf{[}-\infty|b\mathbf{[}$"
folgt: `A9` "$\mathbf{]}a|b\mathbf{[}\subseteq\mathbf{[}-\infty|b\mathbf{[}$"

`Thema1.10` $\gamma\in\mathbf{]}a|b\mathbf{[}.$

`2.1:` Aus `Thema1.10`"$\gamma\in\mathbf{]}a|b\mathbf{[}$"
folgt via **142-3**: $\gamma<b.$

`2.2:` Aus `Thema1.10`"$\gamma\in\mathbf{]}a|b\mathbf{[}$" und
aus **142-4**"$\mathbf{]}a|b\mathbf{[}\subseteq\mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $\gamma\in\mathbb{R}.$

`3.1:` Aus `2.1`"$\gamma<b$"
folgt via **41-3**: $\gamma\leq b.$

`3.2:` Aus `2.2`"$\gamma\in\mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty<\gamma.$

`4:` Aus `3.2`"$-\infty<\gamma$" und
aus `3.1`"$\gamma\leq b$"
folgt via **142-3**: $\gamma\in\mathbf{]}-\infty|b\mathbf{]}.$

Ergo `Thema1.10`: $\forall\gamma:(\gamma\in\mathbf{]}a|b\mathbf{[})\Rightarrow(\gamma\in\mathbf{]}-\infty|b\mathbf{]}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A10` "$\mathbf{]}a|b\mathbf{[}\subseteq\mathbf{]}-\infty|b\mathbf{]}$"

...

Beweis **142-5** `b)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.11}}$ $\gamma \in]a|b[$.

`2.1:` Aus `Thema1.11`"$\gamma \in]a|b[$"
folgt via **142-3**: $\gamma < b$.

`2.2:` Aus `Thema1.11`"$\gamma \in]a|b[$" und
aus **142-4**"$]a|b[\subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.2`"$\gamma \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < \gamma$.

`4:` Aus `3`"$-\infty < \gamma$" und
aus `2.1`"$\gamma < b$"
folgt via **142-3**: $\gamma \in]-\infty|b[$.

Ergo `Thema1.11`: $\forall \gamma : (\gamma \in]a|b[) \Rightarrow (\gamma \in]-\infty|b[)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A11` "$]a|b[\subseteq]-\infty|b[$"

`2:` Aus `A1` gleich "$]a|b[\subseteq [a|b]$",
aus `A2` gleich "$]a|b[\subseteq]a|b]$",
aus `A3` gleich "$]a|b[\subseteq [a|b[$",
aus `A4` gleich "$]a|b[\subseteq [a|+\infty]$",
aus `A5` gleich "$]a|b[\subseteq]a|+\infty]$",
aus `A6` gleich "$]a|b[\subseteq [a|+\infty[$",
aus `A7` gleich "$]a|b[\subseteq]a|+\infty[$",
aus `A8` gleich "$]a|b[\subseteq [-\infty|b]$",
aus `A9` gleich "$]a|b[\subseteq [-\infty|b[$",
aus `A10` gleich "$]a|b[\subseteq]-\infty|b]$" und
aus `A11` gleich "$]a|b[\subseteq]-\infty|b[$"
folgt:

$$(]a|b[\subseteq [a|b]) \wedge (]a|b[\subseteq]a|b]) \wedge (]a|b[\subseteq [a|b[)$$
$$\wedge(]a|b[\subseteq [a|+\infty]) \wedge (]a|b[\subseteq]a|+\infty])$$
$$\wedge(]a|b[\subseteq [a|+\infty[) \wedge (]a|b[\subseteq]a|+\infty[)$$
$$\wedge(]a|b[\subseteq [-\infty|b]) \wedge (]a|b[\subseteq [-\infty|b[)$$
$$\wedge(]a|b[\subseteq]-\infty|b]) \wedge (]a|b[\subseteq]-\infty|b[).$$

<u>Beweis **142-5**</u> `c)`

`1.1:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{\leq}{|} b] \subseteq [a \overset{\leq}{|} b]$.

`2:` Aus “$]a|b] =]a \overset{\leq}{|} b]$” und
aus `1.1`“$]a \overset{\leq}{|} b] \subseteq [a \overset{\leq}{|} b]$”
folgt: $]a|b] \subseteq [a \overset{\leq}{|} b]$.

`3:` Aus `2`“$]a|b] \subseteq [a \overset{\leq}{|} b]$” und
aus “$[a|b] = [a \overset{\leq}{|} b]$”
folgt: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\; “]a|b] \subseteq [a|b]”}$

`1.2:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{\leq}{|} b] \subseteq [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus “$]a|b] =]a \overset{\leq}{|} b]$” und
aus `1.2`“$]a \overset{\leq}{|} b] \subseteq [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$”
folgt: $]a|b] \subseteq [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `2`“$]a|b] \subseteq [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$” und
aus **142-2**“$[a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle = [a| +\infty]$”
folgt: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\; “]a|b] \subseteq [a| +\infty]”}$

`1.3:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{\leq}{|} b] \subseteq]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus “$]a|b] =]a \overset{\leq}{|} b]$” und
aus `1.3`“$]a \overset{\leq}{|} b] \subseteq]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$”
folgt: $]a|b] \subseteq]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `2`“$]a|b] \subseteq]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$” und
aus **142-2**“$]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle =]a| +\infty]$”
folgt: $\boxed{\texttt{A3} \,\big|\; “]a|b] \subseteq]a| +\infty]”}$

...

<u>Beweis **142-5**</u> `c)`

...

`1.4:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{\leq}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$.

`2:` Aus "$]a|b] =]a \overset{\leq}{|} b]$" und
aus `1.4`"$]a \overset{\leq}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$"
folgt: $]a|b] \subseteq \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$.

`3:` Aus `2`"$]a|b] \subseteq \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$" und
aus **142-2**"$\langle\cdot \overset{\leq}{|} b] = [-\infty|b]$"
folgt: `A4` | "$]a|b] \subseteq [-\infty|b]$"

`Thema1.5` $\gamma \in]a|b]$.

`2:` Aus `Thema1.5`"$\gamma \in]a|b]$"
folgt via **142-3**: $a < \gamma \leq b$.

`3:` Aus `2`"$a < \gamma \ldots$"
folgt via **107-9**: $-\infty < \gamma$.

`4:` Aus `3`"$-\infty < \gamma$" und
aus `2`"$\ldots \gamma \leq b$"
folgt via **142-3**: $\gamma \in]-\infty|b]$.

Ergo `Thema1.5`: $\forall \gamma : (\gamma \in]a|b]) \Rightarrow (\gamma \in]-\infty|b])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A5` | "$]a|b] \subseteq]-\infty|b]$"

`2:` Aus `A1` gleich "$]a|b] \subseteq [a|b]$",
aus `A2` gleich "$]a|b] \subseteq [a|+\infty]$",
aus `A3` gleich "$]a|b] \subseteq]a|+\infty]$",
aus `A4` gleich "$]a|b] \subseteq [-\infty|b]$" und
aus `A5` gleich "$]a|b] \subseteq]-\infty|b]$"
folgt:

$$]a|b] \subseteq [a|b]$$
$$\wedge(]a|b] \subseteq [a|+\infty]) \wedge (]a|b] \subseteq]a|+\infty])$$
$$\wedge(]a|b] \subseteq [-\infty|b]) \wedge (]a|b] \subseteq]-\infty|b]).$$

<u>Beweis **142-5**</u> `d)`

`1.1:` Via **41-27** gilt: $[a \overset{\leq}{|} b[\, \subseteq [a \overset{\leq}{|} b]$.

`2:` Aus “ $[a|b[\, = [a \overset{\leq}{|} b[$” und
aus `1.1`“ $[a \overset{\leq}{|} b[\, \subseteq [a \overset{\leq}{|} b]$ ”
folgt: $[a|b[\, \subseteq [a \overset{\leq}{|} b]$.

`3:` Aus `2`“ $[a|b[\, \subseteq [a \overset{\leq}{|} b]$ ” und
aus “ $[a|b] = [a \overset{\leq}{|} b]$”
folgt: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\; \text{“ } [a|b[\, \subseteq [a|b] \text{ ”}}$

`1.2:` Via **41-27** gilt: $[a \overset{\leq}{|} b[\, \subseteq [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$.

`2:` Aus “ $[a|b[\, = [a \overset{\leq}{|} b[$” und
aus `1.2`“ $[a \overset{\leq}{|} b[\, \subseteq [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$ ”
folgt: $[a|b[\, \subseteq [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `2`“ $[a|b[\, \subseteq [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$ ” und
aus **142-2**“ $[a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle = [a| +\infty]$”
folgt: $\boxed{\texttt{A2} \,\Big|\; \text{“ } [a|b[\, \subseteq [a| +\infty] \text{ ”}}$

...

Beweis **142-5** `d)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$	$\gamma \in [a\|b[.$
`2:` Aus `Thema1.3`"$\gamma \in [a\|b[$" folgt via **142-3**:	$a \leq \gamma < b.$
`3:` Aus 2"$\ldots \gamma < b$" folgt via **107-9**:	$\gamma < +\infty.$
`4:` Aus 2"$a \leq \gamma \ldots$" und aus 3"$\gamma < +\infty$" folgt via **142-3**:	$\gamma \in [a\| + \infty[.$

Ergo `Thema1.3`: $\forall \gamma : (\gamma \in [a|b[) \Rightarrow (\gamma \in [a| + \infty[).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A3} \,\Big|\, \text{“} [a|b[\subseteq [a| + \infty[\text{”}}$

`1.4:` Via **41-27** gilt: $[a \overset{\leq}{|} b[\subseteq \langle \cdot \overset{\leq}{|} b].$

`2:` Aus "$[a|b[= [a \overset{\leq}{|} b[$" und
aus `1.4`"$]a \overset{\leq}{|} b] \subseteq \langle \cdot \overset{\leq}{|} b]$"
folgt: $[a|b[\subseteq \langle \cdot \overset{\leq}{|} b].$

`3:` Aus 2"$[a|b[\subseteq \langle \cdot \overset{\leq}{|} b]$" und
aus **142-2**"$\langle \cdot \overset{\leq}{|} b] = [-\infty|b]$"
folgt: $\boxed{\texttt{A4} \,\Big|\, \text{“} [a|b[\subseteq [-\infty|b] \text{”}}$

...

<u>Beweis **142-5**</u> `d)`

...

`1.5:` Via **41-27** gilt: $$[a \overset{\leq}{|} b[\;\subseteq\; \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[.$$

`2:` Aus “ $[a|b[\;=\; [a \overset{\leq}{|} b[$” und
aus `1.5`“ $[a \overset{\leq}{|} b[\;\subseteq\; \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[$”
folgt: $$[a|b[\;\subseteq\; \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[.$$

`3:` Aus `2`“ $[a|b[\;\subseteq\; \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[$” und
aus **142-2**“ $\langle\cdot \overset{\leq}{|} b[\;=\; [-\infty|b[$”
folgt: $$\boxed{\texttt{A5} \mid \text{“ } [a|b[\;\subseteq\; [-\infty|b[\text{ ”}}$$

`2:` Aus `A1` gleich “ $[a|b[\;\subseteq\; [a|b]$ ” ,
aus `A2` gleich “ $[a|b[\;\subseteq\; [a|+\infty]$ ” ,
aus `A3` gleich “ $[a|b[\;\subseteq\; [a|+\infty[$ ” ,
aus `A4` gleich “ $[a|b[\;\subseteq\; [-\infty|b]$ ” und
aus `A5` gleich “ $[a|b[\;\subseteq\; [-\infty|b[$ ”
folgt: $$[a|b[\;\subseteq\; [a|b]$$
$$([a|b[\;\subseteq\; [a|+\infty]) \wedge ([a|b[\;\subseteq\; [a|+\infty[)$$
$$([a|b[\;\subseteq\; [-\infty|b]) \wedge ([a|b[\;\subseteq\; [-\infty|b[).$$

□

142-6. Nun wird **41-28** für $\leq$_Intervalle spezialisiert:

142-6(Satz)

a) $a \notin \,]a|b[$.

b) $a \notin \,]a|b]$.

c) $b \notin \,]a|b[$.

d) $b \notin [a|b[$.

<u>Beweis</u> **142-6** `a)`

`1:` Via **41-28** gilt: $a \notin \,]a \overset{\leq}{|} b[.$

`2:` Aus `1` "$a \notin \,]a \overset{\leq}{|} b[$" und
aus "$]a \overset{\leq}{|} b[\, = \,]a|b[$"
folgt: $a \notin \,]a|b[.$

`b)`

`1:` Via **41-28** gilt: $a \notin \,]a \overset{\leq}{|} b].$

`2:` Aus `1` "$a \notin \,]a \overset{\leq}{|} b]$" und
aus "$]a \overset{\leq}{|} b] \, = \,]a|b]$"
folgt: $a \notin \,]a|b].$

`c)`

`1:` Via **41-28** gilt: $b \notin \,]a \overset{\leq}{|} b[.$

`2:` Aus `1` "$b \notin \,]a \overset{\leq}{|} b[$" und
aus "$]a \overset{\leq}{|} b[\, = \,]a|b[$"
folgt: $b \notin \,]a|b[.$

`d)`

`1:` Via **41-28** gilt: $b \notin [a \overset{\leq}{|} b[.$

`2:` Aus `1` "$b \notin [a \overset{\leq}{|} b[$" und
aus "$[a \overset{\leq}{|} b[\, = [a|b[$"
folgt: $a \notin [a|b[.$

□

142-7. Es folgt die Spezifikation von **41-36** für $\leq$ _Intervalle:

142-7(Satz)

a) $[a|b] = [a| + \infty] \cap [-\infty|b]$.

b) $]a|b[=]a| + \infty] \cap [-\infty|b[$.

c) $]a|b] =]a| + \infty] \cap [-\infty|b]$.

d) $[a|b[= [a| + \infty] \cap [-\infty|b[$.

Beweis **142-7** a)

1:
$$[a|b]$$
$$= [a \overset{\leq}{|} b]$$
$$\overset{\mathbf{41-36}}{=} [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$$
$$\overset{\mathbf{142-2}}{=} [a| + \infty] \cap \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$$
$$\overset{\mathbf{142-2}}{=} [a| + \infty] \cap [-\infty|b].$$

2: Aus 1 folgt:
$$[a|b] = [a| + \infty] \cap [-\infty|b].$$

b)

1:
$$]a|b[$$
$$=]a \overset{\leq}{|} b[$$
$$\overset{\mathbf{41-36}}{=}]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[$$
$$\overset{\mathbf{142-2}}{=}]a| + \infty] \cap \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[$$
$$\overset{\mathbf{142-2}}{=}]a| + \infty] \cap [-\infty|b[.$$

2: Aus 1 folgt:
$$]a|b[=]a| + \infty] \cap [-\infty|b[.$$

Beweis **142-7** `c)`

`1:`

$$]a|b]$$

$$=]a \overset{\leq}{|} b]$$

$$\overset{\mathbf{41-36}}{=}]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$$

$$\overset{\mathbf{142-2}}{=}]a|+\infty] \cap \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$$

$$\overset{\mathbf{142-2}}{=}]a|+\infty] \cap [-\infty|b].$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$]a|b] =]a|+\infty] \cap [-\infty|b].$$

`d)`

`1:`

$$[a|b[$$

$$= [a \overset{\leq}{|} b[$$

$$\overset{\mathbf{41-36}}{=} [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle \cap \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[$$

$$\overset{\mathbf{142-2}}{=} [a|+\infty] \cap \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[$$

$$\overset{\mathbf{142-2}}{=} [a|+\infty] \cap [-\infty|b[.$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$[a|b[= [a|+\infty] \cap [-\infty|b[.$$

□

142-8. Nun wird Hinreichendes für $[a|b] \subseteq \mathbb{R}$, $]a|b] \subseteq \mathbb{R}$ und $[a|b[\subseteq \mathbb{R}$ formuliert:

142-8(Satz)

a) *Aus* “$a \in \mathbb{R}$” *und* “$b \in \mathbb{R}$” *folgt* “$[a|b] \subseteq \mathbb{R}$”.

b) *Aus* “$b \in \mathbb{R}$” *folgt* “$]a|b] \subseteq \mathbb{R}$”.

c) *Aus* “$a \in \mathbb{R}$” *folgt* “$[a|b[\subseteq \mathbb{R}$”.

Beweis **142-8**

$\leq$-Notation.

---

a) `VS` gleich $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\gamma \in [a|b]$.

`2.1`: Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < a$.

`2.2`: Aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $b < +\infty$.

`2.3`: Aus `Thema1` "$\gamma \in [a|b]$"
folgt via **142-3**: $a \leq \gamma \leq b$.

`3.1`: Aus `2.1` "$-\infty < a$" und
aus `2.3` "$a \leq \gamma \ldots$"
folgt via **107-8**: $-\infty < \gamma$.

`3.2`: Aus `2.3` "$\ldots \gamma \leq b$" und
aus `2.2` "$b < +\infty$"
folgt via **107-8**: $\gamma < +\infty$.

`4`: Aus `3.1` "$-\infty < \gamma$" und
aus `3.2` "$\gamma < +\infty$"
folgt via **107-12**: $\gamma \in \mathbb{R}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in [a|b]) \Rightarrow (\gamma \in \mathbb{R})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $[a|b] \subseteq \mathbb{R}$.

<u>Beweis **142-8**</u> `b)` `VS` gleich $b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\gamma \in \,]a|b]$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$b \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $b < +\infty$.

`2.2:` Aus `Thema1`"$\gamma \in \,]a|b]$"
folgt via **142-3**: $a < \gamma \leq b$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \gamma \leq b$" und
aus `2.1`"$b < +\infty$"
folgt via **107-8**: $\gamma < +\infty$.

`4:` Aus `2.2`"$a < \gamma \ldots$" und
aus `3`"$\gamma < +\infty$"
folgt via **107-12**: $\gamma \in \mathbb{R}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in \,]a|b]) \Rightarrow (\gamma \in \mathbb{R})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $]a|b] \subseteq \mathbb{R}$.

`c)` `VS` gleich $a \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\gamma \in [a|b[$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < a$.

`2.2:` Aus `Thema1`"$\gamma \in [a|b[$"
folgt via **142-3**: $a \leq \gamma < b$.

`3:` Aus `2.1`"$-\infty < a$" und
aus `2.2`"$a \leq \gamma$"
folgt via **107-8**: $-\infty < \gamma$.

`4:` Aus `3`"$-\infty < \gamma$" und
aus `2.2`"$\gamma < b$"
folgt via **107-12**: $\gamma \in \mathbb{R}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma : (\gamma \in [a|b[) \Rightarrow (\gamma \in \mathbb{R})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $[a|b[\subseteq \mathbb{R}$.

$\square$

142-9. Die folgenden Aussagen ergeben sich durch Spezialisierungen aus **142-8**:

142-9(Satz)

a) $]-\infty|0] \subseteq \mathbb{R}$.

b) $[0|+\infty[\subseteq \mathbb{R}$.

Beweis **142-9**

1: Via **AAI** gilt: $0 \in \mathbb{R}$.

2.a): Aus 1"$0 \in \mathbb{R}$"
folgt via **142-8**: $]-\infty|0] \subseteq \mathbb{R}$.

2.b): Aus 1"$0 \in \mathbb{R}$"
folgt via **142-8**: $[0|+\infty[\subseteq \mathbb{R}$.

$\square$

142-10. Gelegentlich ist es hilfreich, ein Kriterium für das “*Nicht*-Element-Sein” in einem $\leq$-Intervall zur Verfügung zu haben:

142-10(Satz)

a) *“$p \notin [a|b]$” genau dann, wenn “$\neg(a \leq p)$” oder “$\neg(p \leq b)$”.*

b) *“$p \notin [a|+\infty]$” genau dann, wenn “$\neg(a \leq p)$”.*

c) *“$p \notin [-\infty|b]$” genau dann, wenn “$\neg(p \leq b)$”.*

d) *“$p \notin [-\infty|+\infty]$” genau dann, wenn “$p \notin \mathbb{S}$”.*

e) *“$p \notin]a|b[$” genau dann, wenn “$\neg(a < p)$” oder “$\neg(p < b)$”.*

f) *“$p \notin]a|+\infty[$” genau dann, wenn “$\neg(a < p)$” oder “$p \notin \mathbb{R}$”.*

g) *“$p \notin]-\infty|b[$” genau dann, wenn “$\neg(p < b)$” oder “$p \notin \mathbb{R}$”.*

h) *“$p \notin]-\infty|+\infty[$” genau dann, wenn “$p \notin \mathbb{R}$”.*

i) *“$p \notin]a|b]$” genau dann, wenn “$\neg(a < p)$” oder “$\neg(p \leq b)$”.*

j) *“$p \notin]a|+\infty]$” genau dann, wenn “$\neg(a < p)$”.*

k) *“$p \notin]-\infty|b]$” genau dann, wenn “$\neg(-\infty < p)$” oder “$\neg(p \leq b)$”.*

l) *“$p \notin]-\infty|+\infty]$” genau dann, wenn “$\neg(-\infty < p)$”.*

m) *“$p \notin [a|b[$” genau dann, wenn “$\neg(a \leq p)$” oder “$\neg(p < b)$”.*

n) *“$p \notin [a|+\infty[$” genau dann, wenn “$\neg(a \leq p)$” oder “$\neg(p < +\infty)$”.*

o) *“$p \notin [-\infty|b[$” genau dann, wenn “$\neg(p < b)$”.*

p) *“$p \notin [-\infty|+\infty[$” genau dann, wenn “$\neg(p < +\infty)$”.*

$\leq$-Notation.

<u>Beweis</u> **142-10** `a)`

`1:` Via **142-3** gilt: $$(p \in [a|b]) \Leftrightarrow (a \le p \le b).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(p \in [a|b])) \Leftrightarrow (\neg((a \le p) \wedge (p \le b))).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(p \notin [a|b]) \Leftrightarrow ((\neg(a \le p)) \vee (\neg(p \le b))).$$

`b)`

`1:` Via **142-3** gilt: $$(p \in [a| +\infty]) \Leftrightarrow (a \le p).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(p \in [a| +\infty])) \Leftrightarrow (\neg(a \le p)).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(p \notin [a| +\infty]) \Leftrightarrow (\neg(a \le p)).$$

`c)`

`1:` Via **142-3** gilt: $$(p \in [-\infty|b]) \Leftrightarrow (p \le b).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(p \in [-\infty|b])) \Leftrightarrow (\neg(p \le b)).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(p \notin [-\infty|b]) \Leftrightarrow (\neg(p \le b)).$$

`d)`

`1:` Via **142-3** gilt: $$(p \in [-\infty| +\infty]) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{S}).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(p \in [-\infty| +\infty])) \Leftrightarrow (\neg(p \in \mathbb{S})).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(p \notin [-\infty| +\infty]) \Leftrightarrow (p \notin \mathbb{S}).$$

Beweis **142-10** e)

1: Via **142-3** gilt: $$(p \in \,]a|b[\,) \Leftrightarrow (a < p < b).$$

2: Aus 1
folgt: $$(\neg(p \in \,]a|b[\,)) \Leftrightarrow (\neg((a < p) \wedge (p < b))).$$

3: Aus 2
folgt: $$(p \notin \,]a|b[\,) \Leftrightarrow ((\neg(a < p)) \vee (\neg(p < b))).$$

f)

1: Via **142-3** gilt: $$(p \in \,]a|+\infty[\,) \Leftrightarrow (a < p \in \mathbb{R}).$$

2: Aus 1
folgt: $$(\neg(p \in \,]a|+\infty[\,)) \Leftrightarrow (\neg((a < p) \wedge (p \in \mathbb{R})).$$

3: Aus 2
folgt: $$(p \notin \,]a|+\infty[\,) \Leftrightarrow ((\neg(a < p)) \vee (\neg(p \in \mathbb{R}))).$$

4: Aus 3
folgt: $$(p \notin \,]a|+\infty[\,) \Leftrightarrow ((\neg(a < p)) \vee (p \notin \mathbb{R})).$$

g)

1: Via **142-3** gilt: $$(p \in \,]-\infty|b[\,) \Leftrightarrow (\mathbb{R} \ni p < b).$$

2: Aus 1
folgt: $$(\neg(p \in \,]-\infty|b[\,)) \Leftrightarrow (\neg((p < b) \wedge (p \in \mathbb{R}))).$$

3: Aus 2
folgt: $$(p \notin \,]-\infty|b[\,) \Leftrightarrow ((\neg(p < b)) \vee (\neg(p \in \mathbb{R}))).$$

4: Aus 3
folgt: $$(p \notin \,]-\infty|b[\,) \Leftrightarrow ((\neg(p < b)) \vee (p \notin \mathbb{R})).$$

h)

1: Via **142-3** gilt: $$(p \in \,]-\infty|+\infty[\,) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{R}).$$

2: Aus 1
folgt: $$(\neg(p \in \,]-\infty|+\infty[\,)) \Leftrightarrow (\neg(p \in \mathbb{R})).$$

3: Aus 2
folgt: $$(p \notin \,]-\infty|+\infty[\,) \Leftrightarrow (p \notin \mathbb{R}).$$

<u>Beweis **142-10**</u> `i)`

`1:` Via **142-3** gilt: $$(p \in \,]a|b]\,) \Leftrightarrow (a < p \leq b).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(p \in \,]a|b]\,)) \Leftrightarrow (\neg((a < p) \wedge (p \leq b))).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(p \notin \,]a|b]\,) \Leftrightarrow ((\neg(a < p)) \vee (\neg(p \leq b))).$$

`j)`

`1:` Via **142-3** gilt: $$(p \in \,]a| + \infty]\,) \Leftrightarrow (a < p).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(p \in \,]a| + \infty]\,)) \Leftrightarrow (\neg(a < p)).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(p \notin \,]a| + \infty]\,) \Leftrightarrow (\neg(a < p)).$$

`k)`

`1:` Via **142-3** gilt: $$(p \in \,] - \infty|b]\,) \Leftrightarrow (-\infty < p \leq b).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(p \in \,] - \infty|b]\,)) \Leftrightarrow (\neg((-\infty < p) \wedge (p \leq b))).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(p \notin \,] - \infty|b]\,) \Leftrightarrow ((\neg(-\infty < p)) \vee (\neg(p \leq b))).$$

`l)`

`1:` Via **142-3** gilt: $$(p \in \,] - \infty| + \infty]\,) \Leftrightarrow (-\infty < p).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(p \in \,] - \infty| + \infty]\,)) \Leftrightarrow (\neg(-\infty < p)).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(p \notin \,] - \infty| + \infty]\,) \Leftrightarrow (\neg(-\infty < p)).$$

Beweis **142-10** m)

1: Via **142-3** gilt: $(p \in [a|b[) \Leftrightarrow (a \leq p < b)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(p \in [a|b[)) \Leftrightarrow (\neg((a \leq p) \wedge (p < b)))$.

3: Aus 2
folgt: $(p \notin [a|b[) \Leftrightarrow ((\neg(a \leq p)) \vee (\neg(p < b)))$.

n)

1: Via **142-3** gilt: $(p \in [a|+\infty[) \Leftrightarrow (a \leq p < +\infty)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(p \in [a|+\infty[)) \Leftrightarrow (\neg((a \leq p) \wedge (p < +\infty)))$.

3: Aus 2
folgt: $(p \notin [a|+\infty[) \Leftrightarrow ((\neg(a \leq p)) \vee (\neg(p < +\infty)))$.

o)

1: Via **142-3** gilt: $(p \in [-\infty|b[) \Leftrightarrow (p < b)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(p \in [-\infty|b[)) \Leftrightarrow (\neg(p < b))$.

3: Aus 2
folgt: $(p \notin [-\infty|b[) \Leftrightarrow (\neg(p < b))$.

p)

1: Via **142-3** gilt: $(p \in [-\infty|+\infty[) \Leftrightarrow (p < +\infty)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(p \in [-\infty|+\infty[)) \Leftrightarrow (\neg(p < +\infty))$.

3: Aus 2
folgt: $(p \notin [-\infty|+\infty[) \Leftrightarrow (\neg(p < +\infty))$.

□

142-11. Auf Grund der "Anti-Symmetrie" von $\le$ folgen aus **142-10** einige handliche hinreichende Bedingungen für das "Nicht-Element-Sein" in bestimmten $\le$ _Intervallen:

142-11(Satz)

a) *Aus* "$p < a$" *folgt* "$p \notin [a|b]$".

b) *Aus* "$b < p$" *folgt* "$p \notin [a|b]$".

c) *Aus* "$p < a$" *folgt* "$p \notin [a| + \infty]$."

d) *Aus* "$b < p$" *folgt* "$p \notin [-\infty|b]$."

e) *Aus* "$p \le a$" *folgt* "$p \notin]a|b[$".

f) *Aus* "$b \le p$" *folgt* "$p \notin]a|b[$".

g) *Aus* "$p \le a$" *folgt* "$p \notin]a| + \infty[$".

h) *Aus* "$b \le p$" *folgt* "$p \notin] - \infty|b[$".

i) *Aus* "$p \le a$" *folgt* "$p \notin]a|b]$".

j) *Aus* "$b < p$" *folgt* "$p \notin]a|b]$".

k) *Aus* "$p \le a$" *folgt* "$p \notin]a| + \infty]$".

l) *Aus* "$b < p$" *folgt* "$p \notin] - \infty|b]$".

m) *Aus* "$p < a$" *folgt* "$p \notin [a|b[$".

n) *Aus* "$b \le p$" *folgt* "$p \notin [a|b[$".

o) *Aus* "$p < a$" *folgt* "$p \notin [a| + \infty[$".

p) *Aus* "$b \le p$" *folgt* "$p \notin [a| + \infty[$".

$\le$-**Notation**.

<u>Beweis **142-11**</u> `a)` `VS` gleich $p < a.$

`1:` Aus `VS` gleich “$p < a$”
folgt via **107-13**: $\neg(a \leq p).$

`2:` Aus `1`“$\neg(a \leq p)$”
folgt via **142-10**: $p \notin [a|b].$

`b)` `VS` gleich $b < p.$

`1:` Aus `VS` gleich “$b < p$”
folgt via **107-13**: $\neg(p \leq b).$

`2:` Aus `1`“$\neg(p \leq b)$”
folgt via **142-10**: $p \notin [a|b].$

`c)` `VS` gleich $p < a.$

Aus `VS` gleich “$p < a$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p \notin [a| + \infty].$

`d)` `VS` gleich $b < p.$

Aus `VS` gleich “$b < p$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $p \notin [-\infty|b].$

`e)` `VS` gleich $p \leq a.$

`1:` Aus `VS` gleich “$p \leq a$”
folgt via **107-13**: $\neg(a < p).$

`2:` Aus `1`“$\neg(a < p)$”
folgt via **142-10**: $p \notin]a|b[.$

`f)` `VS` gleich $b \leq p.$

`1:` Aus `VS` gleich “$b \leq p$”
folgt via **107-13**: $\neg(p < b).$

`2:` Aus `1`“$\neg(p < b)$”
folgt via **142-10**: $p \notin]a|b[.$

`g)` `VS` gleich $p \leq a.$

Aus `VS` gleich “$p \leq a$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $p \notin]a| + \infty[.$

<u>Beweis **142-11**</u> `h)` `VS` gleich $b \leq p$.

Aus `VS` gleich "$b \leq p$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $p \notin]-\infty|b[$.

`i)` `VS` gleich $p \leq a$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \leq a$"
folgt via **107-13**: $\neg(a < p)$.

`2:` Aus `1`"$\neg(a < p)$"
folgt via **142-10**: $p \notin]a|b]$.

`j)` `VS` gleich $b < p$.

`1:` Aus `VS` gleich "$b < p$"
folgt via **107-13**: $\neg(p \leq b)$.

`2:` Aus `1`"$\neg(p \leq b)$"
folgt via **142-10**: $p \notin]a|b]$.

`k)` `VS` gleich $p \leq a$.

Aus `VS` gleich "$p \leq a$"
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $p \notin]a|+\infty]$.

`l)` `VS` gleich $b < p$.

Aus `VS` gleich "$b < p$"
folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $p \notin]-\infty|b]$.

`m)` `VS` gleich $p < a$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p < a$"
folgt via **107-13**: $\neg(a \leq p)$.

`2:` Aus `1`"$\neg(a \leq p)$"
folgt via **142-10**: $p \notin [a|b[$.

<u>Beweis **142-11**</u> `n)` `VS` gleich $b \leq p$.

`1:` Aus `VS` gleich “$b \leq p$”
folgt via **107-13**: $\neg(p < b)$.

`2:` Aus `1`“$\neg(p < b)$”
folgt via **142-10**: $p \notin [a|b[$.

`o)` `VS` gleich $p < a$.

Aus `VS` gleich “$p < a$”
folgt via des bereits bewiesenen `m)`: $p \notin [a| + \infty[$.

`p)` `VS` gleich $b \leq p$.

Aus `VS` gleich “$b \leq p$”
folgt via des bereits bewiesenen `n)`: $p \notin [-\infty|b[$.

$\square$

142-12. Zur späteren Verwendung werden hier einige vertraute Aussagen über -1 und 1 gesammelt. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - c) - d) - e) - f) - g) - h)`:

142-12(Satz)

`a)` $-1 \in [-\infty|0]$.

`b)` $-1 \in]-\infty|0[$.

`c)` $-1 \in]-\infty|0]$.

`d)` $-1 \in [-\infty|0[$.

`e)` $1 \notin [-\infty|0]$.

`f)` $1 \notin]-\infty|0[$.

`g)` $1 \notin]-\infty|0]$.

`h)` $1 \notin [-\infty|0[$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **142-12**

$\leq$-Notation.

---

abcd)

1.b): Aus **100-7** "$-1 \in \mathbb{R}$" und
aus **109-24** "$-1 < 0$"
folgt via **142-3**: $-1 \in \,]-\infty|0[$.

2.a): Aus 1.b) "$-1 \in \,]-\infty|0[$" und
aus **142-5** "$]-\infty|0[\, \subseteq [-\infty|0]$"
folgt via **0-4**: $-1 \in [-\infty|0]$.

2.c): Aus 1.b) "$-1 \in \,]-\infty|0[$" und
aus **142-5** "$]-\infty|0[\, \subseteq \,]-\infty|0]$"
folgt via **0-4**: $-1 \in \,]-\infty|0]$.

2.d): Aus 1.b) "$-1 \in \,]-\infty|0[$" und
aus **142-5** "$]-\infty|0[\, \subseteq [-\infty|0[$"
folgt via **0-4**: $-1 \in [-\infty|0[$.

efgh)

1: Via **109-24** gilt: $0 < 1$.

2.e): Aus 1 "$0 < 1$"
folgt via **142-11**: $1 \notin [-\infty|0]$.

3.f): Aus 2.e) "$1 \notin [-\infty|0]$" und
aus **142-5** "$]-\infty|0[\, \subseteq [-\infty|0]$"
folgt via **0-4**: $1 \notin \,]-\infty|0[$.

3.g): Aus 2.e) "$1 \notin [-\infty|0]$" und
aus **142-5** "$]-\infty|0] \subseteq [-\infty|0]$"
folgt via **0-4**: $1 \notin \,]-\infty|0]$.

3.h): Aus 2.e) "$1 \notin [-\infty|0]$" und
aus **142-5** "$[-\infty|0[\, \subseteq [-\infty|0]$"
folgt via **0-4**: $1 \notin [-\infty|0[$.

□

E **ist AD**.

Ersterstellung: 29/07/10 **Letzte Änderung: 17/03/12**

143-1. Die nun auftretenden Buchstaben "**AD**" sind die Anfangs-Buchstaben von "Addition" und von "DistributivGesetz" hin:

143-1(Definition)

"E **ist AD**" genau dann, wenn gilt:

`e.1)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge (\beta \in E)) \Rightarrow (\alpha + \beta \in E)$.

`e.2)` $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha \in E) \wedge (\beta \in E) \wedge (\gamma \in E)$
$\Rightarrow (\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)$.

`RECH`-**Notation**.

143-2. Wenn e gegenüber der Addition "abgeschlossen" ist und wenn e Teil-Klasse einer Klasse, die **AD** ist, dann ist e ebenfalls **AD**:

143-2(Satz)

Es gelte:

→) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge (\beta \in e)) \Rightarrow (\alpha + \beta \in e)$.

→) $e \subseteq E$.

→) E *ist* **AD**.

Dann folgt "e ist **AD***".*

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **143-2**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\qquad (\alpha \in e) \wedge (\beta \in e) \wedge (\gamma \in e)$

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in e \ldots$” und
aus `VS` gleich “$e \subseteq E \ldots$”
folgt via **0-4**: $\qquad \alpha \in E.$

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\ldots \beta \in e \ldots$” und
aus `VS` gleich “$e \subseteq E \ldots$”
folgt via **0-4**: $\qquad \beta \in E.$

`2.3:` Aus `Thema1.1`“$\ldots \gamma \in e$” und
aus `VS` gleich “$e \subseteq E \ldots$”
folgt via **0-4**: $\qquad \gamma \in E.$

`3:` Aus `VS` gleich “$\ldots E$ ist **AD**”,
aus `2.1`“$\alpha \in E$”,
aus `2.2`“$\beta \in E$” und
aus `2.3`“$\gamma \in E$”
folgt via **143-1(Def)**:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | “$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha \in e) \wedge (\beta \in e) \wedge (\gamma \in e)$
$\Rightarrow (\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)$”

`1.2:` Aus →) “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge (\beta \in e)) \Rightarrow (\alpha + \beta \in e)$” und
aus `A1`“$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha \in e) \wedge (\beta \in e) \wedge (\gamma \in e)$
$\Rightarrow (\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma))$”
folgt via **143-1(Def)**: $\qquad e$ ist **AD**.

□

143-3. Nun werden sieben Mengen angegeben, die **AD** sind.
Die Beweis-Reihenfolge ist `k) - b) - a) - c) - d) - e) - f) - g) - h) - i) - j)`:

143-3(Satz)

a) 0 *ist* **AD**.

b) $\mathbb{R}$ *ist* **AD**.

c) $[0| + \infty]$ *ist* **AD**.

d) $]0| + \infty[$ *ist* **AD**.

e) $]0| + \infty]$ *ist* **AD**.

f) $[0| + \infty[$ *ist* **AD**.

g) $[- \infty|0]$ *ist* **AD**.

h) $]- \infty|0[$ *ist* **AD**.

i) $]- \infty|0]$ *ist* **AD**.

j) $[- \infty|0[$ *ist* **AD**.

k) $\mathbb{C}$ *ist* **AD**.

Beweis **143-3**

`RECH.`$\le$-**Notation**.

`k)`

`Thema1.1` $(\alpha \in \mathbb{C}) \wedge (\beta \in \mathbb{C})$.

Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathbb{C} \ldots$” und
aus `Thema1.1`“$\ldots \beta \in \mathbb{C}$”
folgt via $+$**SZ**: $\alpha + \beta \in \mathbb{C}$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{C}) \wedge (\beta \in \mathbb{C})) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{C})$”

...

Beweis **143-3** `k)`

...

`Thema1.2`	$(\alpha \in \mathbb{C}) \wedge (\beta \in \mathbb{C}) \wedge (\gamma \in \mathbb{C})$.
Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathbb{C} \ldots$” folgt via **DG**$\mathbb{C}$:	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

`A2` | “$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha \in \mathbb{C}) \wedge (\beta \in \mathbb{C}) \wedge (\gamma \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)$”

`2:` Aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{C}) \wedge (\beta \in \mathbb{C})) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{C})$” und
aus `A2`“$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha \in \mathbb{C}) \wedge (\beta \in \mathbb{C}) \wedge (\gamma \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)$”
folgt via **143-1(Def)**: $\mathbb{C}$ ist **AD**.

`b)`

`Thema1.1`	$(\alpha \in \mathbb{R}) \wedge (\beta \in \mathbb{R})$.
Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathbb{R} \ldots$” und aus `Thema1.1`“$\ldots \beta \in \mathbb{R}$” folgt via $+$**SZ**:	$\alpha + \beta \in \mathbb{R}$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{R}) \wedge (\beta \in \mathbb{R})) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{R})$”

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `k)` gilt: $\mathbb{C}$ ist **AD**.

`2:` Aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathbb{R}) \wedge (\beta \in \mathbb{R})) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{R})$”,
aus $\subseteq$**SZ**“$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$” und
aus 2“$\mathbb{C}$ ist **AD**”
folgt via **143-2**: $\mathbb{R}$ ist **AD**.

<u>Beweis **143-3**</u> `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$(\alpha \in 0) \wedge (\beta \in 0)$.
Es gilt `Thema1.1`"$\alpha \in 0 \ldots$".	
Via **0-19** gilt "$\alpha \notin 0$".	
Ex falso quodlibet folgt:	$\alpha + \beta \in 0$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge (\beta \in 0)) \Rightarrow (\alpha + \beta \in 0)$"

`1.2:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \mathbb{C}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `k)` gilt: $\mathbb{C}$ ist **AD**.

`3:` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge (\beta \in 0)) \Rightarrow (\alpha + \beta \in 0)$",
aus `1.2`"$0 \subseteq \mathbb{C}$" und
aus `2`"$\mathbb{C}$ ist **AD**"
folgt via **143-2**: 0 ist **AD**.

`c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$(\alpha \in [0\vert+\infty]) \wedge (\beta \in [0\vert+\infty])$.
`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in [0\vert+\infty] \ldots$" folgt via **142-3**:	$0 \leq \alpha$.
`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots \beta \in [0\vert+\infty]$" folgt via **142-3**:	$0 \leq \beta$.
`3:` Aus `2.1`"$0 \leq \alpha$" und aus `2.2`"$0 \leq \beta$" folgt via **FS**$\leq +$:	$0 \leq \alpha + \beta$.
`4:` Aus `3`"$0 \leq \alpha + \beta$" folgt via **142-3**:	$\alpha + \beta \in [0\vert+\infty]$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in [0|+\infty]) \wedge (\beta \in [0|+\infty]) \Rightarrow (\alpha + \beta \in [0|+\infty])$"

...

<u>Beweis **143-3**</u> `c)`

...

`Thema1.2`

$$(\alpha \in [0|+\infty]) \wedge (\beta \in [0|+\infty]) \wedge (\gamma \in [0|+\infty]).$$

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in [0|+\infty] \ldots$"
folgt via **142-3**: $0 \leq \beta$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \gamma \in [0|+\infty]$"
folgt via **142-3**: $0 \leq \gamma$.

`3:` Aus `2.1`"$0 \leq \beta$" und
aus `2.2`"$0 \leq \gamma$"
folgt via **DGVZ**: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

`A2` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha \in [0|+\infty]) \wedge (\beta \in [0|+\infty]) \wedge (\gamma \in [0|+\infty]) \Rightarrow (\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)$"

`2:` Aus `A1`"$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in [0|+\infty]) \wedge (\beta \in [0|+\infty]) \Rightarrow (\alpha + \beta \in [0|+\infty])$",
aus `A2`"$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha \in [0|+\infty]) \wedge (\beta \in [0|+\infty]) \wedge (\gamma \in [0|+\infty]) \Rightarrow (\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)$"
folgt via **143-1(Def)**: $[0|+\infty]$ ist **AD**.

<u>Beweis **143-3** `d)`</u>

`Thema1.1` $(\alpha \in \,]0| +\infty[\,) \wedge (\beta \in \,]0| +\infty[\,)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \,]0| +\infty[\,\ldots$"
folgt via **142-3**: $0 < \alpha \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots \beta \in \,]0| +\infty[$"
folgt via **142-3**: $0 < \beta \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Aus `2.1`"$0 < \alpha \ldots$" und
aus `2.2`"$0 < \beta \ldots$"
folgt via **FS**$\le +$: $0 < \alpha + \beta$.

`3.2:` Aus `2.1`"$\ldots \alpha \in \mathbb{R}$" und
aus `2.2`"$\ldots \beta \in \mathbb{R}$"
folgt via $+$**SZ**: $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3.1`"$0 < \alpha + \beta$" und
aus `3.2`"$\alpha + \beta \in \mathbb{R}$"
folgt via **142-3**: $\alpha + \beta \in \,]0| +\infty[$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \,]0| +\infty[\,) \wedge (\beta \in \,]0| +\infty[\,) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \,]0| +\infty[\,)$"

`1.2:` Via **142-5** gilt: $]0| +\infty[\, \subseteq [0| +\infty]$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $[0| +\infty]$ ist **AD**.

`2:` Aus `A1`"$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \,]0| +\infty[\,) \wedge (\beta \in \,]0| +\infty[\,) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \,]0| +\infty[\,)$",
aus `1.2`"$]0| +\infty[\, \subseteq [0| +\infty]$" und
aus `1.3`"$[0| +\infty]$ ist **AD**"
folgt via **143-2**: $]0| +\infty[$ ist **AD**.

Beweis **143-3** `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha \in \,]0|+\infty]\,) \wedge (\beta \in \,]0|+\infty]\,)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \,]0|+\infty]\,\ldots$"
folgt via **142-3**: $0 < \alpha$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots\beta \in \,]0|+\infty]\,$"
folgt via **142-3**: $0 < \beta$.

`3:` Aus `2.1`"$0 < \alpha$" und
aus `2.2`"$0 < \beta$"
folgt via **FS**$\leq +$: $0 < \alpha + \beta$.

`4:` Aus `3`"$0 < \alpha + \beta$"
folgt via **142-3**: $\alpha + \beta \in \,]0|+\infty]$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \,]0|+\infty]\,) \wedge (\beta \in \,]0|+\infty]\,) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \,]0|+\infty]\,)$"

`1.2:` Via **142-5** gilt: $]0|+\infty] \subseteq [0|+\infty]$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $[0|+\infty]$ ist **AD**.

`2:` Aus `A1`"$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \,]0|+\infty]\,) \wedge (\beta \in \,]0|+\infty]\,) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \,]0|+\infty]\,)$",
aus `1.2`"$]0|+\infty] \subseteq [0|+\infty]$" und
aus `1.3`"$[0|+\infty]$ ist **AD**"
folgt via **143-2**: $]0|+\infty]$ ist **AD**.

<u>Beweis **143-3**</u> `f)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$(\alpha \in [0\|+\infty[) \wedge (\beta \in [0\|+\infty[)$.
`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in [0\|+\infty[\ldots$" folgt via **142-3**:	$0 \le \alpha$.
`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in [0\|+\infty[\ldots$" und aus **142-9**"$[0\|+\infty[\subseteq \mathbb{R}$" folgt via **0-4**:	$\alpha \in \mathbb{R}$.
`2.3:` Aus `Thema1.1`"$\ldots\beta \in [0\|+\infty[$" folgt via **142-3**:	$0 \le \beta$.
`2.4:` Aus `Thema1.1`"$\ldots\beta \in [0\|+\infty[$" und aus **142-9**"$[0\|+\infty[\subseteq \mathbb{R}$" folgt via **0-4**:	$\beta \in \mathbb{R}$.
`3.1:` Aus `2.1`"$0 \le \alpha$" und aus `2.3`"$0 \le \beta$" folgt via **FS**$\le +$:	$0 \le \alpha + \beta$.
`3.2:` Aus `2.2`"$\alpha \in \mathbb{R}$" und aus `2.4`"$\beta \in \mathbb{R}$" folgt via $+$**SZ**:	$\alpha + \beta \in \mathbb{R}$.
`4:` Aus `3.2`"$\alpha + \beta \in \mathbb{R}$" folgt via **AAVII**:	$\alpha + \beta < +\infty$.
`5:` Aus `3.1`"$0 \le \alpha + \beta$" und aus `4`"$\alpha + \beta < +\infty$" folgt via **142-3**:	$\alpha + \beta \in [0\|+\infty[$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in [0|+\infty[) \wedge (\beta \in [0|+\infty[) \Rightarrow (\alpha + \beta \in [0|+\infty[)$"

...

Beweis **143-3** `f)`

...

`1.2:` Via **142-5** gilt: $[0|+\infty[\ \subseteq [0|+\infty]$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $[0|+\infty]$ ist **AD**.

`2:` Aus `A1`“$\forall\alpha,\beta : (\alpha \in [0|+\infty[) \wedge (\beta \in [0|+\infty[) \Rightarrow (\alpha+\beta \in [0|+\infty[)$”,
aus `1.2`“$[0|+\infty[\ \subseteq [0|+\infty]$” und
aus `1.3`“$[0|+\infty]$ ist **AD**”
folgt via **143-2**:
$[0|+\infty[$ ist **AD**.

`g)`

`Thema1.1` $(\alpha \in [-\infty|0]) \wedge (\beta \in [-\infty|0])$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in [-\infty|0] \ldots$”
folgt via **142-3**: $\alpha \leq 0$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\ldots \beta \in [-\infty|0]$”
folgt via **142-3**: $\beta \leq 0$.

`3:` Aus `2.1`“$\alpha \leq 0$” und
aus `2.2`“$\beta \leq 0$”
folgt via **109-21**: $\alpha+\beta \leq 0$.

`4:` Aus `3`“$\alpha+\beta \leq 0$”
folgt via **142-3**: $\alpha+\beta \in [-\infty|0]$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | “$\forall\alpha,\beta : (\alpha \in [-\infty|0]) \wedge (\beta \in [-\infty|0]) \Rightarrow (\alpha+\beta \in [-\infty|0])$”

...

<u>Beweis</u> **143-3** g)

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$

$$(\alpha \in [-\infty|0]) \wedge (\beta \in [-\infty|0]) \wedge (\gamma \in [-\infty|0]).$$

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in [-\infty|0] \ldots$"
folgt via **142-3**: $\beta \leq 0$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \gamma \in [-\infty|0]$"
folgt via **142-3**: $\gamma \leq 0$.

`3:` Aus `2.1`"$\beta \leq 0$" und
aus `2.2`"$\gamma \leq 0$"
folgt via **DGVZ**: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

`A2` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha \in [-\infty|0]) \wedge (\beta \in [-\infty|0]) \wedge (\gamma \in [-\infty|0]) \Rightarrow (\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)$"

`2:` Aus `A1`"$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in [-\infty|0]) \wedge (\beta \in [-\infty|0]) \Rightarrow (\alpha + \beta \in [-\infty|0])$",
aus `A2`"$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha \in [-\infty|0]) \wedge (\beta \in [-\infty|0]) \wedge (\gamma \in [-\infty|0]) \Rightarrow (\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)$"
folgt via **143-1(Def)**: $[-\infty|0]$ ist **AD**.

Beweis **143-3** `h)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha \in]-\infty|0[) \wedge (\beta \in]-\infty|0[)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in]-\infty|0[\ldots$"
folgt via **142-3**: $\mathbb{R} \ni \alpha < 0$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots \beta \in]-\infty|0[$"
folgt via **142-3**: $\mathbb{R} \ni \beta < 0$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\alpha \in \mathbb{R}$.

`3.2:` Aus `2.2`
folgt: $\beta \in \mathbb{R}$.

`3.3:` Aus `2.1`"$\ldots \alpha < 0$" und
aus `2.2`"$\ldots \beta < 0$"
folgt via **109-21**: $\alpha + \beta < 0$.

`4:` Aus `3.1`"$\alpha \in \mathbb{R}$" und
aus `3.2`"$\beta \in \mathbb{R}$"
folgt via $+$**SZ**: $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4`"$\alpha + \beta \in \mathbb{R}$" und
aus `3.3`"$\alpha + \beta < 0$"
folgt via **142-3**: $\alpha + \beta \in]-\infty|0[$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in]-\infty|0[) \wedge (\beta \in]-\infty|0[) \Rightarrow (\alpha + \beta \in]-\infty|0[)$"

`1.2:` Via **142-5** gilt: $]-\infty|0[\subseteq [-\infty|0]$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $[-\infty|0]$ ist **AD**.

`2:` Aus `A1`"$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in]-\infty|0[) \wedge (\beta \in]-\infty|0[) \Rightarrow (\alpha + \beta \in]-\infty|0[)$",
aus `1.2`"$]-\infty|0[\subseteq [-\infty|0]$" und
aus `1.3`"$[-\infty|0]$ ist **AD**"
folgt via **143-2**: $]-\infty|0[$ ist **AD**.

Beweis **143-3** `i)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha \in \,]-\infty|0]\,) \wedge (\beta \in \,]-\infty|0]\,)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \,]-\infty|0]\ldots$"
folgt via **142-3**: $\alpha \leq 0$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \,]-\infty|0]\ldots$" und
aus **142-9**"$]-\infty|0] \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathbb{R}$.

`2.3:` Aus `Thema1.1`"$\ldots\beta \in \,]-\infty|0]$"
folgt via **142-3**: $\beta \leq 0$.

`2.4:` Aus `Thema1.1`"$\ldots\beta \in \,]-\infty|0]$" und
aus **142-9**"$]-\infty|0] \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $\beta \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Aus `2.1`"$\alpha \leq 0$" und
aus `2.3`"$\beta \leq 0$"
folgt via **109-21**: $\alpha + \beta \leq 0$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\alpha \in \mathbb{R}$" und
aus `2.4`"$\beta \in \mathbb{R}$"
folgt via +**SZ**: $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3.2`"$\alpha + \beta \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < \alpha + \beta$.

`5:` Aus `4`"$-\infty < \alpha + \beta$" und
aus `3.1`"$\alpha + \beta \leq 0$"
folgt via **142-3**: $\alpha + \beta \in \,]-\infty|0]$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1`	"$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \,]-\infty|0]\,) \wedge (\beta \in \,]-\infty|0]\,) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \,]-\infty|0]\,)$"

...

<u>Beweis **143-3**</u> `i)`

...

`1.2:` Via **142-5** gilt: $]-\infty|0] \subseteq [-\infty|0]$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $[-\infty|0]$ ist **AD**.

`2:` Aus `A1` “$\forall\alpha,\beta : (\alpha \in\,]-\infty|0]) \wedge (\beta \in\,]-\infty|0]) \Rightarrow (\alpha+\beta \in\,]-\infty|0])$”,
aus `1.2` “$]-\infty|0] \subseteq [-\infty|0]$” und
aus `1.3` “$[-\infty|0]$ ist **AD**”
folgt via **143-2**: $]-\infty|0]$ ist **AD**.

Beweis **143-3** `j)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha \in [-\infty|0[) \wedge (\beta \in [-\infty|0[)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in [-\infty|0[\ldots$"
folgt via **142-3**: $\alpha < 0$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots\beta \in [-\infty|0[$"
folgt via **142-3**: $\beta < 0$.

`3:` Aus `2.1`"$\alpha < 0$" und
aus `2.2`"$\beta < 0$"
folgt via **109-21**: $\alpha + \beta < 0$.

`4:` Aus `3`"$\alpha + \beta < 0$"
folgt via **142-3**: $\alpha + \beta \in [-\infty|0[$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in [-\infty|0[) \wedge (\beta \in [-\infty|0[) \Rightarrow (\alpha + \beta \in [-\infty|0[)$"

`1.2:` Via **142-5** gilt: $[-\infty|0[\subseteq [-\infty|0]$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $[-\infty|0]$ ist **AD**.

`2:` Aus `A1`"$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in [-\infty|0[) \wedge (\beta \in [-\infty|0[) \Rightarrow (\alpha + \beta \in [-\infty|0[)$",
aus `1.2`"$[-\infty|0[\subseteq [-\infty|0]$" und
aus `1.3`"$[-\infty|0]$ ist **AD**"
folgt via **143-2**: $[-\infty|0[$ ist **AD**.

$\square$

143-4. Mitunter ist es hilfreich, an Hand folgender Kriterien ausschließen zu können, dass eine Klasse **AD** ist:

143-4(Satz)

a) *Aus* "$x \in E$" *und* "$y \in E$" *und* "$x + y \notin E$" *folgt* "$\neg(E$ *ist* $\mathbf{AD})$".

b) *Aus* "$x \in E$" *und* "$y \in E$" *und* "$z \in E$" *und* "$x \cdot (y+z) \neq x \cdot y + x \cdot z$" *folgt* "$\neg(E$ *ist* $\mathbf{AD})$".

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **143-4**</u> `a)` `VS` gleich $(x \in E) \wedge (y \in E) \wedge (x + y \notin E)$.

`1:` Es gilt: $(E \text{ ist } \mathbf{AD}) \vee (\neg(E \text{ ist } \mathbf{AD}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` E ist **AD**.

`2:` Aus `1.1.Fall`“E ist **AD**,
aus `VS` gleich “$x \in E \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y \in E \ldots$”
folgt via **143-1(Def)**: $x + y \in E$.

`3:` Es gilt `2`“$x + y \in E$” .
Es gilt `VS` gleich “$\ldots x + y \notin E$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(E \text{ ist } \mathbf{AD})$.

`1.2.Fall` $\neg(E \text{ ist } \mathbf{AD})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(E \text{ ist } \mathbf{AD})$.

`b)` `VS` gleich $(x \in E) \wedge (y \in E) \wedge (z \in E) \wedge (x \cdot (y + z) \neq x \cdot y + x \cdot z)$.

`1:` Es gilt: $(E \text{ ist } \mathbf{AD}) \vee (\neg(E \text{ ist } \mathbf{AD}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` E ist **AD**.

`2:` Aus `1.1.Fall`“E ist **AD**,
aus `VS` gleich “$x \in E \ldots$”,
aus `VS` gleich “$\ldots y \in E \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots z \in E \ldots$”
folgt via **143-1(Def)**: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`3:` Es gilt `2`“$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$” .
Es gilt `VS` gleich “$\ldots x \cdot (y + z) \neq x \cdot y + x \cdot z$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(E \text{ ist } \mathbf{AD})$.

`1.2.Fall` $\neg(E \text{ ist } \mathbf{AD})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(E \text{ ist } \mathbf{AD})$.

□

143-5. Zur Vorbereitung des Beweises von **143-6** wird nun ein wenig gerechnet:

143-5(Satz)

a) $\mathsf{nan}\cdot(1+(-1))=0.$

b) $\mathsf{nan}\cdot 1+\mathsf{nan}\cdot(-1)=\mathsf{nan}.$

c) $\mathsf{nan}\cdot(1+(-1))\neq\mathsf{nan}\cdot 1+\mathsf{nan}\cdot(-1).$

`RECH`-**Notation**.

Beweis **143-5**

`1.1:`

$$\begin{aligned}&\mathsf{nan}\cdot(1+(-1))\\&=\mathsf{nan}\cdot(1-1)\\&\stackrel{\mathbf{102-10}}{=}\mathsf{nan}\cdot 0\\&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}0.\end{aligned}$$

`1.2:`

$$\begin{aligned}&\mathsf{nan}\cdot 1+\mathsf{nan}\cdot(-1)\\&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\mathsf{nan}\cdot 1+(-\mathsf{nan}\cdot 1)\\&=\mathsf{nan}\cdot 1-\mathsf{nan}\cdot 1\\&\stackrel{\mathbf{114-11}}{=}\mathsf{nan}-\mathsf{nan}\\&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=}\mathsf{nan}.\end{aligned}$$

`2.a):` Aus `1.1` folgt: $\mathsf{nan}\cdot(1+(-1))=0.$

`2.b):` Aus `1.2` folgt: $\mathsf{nan}\cdot 1+\mathsf{nan}\cdot(-1)=\mathsf{nan}.$

`2.1:` Aus `1.1` “$\mathsf{nan}\cdot(1+(-1))=\ldots=0$” und aus **95-7** “$0\neq\mathsf{nan}$” folgt: $\mathsf{nan}\cdot(1+(-1))\neq\mathsf{nan}.$

`3.c):` Aus `2.1` “$\mathsf{nan}\cdot(1+(-1))\neq\mathsf{nan}$” und aus `1.2` “$\mathsf{nan}\cdot 1+\mathsf{nan}\cdot(-1)=\ldots=\mathsf{nan}$” folgt: $\mathsf{nan}\cdot(1+(-1))\neq\mathsf{nan}\cdot 1+\mathsf{nan}\cdot(-1).$

□

143-6. Hier werden fünf Klassen, die *nicht* **AD** sind, angegeben:

143-6(Satz)

a) $\neg(\mathbb{S}$ *ist* **AD**$)$.

b) $\neg(\mathbb{T}$ *ist* **AD**$)$.

c) $\neg(\mathbb{B}$ *ist* **AD**$)$.

d) $\neg(\mathbb{A}$ *ist* **AD**$)$.

e) $\neg(\mathcal{U}$ *ist* **AD**$)$.

Beweis **143-6**

`RECH.`$\le$-**Notation**.

Beweis **143-6** a)

1: Aus **AAVI**"$(+\infty)+(-\infty)=\mathsf{nan}$"
folgt via **95-21**: $(+\infty)+(-\infty)\notin\mathbb{S}$.

2: Aus **95-11**"$+\infty\in\mathbb{S}$",
aus **95-11**"$-\infty\in\mathbb{S}$" und
aus 1"$(+\infty)+(-\infty)\notin\mathbb{S}$"
folgt via **143-4**: $\neg(\mathbb{S}$ ist **AD**$)$.

b)

1: Aus **100-7**"$-1\in\mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R}\subseteq\mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $-1\in\mathbb{T}$.

2: Aus **95-12**"$\mathsf{nan}\in\mathbb{T}$",
aus **95-12**"$1\in\mathbb{T}$,
aus 1"$-1\in\mathbb{T}$" und
aus **143-5**"$\mathsf{nan}\cdot(1+(-1))\neq\mathsf{nan}\cdot 1+\mathsf{nan}\cdot(-1)$"
folgt via **143-4**: $\neg(\mathbb{T}$ ist **AD**$)$.

<u>Beweis **143-6**</u> `c)`

`1:` Aus **AAVI**"$(+\infty)+(-\infty)=\mathsf{nan}$" und
aus **101-7**"$\mathsf{nan}\notin\mathbb{B}$"
folgt: $(+\infty)+(-\infty)\notin\mathbb{B}$.

`2:` Aus **101-7**"$+\infty\in\mathbb{B}$",
aus **101-7**"$-\infty\in\mathbb{B}$" und
aus `1`"$(+\infty)+(-\infty)\notin\mathbb{B}$"
folgt via **143-4**: $\neg(\mathbb{B}\text{ ist }\mathbf{AD})$.

`d)`

`1.1:` Aus **95-5**"1 Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $1\in\mathbb{A}$.

`1.2:` Aus **100-7**"$-1\in\mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R}\subseteq\mathbb{A}$"
folgt via **0-4**: $-1\in\mathbb{A}$.

`2:` Aus **AAI**"$\mathsf{nan}\in\mathbb{A}$",
aus `1.1`"$1\in\mathbb{A}$",
aus `1.2`"$-1\in\mathbb{A}$" und
aus **143-5**"$\mathsf{nan}\cdot(1+(-1))\neq\mathsf{nan}\cdot1+\mathsf{nan}\cdot(-1)$"
folgt via **143-4**: $\neg(\mathbb{A}\text{ ist }\mathbf{AD})$.

`e)`

`1.1:` Aus **AAI**"∞ Menge"
folgt via **0-22**: $\infty\in\mathcal{U}$.

`1.2:` Aus **AAI**"$\infty\notin\mathbb{A}$"
folgt via **96-14**: $\infty+\infty=\mathcal{U}$.

`2:` Via **94-1** gilt: $\mathcal{U}\notin\mathcal{U}$.

`3:` Aus `1.2`"$\infty+\infty=\mathcal{U}$" und
aus `2`"$\mathcal{U}\notin\mathcal{U}$"
folgt: $\infty+\infty\notin\mathcal{U}$.

`4:` Aus `1.1`"$\infty\in\mathcal{U}$",
aus `1.1`"$\infty\in\mathcal{U}$" und
aus `3`"$\infty+\infty\notin\mathcal{U}$"
folgt via **143-4**: $\neg(\mathcal{U}\text{ ist }\mathbf{AD})$.

$\square$

143-7. In Klassen, die **AD** sind, steht die folgende, vertraute Gleichung zur Verfügung:

143-7(Satz)

Es gelte:

→) $x \in E$.

→) $y \in E$.

→) $z \in E$.

→) $w \in E$.

→) E *ist* **AD**.

Dann folgt "$(x + y) \cdot (z + w) = (x \cdot z + x \cdot w) + (y \cdot z + y \cdot w)$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **143-7**

1: Aus →) "E ist **AD**",
aus →) "$x \in E$" und
aus →) "$y \in E$"
folgt via **143-1(Def)**: $x + y \in E$.

2: Aus →) "E ist **AD**",
aus 1 "$x + y \in E$",
aus →) "$z \in E$" und
aus →) "$w \in E$"
folgt via **143-1(Def)**: $(x + y) \cdot (z + w) = (x + y) \cdot z + (x + y) \cdot w$.

...

Beweis **143-7**

...

3.1: Aus →) “E ist **AD**”, aus →) “$z \in E$”, aus →) “$x \in E$” und aus →) “$y \in E$” folgt via **143-1(Def)**: $z \cdot (x+y) = z \cdot x + z \cdot y$.

3.2: Aus →) “E ist **AD**”, aus →) “$w \in E$”, aus →) “$x \in E$” und aus →) “$y \in E$” folgt via **143-1(Def)**: $w \cdot (x+y) = w \cdot x + w \cdot y$.

4:

$$\begin{aligned}
&(x+y)\cdot(z+w)\\
&\stackrel{2}{=} (x+y)\cdot z + (x+y)\cdot w\\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} z\cdot(x+y) + (x+y)\cdot w\\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} z\cdot(x+y) + w\cdot(x+y)\\
&\stackrel{3.1}{=} (z\cdot x + z\cdot y) + w\cdot(x+y)\\
&\stackrel{3.2}{=} (z\cdot x + z\cdot y) + (w\cdot x + w\cdot y)\\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (x\cdot z + z\cdot y) + (w\cdot x + w\cdot y)\\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (x\cdot z + y\cdot z) + (w\cdot x + w\cdot y)\\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (x\cdot z + y\cdot z) + (x\cdot w + w\cdot y)\\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (x\cdot z + y\cdot z) + (x\cdot w + y\cdot w)\\
&\stackrel{\mathbf{103-6}}{=} (x\cdot z + x\cdot w) + (y\cdot z + y\cdot w).
\end{aligned}$$

5: Aus 4 folgt: $(x+y)\cdot(z+w) = (x\cdot z + x\cdot w) + (y\cdot z + y\cdot w)$.

□

143-8. Unter Bezugnahme auf **143-3** gelingt die vorliegende, im Weiteren gut zitierbare Re-Formulierung und Spezialisierung von **143-7**:

143-8(Satz)

a) *Aus* “$(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R}) \wedge (w \in \mathbb{R})$”

folgt “$(x+y) \cdot (z+w) = (x \cdot z + x \cdot w) + (y \cdot z + y \cdot w)$”.

b) *Aus* “$(0 \le x) \wedge (0 \le y) \wedge (0 \le z) \wedge (0 \le w)$”

folgt “$(x+y) \cdot (z+w) = (x \cdot z + x \cdot w) + (y \cdot z + y \cdot w)$”.

c) *Aus* “$(x \le 0) \wedge (y \le 0) \wedge (z \le 0) \wedge (w \le 0)$”

folgt “$(x+y) \cdot (z+w) = (x \cdot z + x \cdot w) + (y \cdot z + y \cdot w)$”.

d) *Aus* “$(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (z \in \mathbb{C}) \wedge (w \in \mathbb{C})$”

folgt “$(x+y) \cdot (z+w) = (x \cdot z + x \cdot w) + (y \cdot z + y \cdot w)$”.

RECH-**Notation**.

Beweis **143-8** a) VS gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R}) \wedge (w \in \mathbb{R})$.

Aus VS gleich “$x \in \mathbb{R} \ldots$”,
aus VS gleich “$\ldots y \in \mathbb{R} \ldots$”,
aus VS gleich “$\ldots z \in \mathbb{R} \ldots$”,
aus VS gleich “$\ldots w \in \mathbb{R}$” und
aus **143-3**“$\mathbb{R}$ ist **AD**”
folgt via **143-7**: $(x+y) \cdot (z+w) = (x \cdot z + x \cdot w) + (y \cdot z + y \cdot w)$.

<u>Beweis **143-8**</u> `b)` `VS` gleich $(0 \le x) \wedge (0 \le y) \wedge (0 \le z) \wedge (0 \le w)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$0 \le x \ldots$”
folgt via **142-3**: $x \in [0|+\infty]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots 0 \le y \ldots$”
folgt via **142-3**: $y \in [0|+\infty]$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$\ldots 0 \le z \ldots$”
folgt via **142-3**: $z \in [0|+\infty]$.

`1.4:` Aus `VS` gleich “$\ldots 0 \le w$”
folgt via **142-3**: $w \in [0|+\infty]$.

`2:` Aus `1.1`“$x \in [0|+\infty]$”,
aus `1.2`“$y \in [0|+\infty]$”,
aus `1.3`“$z \in [0|+\infty]$”,
aus `1.4`“$w \in [0|+\infty]$” und
aus **143-3**“$[0|+\infty]$ ist **AD**”
folgt via **143-7**: $(x+y)\cdot(z+w) = (x\cdot z + x\cdot w) + (y\cdot z + y\cdot w)$.

`c)` `VS` gleich $(x \le 0) \wedge (y \le 0) \wedge (z \le 0) \wedge (w \le 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \le 0 \ldots$”
folgt via **142-3**: $x \in [-\infty|0]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots y \le 0 \ldots$”
folgt via **142-3**: $y \in [-\infty|0]$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$\ldots z \le 0 \ldots$”
folgt via **142-3**: $z \in [-\infty|0]$.

`1.4:` Aus `VS` gleich “$\ldots w \le 0$”
folgt via **142-3**: $w \in [-\infty|0]$.

`2:` Aus `1.1`“$x \in [-\infty|0]$”,
aus `1.2`“$y \in [-\infty|0]$”,
aus `1.3`“$z \in [-\infty|0]$”,
aus `1.4`“$w \in [-\infty|0]$” und
aus **143-3**“$[-\infty|0]$ ist **AD**”
folgt via **143-7**: $(x+y)\cdot(z+w) = (x\cdot z + x\cdot w) + (y\cdot z + y\cdot w)$.

<u>Beweis **143-8**</u> `d)` `VS` gleich $$(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (z \in \mathbb{C}) \wedge (w \in \mathbb{C}).$$

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{C} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots w \in \mathbb{C}$" und
aus **143-3** "$\mathbb{C}$ ist **AD**"
folgt via **143-7**: $$(x + y) \cdot (z + w) = (x \cdot z + x \cdot w) + (y \cdot z + y \cdot w).$$

$\square$

B2F: Binomische 2er Formeln.
B2Fi: Binomische 2er Formeln i.

Ersterstellung: 05/08/10 **Letzte Änderung: 17/03/12**

144-1. Es gilt stets $2 \cdot x = x + x$:

144-1(Satz)

$$2 \cdot x = x + x.$$

`RECH`-**Notation**.

Beweis **144-1**

`REIM`-**Notation**.

`Thema1.1` $\alpha \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**:
$$(\alpha \in \mathbb{R}) \vee (\alpha = \mathsf{nan}) \vee (\alpha = +\infty) \vee (\alpha = -\infty).$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Aus `2.1.Fall`"$\alpha \in \mathbb{R}$"
folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $\alpha \cdot (1+1) = \alpha \cdot 1 + \alpha \cdot 1$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall`"$\alpha \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $\alpha \in \mathbb{A}$.

`4:` Aus `3.2`"$\alpha \in \mathbb{A}$"
folgt via **FSM**1: $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

`5:`
$$2 \cdot \alpha \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} \alpha \cdot 2 \stackrel{\mathbf{109-25(Def)}}{=} \alpha \cdot (1+1) \stackrel{3.1}{=} \alpha \cdot 1 + \alpha \cdot 1 \stackrel{4}{=} \alpha + \alpha.$$

`6:` Aus `5`
folgt: $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$.

...

...

Beweis **144-1**

...

`Thema1.1` $\alpha \in \mathbb{T}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $\alpha = \mathsf{nan}$.

3: Aus **109-26** "$2 \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $2 \in \mathbb{T}$.

4: Aus **109-26** "$0 \neq 2 \ldots$" und
aus 3 "$2 \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $2 \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

5:
$$2 \cdot \alpha \overset{\texttt{2.2.Fall}}{=} 2 \cdot \mathsf{nan} \overset{4}{=} \mathsf{nan} \overset{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{nan} \overset{\texttt{2.2.Fall}}{=} \alpha + \alpha.$$

7: Aus 6
folgt: $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$.

...

...

Beweis **144-1**

...

`Thema1.1` $\alpha \in \mathbb{T}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $\alpha = +\infty$.

`3:` Aus **109-26**"$0 < 2$"
folgt via **107-22**: $2 \cdot (+\infty) = +\infty$.

`4:`

$$2 \cdot \alpha \overset{\texttt{2.3.Fall}}{=} 2 \cdot (+\infty) \overset{3}{=} +\infty \overset{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + (+\infty) \overset{\texttt{2.3.Fall}}{=} \alpha + \alpha.$$

`5:` Aus 4
folgt: $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$.

...

...

Beweis **144-1**

...

`Thema1.1` $\alpha \in \mathbb{T}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $\alpha = -\infty$.

3: Aus **109-26**“$0 < 2$”
folgt via **107-22**: $2 \cdot (-\infty) = -\infty$.

4: $$2 \cdot \alpha \stackrel{\texttt{2.4.Fall}}{=} 2 \cdot (-\infty) \stackrel{3}{=} -\infty \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} (-\infty) + (-\infty) \stackrel{\texttt{2.4.Fall}}{=} \alpha + \alpha.$$

5: Aus 4
folgt: $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{T}) \Rightarrow (2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha)$”

<u>Beweis **144-1**</u>

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ β Zahl.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"β Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}\beta \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}\beta \in \mathbb{T})$.

`2.2:` Aus **109-26**"$2 \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $2 \in \mathbb{T}$.

`3.1:` Aus `2.1`"$\mathsf{Re}\beta \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{T}) \Rightarrow (2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha)$"
folgt: $2 \cdot \mathsf{Re}\beta = (\mathsf{Re}\beta) + (\mathsf{Re}\beta)$.

`3.2:` Aus `2.1`"$\ldots \mathsf{Im}\beta \in \mathbb{T}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{T}) \Rightarrow (2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha)$"
folgt: $2 \cdot \mathsf{Im}\beta = (\mathsf{Im}\beta) + (\mathsf{Im}\beta)$.

`4:`
$$2 \cdot \beta$$
$$\stackrel{\mathbf{DG}\mathsf{i}}{=} 2 \cdot (\mathsf{Re}\beta) + \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (\mathsf{Im}\beta))$$
$$\stackrel{\mathsf{3.1}}{=} ((\mathsf{Re}\beta) + (\mathsf{Re}\beta)) + \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (\mathsf{Im}\beta))$$
$$\stackrel{\mathsf{3.2}}{=} ((\mathsf{Re}\beta) + (\mathsf{Re}\beta)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}\beta) + (\mathsf{Im}\beta))$$
$$\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} \beta + \beta.$$

`6:` Aus `5`
folgt: $2 \cdot \beta = \beta + \beta$.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}\forall \beta : (\beta \text{ Zahl}) \Rightarrow (2 \cdot \beta = \beta + \beta)\text{"}}$

...

Beweis **144-1**

...

2: Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` x Zahl.

Aus `2.1.Fall` "x Zahl" und
aus `A2` gleich "$\forall \beta : (\beta \text{ Zahl}) \Rightarrow (2 \cdot \beta = \beta + \beta)$"
folgt: $2 \cdot x = x + x$.

`2.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

3.1: Aus `2.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $2 \cdot x = \mathcal{U}$.

3.2: Aus `2.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-14**: $x + x = \mathcal{U}$.

4: $$2 \cdot x \stackrel{3.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{3.2}{=} x + x.$$

5: Aus 4
folgt: $2 \cdot x = x + x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $2 \cdot x = x + x$.

$\square$

144-2. Die vertrauten **Binomischen 2er Formeln** gelten nur unter - wechselnden - Zusatzbedingungen. Interessanter Weise gilt $(x+y)\cdot(x-y)=x\cdot x-y\cdot y$ auch für $x,y\in\mathbb{T}$, so dass diese Gleichung ohne Bezug zu Klassen, die **AD** sind, bewiesen wird:

144-2(Satz) (B2F: Binomische 2er Formeln)

a) *Aus* "$x\in E$" *und* "$y\in E$" *und* "E *ist* **AD**" *folgt* "$(x+y)\cdot(x+y)=(x\cdot x+y\cdot y)+2\cdot(x\cdot y)$".

b) *Aus* "$x\in\mathbb{R}$" *und* "$y\in\mathbb{R}$" *folgt* "$(x+y)\cdot(x+y)=(x\cdot x+y\cdot y)+2\cdot(x\cdot y)$".

c) *Aus* "$0\leq x$" *und* "$0\leq y$" *folgt* "$(x+y)\cdot(x+y)=(x\cdot x+y\cdot y)+2\cdot(x\cdot y)$".

d) *Aus* "$x\leq 0$" *und* "$y\leq 0$" *folgt* "$(x+y)\cdot(x+y)=(x\cdot x+y\cdot y)+2\cdot(x\cdot y)$".

e) *Aus* "$x\in\mathbb{C}$" *und* "$y\in\mathbb{C}$" *folgt* "$(x+y)\cdot(x+y)=(x\cdot x+y\cdot y)+2\cdot(x\cdot y)$".

f) *Aus* "$x\in\mathbb{R}$" *und* "$y\in\mathbb{R}$" *folgt* "$(x-y)\cdot(x-y)=(x\cdot x+y\cdot y)-2\cdot(x\cdot y)$".

g) *Aus* "$0\leq x$" *und* "$y\leq 0$" *folgt* "$(x-y)\cdot(x-y)=(x\cdot x+y\cdot y)-2\cdot(x\cdot y)$".

h) *Aus* "$x\leq 0$" *und* "$0\leq y$" *folgt* "$(x-y)\cdot(x-y)=(x\cdot x+y\cdot y)-2\cdot(x\cdot y)$".

i) *Aus* "$x\in\mathbb{C}$" *und* "$y\in\mathbb{C}$" *folgt* "$(x-y)\cdot(x-y)=(x\cdot x+y\cdot y)-2\cdot(x\cdot y)$".

j) *Aus* "$x\in\mathbb{R}$" *und* "$y\in\mathbb{R}$" *folgt* "$(x+y)\cdot(x-y)=x\cdot x-y\cdot y$".

k) *Aus* "$x\in\mathbb{T}$" *und* "$y\in\mathbb{T}$" *folgt* "$(x+y)\cdot(x-y)=x\cdot x-y\cdot y$".

l) *Aus* "$x\in\mathbb{C}$" *und* "$y\in\mathbb{C}$" *folgt* "$(x+y)\cdot(x-y)=x\cdot x-y\cdot y$".

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **144-2**</u> `a)` `VS` gleich $(x \in E) \wedge (y \in E) \wedge (E \text{ ist } \mathbf{AD})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots y \in E \ldots$",
aus `VS` gleich "$x \in E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots y \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E$ ist **AD**"
folgt via **143-7**: $(x+y)\cdot(x+y) = (x \cdot x + x \cdot y) + (y \cdot x + y \cdot y)$.

`2:`
$$(x+y)\cdot(x+y)$$
$$\stackrel{1}{=} (x \cdot x + x \cdot y) + (y \cdot x + y \cdot y)$$
$$\stackrel{\mathbf{103-6}}{=} (x \cdot x + y \cdot y) + (x \cdot y + y \cdot x)$$
$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (x \cdot x + y \cdot y) + (x \cdot y + x \cdot y)$$
$$\stackrel{\mathbf{144-1}}{=} (x \cdot x + y \cdot y) + 2 \cdot (x \cdot y).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $(x+y)\cdot(x+y) = (x \cdot x + y \cdot y) + 2 \cdot (x \cdot y)$.

`b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$" und
aus **143-3**"$\mathbb{R}$ ist **AD**"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$(x+y)\cdot(x+y) = (x \cdot x + y \cdot y) + 2 \cdot (x \cdot y)$.

`c)` `VS` gleich $(0 \le x) \wedge (0 \le y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \le x \ldots$"
folgt via **142-3**: $x \in [0|+\infty]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \le y$"
folgt via **142-3**: $y \in [0|+\infty]$.

`2:` Aus `1.1`"$x \in [0|+\infty]$",
aus `1.2`"$y \in [0|+\infty]$" und
aus **143-3**"$[0|+\infty]$" ist **AD**"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$(x+y)\cdot(x+y) = (x \cdot x + y \cdot y) + 2 \cdot (x \cdot y)$.

<u>Beweis **144-2**</u> `d)` `VS` gleich $(x \leq 0) \wedge (y \leq 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq 0 \ldots$"
folgt via **142-3**: $x \in [-\infty|0]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \leq 0$"
folgt via **142-3**: $y \in [-\infty|0]$.

`2:` Aus `1.1`"$x \in [-\infty|0]$",
aus `1.2`"$y \in [-\infty|0]$" und
aus **143-3**"$[-\infty|0]$" ist **AD**"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$(x+y)\cdot(x+y) = (x\cdot x + y\cdot y) + 2\cdot(x\cdot y).$$

`e)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$" und
aus **143-3**"$\mathbb{C}$ ist **AD**"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$(x+y)\cdot(x+y) = (x\cdot x + y\cdot y) + 2\cdot(x\cdot y).$$

`f)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1`"$-y \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:

$$(x+(-y))\cdot(x+(-y)) = (x\cdot x + (-y)\cdot(-y)) + 2\cdot(x\cdot(-y)).$$

`3:`

$$\begin{aligned}
&(x-y)\cdot(x-y)\\
&= (x+(-y))\cdot(x+(-y))\\
&\stackrel{2}{=} (x\cdot x + (-y)\cdot(-y)) + 2\cdot(x\cdot(-y))\\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x\cdot x + y\cdot y) + 2\cdot(x\cdot(-y))\\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x\cdot x + y\cdot y) + 2\cdot(-(x\cdot y))\\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x\cdot x + y\cdot y) + (-2\cdot(x\cdot y))\\
&= (x\cdot x + y\cdot y) - 2\cdot(x\cdot y).
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $(x-y)\cdot(x-y) = (x\cdot x + y\cdot y) - 2\cdot(x\cdot y)$.

<u>Beweis **144-2**</u> `g)` `VS` gleich $(0 \leq x) \wedge (y \leq 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \ldots$" und
aus `1` "$0 \leq -y$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$$(x+(-y)) \cdot (x+(-y)) = (x \cdot x + (-y) \cdot (-y)) + 2 \cdot (x \cdot (-y)).$$

`3:`
$$\begin{aligned}
&(x-y) \cdot (x-y) \\
&= (x+(-y)) \cdot (x+(-y)) \\
&\stackrel{2}{=} (x \cdot x + (-y) \cdot (-y)) + 2 \cdot (x \cdot (-y)) \\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x \cdot x + y \cdot y) + 2 \cdot (x \cdot (-y)) \\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x \cdot x + y \cdot y) + 2 \cdot (-(x \cdot y)) \\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x \cdot x + y \cdot y) + (-2 \cdot (x \cdot y)) \\
&= (x \cdot x + y \cdot y) - 2 \cdot (x \cdot y).
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $(x-y) \cdot (x-y) = (x \cdot x + y \cdot y) - 2 \cdot (x \cdot y)$.

<u>Beweis **144-2**</u> `h)` `VS` gleich $(x \leq 0) \wedge (0 \leq y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y$"
folgt via **109-16**: $-y \leq 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \leq 0 \ldots$" und
aus `1` "$-y \leq 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$$(x + (-y)) \cdot (x + (-y)) = (x \cdot x + (-y) \cdot (-y)) + 2 \cdot (x \cdot (-y)).$$

`3:`
$$\begin{aligned}
&(x - y) \cdot (x - y) \\
&= (x + (-y)) \cdot (x + (-y)) \\
&\stackrel{2}{=} (x \cdot x + (-y) \cdot (-y)) + 2 \cdot (x \cdot (-y)) \\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x \cdot x + y \cdot y) + 2 \cdot (x \cdot (-y)) \\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x \cdot x + y \cdot y) + 2 \cdot (-(x \cdot y)) \\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x \cdot x + y \cdot y) + (-2 \cdot (x \cdot y)) \\
&= (x \cdot x + y \cdot y) - 2 \cdot (x \cdot y).
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $(x - y) \cdot (x - y) = (x \cdot x + y \cdot y) - 2 \cdot (x \cdot y)$.

<u>Beweis **144-2**</u> `i)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **117-4**: $-y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `1` "$-y \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`:
$$(x + (-y)) \cdot (x + (-y)) = (x \cdot x + (-y) \cdot (-y)) + 2 \cdot (x \cdot (-y)).$$

`3:`
$$\begin{aligned}
&(x - y) \cdot (x - y) \\
&= (x + (-y)) \cdot (x + (-y)) \\
&\stackrel{2}{=} (x \cdot x + (-y) \cdot (-y)) + 2 \cdot (x \cdot (-y)) \\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x \cdot x + y \cdot y) + 2 \cdot (x \cdot (-y)) \\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x \cdot x + y \cdot y) + 2 \cdot (-(x \cdot y)) \\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x \cdot x + y \cdot y) + (-2 \cdot (x \cdot y)) \\
&= (x \cdot x + y \cdot y) - 2 \cdot (x \cdot y).
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $(x - y) \cdot (x - y) = (x \cdot x + y \cdot y) - 2 \cdot (x \cdot y)$.

<u>Beweis **144-2**</u> `j)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-y \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $y \cdot x \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$",
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1.1`"$-y \in \mathbb{R}$"
folgt via **143-8**:
$$(x+y)\cdot(x+(-y)) = (x\cdot x + x\cdot(-y)) + (y\cdot x + y\cdot(-y)).$$

`2.2:` Aus `1.2`"$y \cdot x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $y \cdot x - y \cdot x = 0$.

`3:`
$$\begin{aligned}
&(x+y)\cdot(x-y)\\
&= (x+y)\cdot(x+(-y))\\
&\stackrel{2.1}{=} (x\cdot x + x\cdot(-y)) + (y\cdot x + y\cdot(-y))\\
&\stackrel{\mathbf{103-6}}{=} (x\cdot x + y\cdot(-y)) + (x\cdot(-y) + y\cdot x)\\
&\stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (x\cdot x + y\cdot(-y)) + (y\cdot x + x\cdot(-y))\\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x\cdot x + y\cdot(-y)) + (y\cdot x + (-x\cdot y))\\
&= (x\cdot x + y\cdot(-y)) + (y\cdot x - x\cdot y)\\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (x\cdot x + y\cdot(-y)) + (y\cdot x - y\cdot x)\\
&\stackrel{2.2}{=} (x\cdot x + y\cdot(-y)) + 0\\
&\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} x\cdot x + y\cdot(-y)\\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} x\cdot x + (-y\cdot y)\\
&= x\cdot x - y\cdot y.
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

Beweis **144-2** `k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots y \in \mathbb{T}$”
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = \mathsf{nan}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{aligned}
&(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})\\
\vee\quad &(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{nan})\\
\vee\quad &(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty)\\
\vee\quad &(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -\infty)\\
\vee\quad &(x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{R})\\
\vee\quad &(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan})\\
\vee\quad &(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = +\infty)\\
\vee\quad &(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = -\infty)\\
\vee\quad &(x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R})\\
\vee\quad &(x = +\infty) \wedge (y = \mathsf{nan})\\
\vee\quad &(x = +\infty) \wedge (y = +\infty)\\
\vee\quad &(x = +\infty) \wedge (y = -\infty)\\
\vee\quad &(x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R})\\
\vee\quad &(x = -\infty) \wedge (y = \mathsf{nan})\\
\vee\quad &(x = -\infty) \wedge (y = +\infty)\\
\vee\quad &(x = -\infty) \wedge (y = -\infty).
\end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **144-2** `k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

`2.2.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $x + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{T}$.

`3.3:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3.2`"$x \cdot x \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $x \cdot x + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`5:`

$$\begin{aligned}
&(x+y)\cdot(x-y) \\
&\stackrel{3.3}{=} (x+\mathsf{nan})\cdot(x-\mathsf{nan}) \\
&= (x+\mathsf{nan})\cdot(x+(-\mathsf{nan})) \\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (x+\mathsf{nan})\cdot(x+\mathsf{nan}) \\
&\stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan} \\
&\stackrel{\mathbf{97\text{-}5}}{=} \mathsf{nan} \\
&\stackrel{4}{=} x\cdot x + \mathsf{nan} \\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x\cdot x + (-\mathsf{nan}) \\
&\stackrel{\mathbf{97\text{-}5}}{=} x\cdot x + (-\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}) \\
&\stackrel{3.3}{=} x\cdot x + (-y\cdot y) \\
&= x\cdot x - y\cdot y.
\end{aligned}$$

`6:` Aus `5`
folgt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

...

Beweis **144-2** `k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall`“$x \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **AAVI**: $x + (+\infty) = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.3.Fall`“$x \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **97-3**: $x - (+\infty) = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.3.Fall`“$x \in \mathbb{R} \ldots$” und
aus `2.3.Fall`“$x \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

`3.4:` Aus `2.3.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`4:` Aus `3.3`“$x \cdot x \in \mathbb{R}$”
folgt via **97-3**: $x \cdot x - (+\infty) = -\infty$.

`5:`

$$\begin{aligned}
&(x + y) \cdot (x - y)\\
&\stackrel{3.4}{=} (x + (+\infty)) \cdot (x - (+\infty))\\
&\stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot (x - (+\infty))\\
&\stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot (-\infty)\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\infty\\
&\stackrel{4}{=} x \cdot x - (+\infty)\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot x - ((+\infty) \cdot (+\infty))\\
&\stackrel{3.4}{=} x \cdot x - y \cdot y.
\end{aligned}$$

`6:` Aus `5`
folgt: $(x + y) \cdot (x - y) = x \cdot x - y \cdot y$.

...

Beweis **144-2** `k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $x + (-\infty) = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.4.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **97-3**: $x - (-\infty) = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.4.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.3.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

`3.4:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $y = -\infty$.

`4:` Aus `3.3`"$x \cdot x \in \mathbb{R}$"
folgt via **97-3**: $x \cdot x - (+\infty) = -\infty$.

`5:`
$$(x+y)\cdot(x-y) \stackrel{3.4}{=} (x+(-\infty))\cdot(x-(-\infty)) \stackrel{3.1}{=} (-\infty)\cdot(x-(-\infty)) \stackrel{3.2}{=} (-\infty)\cdot(+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\infty \stackrel{4}{=} x\cdot x-(+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x\cdot x-((-\infty)\cdot(-\infty)) \stackrel{3.4}{=} x\cdot x - y\cdot y.$$

`6:` Aus `5`
folgt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

...

Beweis **144-2** `k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.5.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + y = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **100-14**: $\mathsf{nan} - y = \mathsf{nan}$.

`3.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $y \cdot y \in \mathbb{T}$.

`3.4:` Aus `2.5.Fall`
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3.3`"$y \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via **100-14**: $\mathsf{nan} - y \cdot y = \mathsf{nan}$.

`5:`
$$(x+y)\cdot(x-y) \stackrel{3.4}{=} (\mathsf{nan}+y)\cdot(\mathsf{nan}-y) \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan}\cdot(\mathsf{nan}-y) \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan} \stackrel{4}{=} \mathsf{nan} - y\cdot y \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan} - y\cdot y \stackrel{3.4}{=} x\cdot x - y\cdot y.$$

`7:` Aus `6`
folgt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

...

<u>Beweis **144-2**</u> `k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.6.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.6.Fall` folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.6.Fall` folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`4:`

$$\begin{aligned}
&(x+y)\cdot(x-y)\\
&\stackrel{3.1}{=} (\mathsf{nan}+y)\cdot(\mathsf{nan}-y)\\
&\stackrel{3.2}{=} (\mathsf{nan}+\mathsf{nan})\cdot(\mathsf{nan}-\mathsf{nan})\\
&\stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}\cdot(\mathsf{nan}-\mathsf{nan})\\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} \mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} \mathsf{nan}-\mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}-\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}\\
&\stackrel{3.1}{=} x\cdot x-\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}\\
&\stackrel{3.2}{=} x\cdot x-y\cdot y.
\end{aligned}$$

`5:` Aus `4` folgt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

...

<u>Beweis **144-2**</u> `k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.7.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.7.Fall` folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.7.Fall` folgt: $y = +\infty$.

`4:`

$$\begin{aligned}
&(x+y)\cdot(x-y)\\
&\stackrel{3.1}{=} (\mathsf{nan}+y)\cdot(\mathsf{nan}-y)\\
&\stackrel{3.2}{=} (\mathsf{nan}+(+\infty))\cdot(\mathsf{nan}-(+\infty))\\
&\stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}\cdot(\mathsf{nan}-(+\infty))\\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} \mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} \mathsf{nan}-(+\infty)\\
&\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}-(+\infty)\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}-(+\infty)\cdot(+\infty)\\
&\stackrel{3.1}{=} x\cdot x-(+\infty)\cdot(+\infty)\\
&\stackrel{3.2}{=} x\cdot x-y\cdot y.
\end{aligned}$$

`5:` Aus `4` folgt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

...

<u>Beweis **144-2**</u> `k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.8.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.8.Fall`
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.8.Fall`
folgt: $y = -\infty$.

`4:`

$$\begin{aligned}
&(x+y)\cdot(x-y)\\
&\stackrel{3.1}{=} (\mathsf{nan}+y)\cdot(\mathsf{nan}-y)\\
&\stackrel{3.2}{=} (\mathsf{nan}+(-\infty))\cdot(\mathsf{nan}-(-\infty))\\
&\stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}\cdot(\mathsf{nan}-(+\infty))\\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} \mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} \mathsf{nan}-(+\infty)\\
&\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}-(+\infty)\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}-(-\infty)\cdot(-\infty)\\
&\stackrel{3.1}{=} x\cdot x-(-\infty)\cdot(-\infty)\\
&\stackrel{3.2}{=} x\cdot x-y\cdot y.
\end{aligned}$$

`5:` Aus `4`
folgt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

...

Beweis **144-2** `k) VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.9.Fall}}$ $(x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.9.Fall`"... $y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + y = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.9.Fall`"... $y \in \mathbb{R}$"
folgt via **97-3**: $(+\infty) - y = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.9.Fall`"... $y \in \mathbb{R}$" und
aus `2.9.Fall`"... $y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $y \cdot y \in \mathbb{R}$.

`3.4:` Aus `2.9.Fall`
folgt: $x = +\infty$.

`4:` Aus `3.3`"$y \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt via **97-3**: $(+\infty) - y \cdot y = +\infty$.

`5:`

$$(x+y)\cdot(x-y) \stackrel{3.4}{=} ((+\infty)+y)\cdot((+\infty)-y) \stackrel{3.1}{=} (+\infty)\cdot((+\infty)-y) \stackrel{3.2}{=} (+\infty)\cdot(+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty \stackrel{4}{=} (+\infty) - y\cdot y \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty)\cdot(+\infty) - y\cdot y \stackrel{3.4}{=} x\cdot x - y\cdot y.$$

`6:` Aus `5`
folgt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

...

<u>Beweis **144-2**</u> `k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.10.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.10.Fall` folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.10.Fall` folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`4:`

$$
\begin{aligned}
&(x + y) \cdot (x - y) \\
&\stackrel{3.1}{=} ((+\infty) + y) \cdot ((+\infty) - y)) \\
&\stackrel{3.2}{=} ((+\infty) + \mathsf{nan}) \cdot ((+\infty) - \mathsf{nan}) \\
&\stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan} \cdot ((+\infty) - \mathsf{nan}) \\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \\
&\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan} \\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} (+\infty) - \mathsf{nan} \\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) - \mathsf{nan} \\
&\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) - \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \\
&\stackrel{3.1}{=} x \cdot x - \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \\
&\stackrel{3.2}{=} x \cdot x - y \cdot y.
\end{aligned}
$$

`5:` Aus `4` folgt: $(x + y) \cdot (x - y) = x \cdot x - y \cdot y$.

...

Beweis **144-2** `k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.11.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.11.Fall` folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.11.Fall` folgt: $y = +\infty$.

`4:`
$$(x+y)\cdot(x-y)$$
$$\stackrel{3.1}{=} ((+\infty)+y)\cdot((+\infty)-y))$$
$$\stackrel{3.2}{=} ((+\infty)+(+\infty))\cdot((+\infty)-(+\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty)\cdot((+\infty)-(+\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} (+\infty)\cdot\mathsf{nan}$$
$$\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$$
$$\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} (+\infty)-(+\infty)$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty)\cdot(+\infty)-(+\infty)\cdot(+\infty)$$
$$\stackrel{3.1}{=} x\cdot x-(+\infty)\cdot(+\infty)$$
$$\stackrel{3.2}{=} x\cdot x-y\cdot y.$$

`5:` Aus `4` folgt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x-y\cdot y$.

...

<u>Beweis **144-2**</u> `k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.12.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.12.Fall` folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.12.Fall` folgt: $y = -\infty$.

`4:`
$$
\begin{aligned}
&(x+y)\cdot(x-y)\\
&\stackrel{3.1}{=} ((+\infty)+y)\cdot((+\infty)-y)\\
&\stackrel{3.2}{=} ((+\infty)+(-\infty))\cdot((+\infty)-(-\infty))\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}\cdot((+\infty)-(-\infty))\\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} \mathsf{nan}\cdot(+\infty)\\
&\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} (+\infty)-(+\infty)\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty)\cdot(+\infty)-(+\infty)\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty)\cdot(+\infty)-(-\infty)\cdot(-\infty)\\
&\stackrel{3.1}{=} x\cdot x-(-\infty)\cdot(-\infty)\\
&\stackrel{3.2}{=} x\cdot x-y\cdot y.
\end{aligned}
$$

`5:` Aus `4` folgt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

...

<u>Beweis **144-2**</u> `k) VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.13.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.13.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + y = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.13.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **97-3**: $(-\infty) - y = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.13.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$" und
aus `2.13.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $y \cdot y \in \mathbb{R}$.

`3.4:` Aus `2.13.Fall`
folgt: $x = -\infty$.

`4:` Aus `3.3`"$y \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt via **97-3**: $(+\infty) - y \cdot y = +\infty$.

`5:`

$$\begin{aligned}
&(x+y)\cdot(x-y)\\
&\stackrel{3.4}{=} ((-\infty)+y)\cdot((-\infty)-y)\\
&\stackrel{3.1}{=} (-\infty)\cdot((-\infty)-y)\\
&\stackrel{3.2}{=} (-\infty)\cdot(-\infty)\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty\\
&\stackrel{4}{=} (+\infty) - y\cdot y\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty)\cdot(-\infty) - y\cdot y\\
&\stackrel{3.4}{=} x\cdot x - y\cdot y.
\end{aligned}$$

`6:` Aus `5`
folgt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

...

<u>Beweis **144-2**</u> `k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.14.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.14.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.14.Fall` folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`4:`
$$\begin{aligned}
&(x+y)\cdot(x-y)\\
&\stackrel{3.1}{=} ((-\infty)+y)\cdot((-\infty)-y)\\
&\stackrel{3.2}{=} ((-\infty)+\mathsf{nan})\cdot((-\infty)-\mathsf{nan})\\
&\stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}\cdot((-\infty)-\mathsf{nan})\\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} \mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} (+\infty)-\mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty)\cdot(-\infty)-\mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} (-\infty)\cdot(-\infty)-\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}\\
&\stackrel{3.1}{=} x\cdot x-\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}\\
&\stackrel{3.2}{=} x\cdot x-y\cdot y.
\end{aligned}$$

`5:` Aus `4` folgt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

...

<u>Beweis **144-2** `k)` `VS` gleich</u> $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.15.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.15.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.15.Fall` folgt: $y = +\infty$.

`4:`
$$
\begin{aligned}
&(x+y)\cdot(x-y)\\
&\stackrel{3.1}{=} ((-\infty)+y)\cdot((-\infty)-y)\\
&\stackrel{3.2}{=} ((-\infty)+(+\infty))\cdot((-\infty)-(+\infty))\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}\cdot((-\infty)-(+\infty))\\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} \mathsf{nan}\cdot(-\infty)\\
&\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} (+\infty)-(+\infty)\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty)\cdot(-\infty)-(+\infty)\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty)\cdot(-\infty)-(+\infty)\cdot(+\infty)\\
&\stackrel{3.1}{=} x\cdot x-(+\infty)\cdot(+\infty)\\
&\stackrel{3.2}{=} x\cdot x-y\cdot y.
\end{aligned}
$$

`5:` Aus 4 folgt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

...

Beweis **144-2** `k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.16.Fall}}$ $(x = -\infty) \wedge (y = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.11.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.11.Fall` folgt: $y = -\infty$.

`4:`
$$
\begin{aligned}
&(x+y)\cdot(x-y)\\
&\stackrel{3.1}{=} ((-\infty)+y)\cdot((-\infty)-y)\\
&\stackrel{3.2}{=} ((-\infty)+(-\infty))\cdot((-\infty)-(-\infty))\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty)\cdot((-\infty)-(-\infty))\\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} (-\infty)\cdot\mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}\\
&\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} (+\infty)-(+\infty)\\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty)\cdot(-\infty)-(-\infty)\cdot(-\infty)\\
&\stackrel{3.1}{=} x\cdot x-(-\infty)\cdot(-\infty)\\
&\stackrel{3.2}{=} x\cdot x-y\cdot y.
\end{aligned}
$$

`5:` Aus `4` folgt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

<u>Beweis **144-2**</u> `1)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{C}$"
folgt via **117-4**: $-y \in \mathbb{C}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $y \cdot x \in \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$",
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `1.1`"$-y \in \mathbb{C}$"
folgt via **143-7**:

$$(x+y)\cdot(x+(-y)) = (x\cdot x + x\cdot(-y)) + (y\cdot x + y\cdot(-y)).$$

`2.2:` Aus `1.2`"$y \cdot x \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-5**: $y \cdot x - y \cdot x = 0$.

`3:`

$$\begin{aligned}
&(x+y)\cdot(x-y)\\
&= (x+y)\cdot(x+(-y))\\
&\overset{2.1}{=} (x\cdot x + x\cdot(-y)) + (y\cdot x + y\cdot(-y))\\
&\overset{\mathbf{103-6}}{=} (x\cdot x + y\cdot(-y)) + (x\cdot(-y) + y\cdot x)\\
&\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x\cdot x + (-y\cdot y)) + (x\cdot(-y) + y\cdot x)\\
&\overset{\mathbf{FSA}}{=} (x\cdot x + (-y\cdot y)) + (y\cdot x + x\cdot(-y))\\
&\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x\cdot x + (-y\cdot y)) + (y\cdot x + (-x\cdot y))\\
&= (x\cdot x + (-y\cdot y)) + (y\cdot x - x\cdot y)\\
&\overset{\mathbf{KGM}}{=} (x\cdot x + (-y\cdot y)) + (y\cdot x - y\cdot x)\\
&\overset{2.2}{=} (x\cdot x + (-y\cdot y)) + 0\\
&\overset{\mathbf{98-12}}{=} x\cdot x + (-y\cdot y)\\
&= x\cdot x - y\cdot y.
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

$\square$

144-3. Mitunter ist es hilfreich eine "i-Version" der **B2F** zur Verfügung zu haben. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - d) - c) - f) - e)`:

144-3(Satz) (B2Fi: Binomische 2er Formeln i)

`a)` *Aus* "$a \in \mathbb{R}$" *und* "$b \in \mathbb{R}$"
folgt "$(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b) = (a \cdot a - b \cdot b) + \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (a \cdot b))$".

`b)` *Aus* "$a \in \mathbb{T}$" *und* "$b \in \mathbb{T}$"
folgt "$(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b) = (a \cdot a - b \cdot b) + \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (a \cdot b))$".

`c)` *Aus* "$a \in \mathbb{R}$" *und* "$b \in \mathbb{R}$"
folgt "$(a - \mathsf{i} \cdot b) \cdot (a - \mathsf{i} \cdot b) = (a \cdot a - b \cdot b) - \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (a \cdot b))$".

`d)` *Aus* "$a \in \mathbb{T}$" *und* "$b \in \mathbb{T}$"
folgt "$(a - \mathsf{i} \cdot b) \cdot (a - \mathsf{i} \cdot b) = (a \cdot a - b \cdot b) - \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (a \cdot b))$".

`e)` *Aus* "$a \in \mathbb{R}$" *und* "$b \in \mathbb{R}$"
folgt "$(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (a - \mathsf{i} \cdot b) = a \cdot a + b \cdot b$".

`f)` *Aus* "$a \in \mathbb{T}$" *und* "$b \in \mathbb{T}$"
folgt "$(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (a - \mathsf{i} \cdot b) = (a \cdot a + b \cdot b) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot b - a \cdot b)$".

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **144-3**</u> `b)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = a$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b$.

`2:` $(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b)$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) - \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b)) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) + \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b))$$

$$\stackrel{1.1}{=} (a \cdot a - \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b)) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) + \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot a)$$

$$\stackrel{1.2}{=} (a \cdot a - b \cdot b) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot b + b \cdot a)$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (a \cdot a - b \cdot b) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot b + a \cdot b)$$

$$\stackrel{\mathbf{144-1}}{=} (a \cdot a - b \cdot b) + \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (a \cdot b)).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b) = (a \cdot a - b \cdot b) + \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (a \cdot b))$.

`a)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $a \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $b \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1.1`"$a \in \mathbb{T}$" und
aus `1.2`"$b \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b) = (a \cdot a - b \cdot b) + \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (a \cdot b))$.

<u>Beweis **144-3**</u> `d)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T}$"
folgt via **117-4**: $-b \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1`"$-b \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$(a + \mathsf{i} \cdot (-b)) \cdot (a + \mathsf{i} \cdot (-b)) = (a \cdot a - (-b) \cdot (-b)) + \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (a \cdot (-b))).$$

`3:`
$$\begin{aligned} & (a - \mathsf{i} \cdot b) \cdot (a - \mathsf{i} \cdot b) \\ \stackrel{\mathbf{110-8}}{=} & (a + \mathsf{i} \cdot (-b)) \cdot (a + \mathsf{i} \cdot (-b)) \\ \stackrel{2}{=} & (a \cdot a - (-b) \cdot (-b)) + \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (a \cdot (-b))) \\ \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} & (a \cdot a - b \cdot b) + \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (a \cdot (-b))) \\ \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} & (a \cdot a - b \cdot b) + \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (-(a \cdot b))) \\ \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} & (a \cdot a - b \cdot b) + \mathsf{i} \cdot (-2 \cdot (a \cdot b)) \\ \stackrel{\mathbf{110-8}}{=} & (a \cdot a - b \cdot b) - \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (a \cdot b)). \end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $(a - \mathsf{i} \cdot b) \cdot (a - \mathsf{i} \cdot b) = (a \cdot a - b \cdot b) - \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (a \cdot b))$.

`c)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $a \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $b \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1.1`"$a \in \mathbb{T}$" und
aus `1.2`"$b \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$$(a - \mathsf{i} \cdot b) \cdot (a - \mathsf{i} \cdot b) = (a \cdot a - b \cdot b) - \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (a \cdot b)).$$

<u>Beweis **144-3**</u> `f)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T}$"
folgt via **117-4**: $-b \in \mathbb{T}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = a$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1` "$-b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot (-b)) = a$.

`2.4:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1` "$-b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot (-b)) = -b$.

...

<u>Beweis **144-3** `f)`</u>

...

`3:`
$$(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot(a-\mathsf{i}\cdot b)$$
$$\overset{\mathbf{100-8}}{=}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot(a+\mathsf{i}\cdot(-b))$$
$$\overset{\mathbf{96-26}}{=}(\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot(-b))-\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot(-b)))$$
$$+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot(-b))+\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot(-b)))$$
$$\overset{\mathsf{2.1}}{=}(a\cdot\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot(-b))-\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot(-b)))$$
$$+\mathsf{i}\cdot(a\cdot\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot(-b))+\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot(-b)))$$
$$\overset{\mathsf{2.2}}{=}(a\cdot\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot(-b))-b\cdot\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot(-b)))$$
$$+\mathsf{i}\cdot(a\cdot\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot(-b))+(b\cdot\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot(-b))))$$
$$\overset{\mathsf{2.3}}{=}(a\cdot a-b\cdot\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot(-b)))+\mathsf{i}\cdot(a\cdot\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot(-b))+b\cdot a)$$
$$\overset{\mathsf{2.3}}{=}(a\cdot a-b\cdot(-b))+\mathsf{i}\cdot(a\cdot(-b)+b\cdot a)$$
$$\overset{\mathbf{FS-\cdot}}{=}(a\cdot a-(-b\cdot b))+\mathsf{i}\cdot(a\cdot(-b)+b\cdot a)$$
$$\overset{\mathbf{FS-+}}{=}(a\cdot a+b\cdot b)+\mathsf{i}\cdot(a\cdot(-b)+b\cdot a)$$
$$\overset{\mathbf{FS-\cdot}}{=}(a\cdot a+b\cdot b)+\mathsf{i}\cdot(-a\cdot b+b\cdot a)$$
$$\overset{\mathbf{98-8}}{=}(a\cdot a+b\cdot b)+\mathsf{i}\cdot(b\cdot a-a\cdot b)$$
$$\overset{\mathbf{KGM}}{=}(a\cdot a+b\cdot b)+\mathsf{i}\cdot(a\cdot b-a\cdot b).$$

`4:` Aus `3` folgt:
$$(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot(a-\mathsf{i}\cdot b)=(a\cdot a+b\cdot b)+\mathsf{i}\cdot(a\cdot b-a\cdot b).$$

<u>Beweis **144-3**</u> `e)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $a \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $b \in \mathbb{T}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$a \in \mathbb{T}$" und
aus `1.2`"$b \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`:

$$(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (a - \mathsf{i} \cdot b) = (a \cdot a + b \cdot b) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot b - a \cdot b).$$

`2.2:` Aus `1.3`"$a \cdot b \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a \cdot b - a \cdot b = 0$.

`4:`

$$\begin{aligned} & (a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (a - \mathsf{i} \cdot b) \\ \stackrel{2.1}{=} & (a \cdot a + b \cdot b) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot b - a \cdot b) \\ \stackrel{3}{=} & (a \cdot a + b \cdot b) + \mathsf{i} \cdot 0 \\ \stackrel{\mathbf{98-18}}{=} & (a \cdot a + b \cdot b) + 0 \\ \stackrel{\mathbf{98-12}}{=} & a \cdot a + b \cdot b. \end{aligned}$$

`5:` Aus `4`
folgt: $(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (a - \mathsf{i} \cdot b) = a \cdot a + b \cdot b$.

□

DKR$\mathbb{T}$: Divisions-KürzungsRegeln $\mathbb{T}$.

Ersterstellung: 05/08/10 **Letzte Änderung: 20/03/12**

145-1. Nun wird ein Hilf-Satz für **145-2** bewiesen:

145-1(Satz)

a) *Aus* "$0 < x$" *und* "$y = +\infty$" *folgt* "$1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y = +\infty$" *folgt* "$1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$".

c) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y = -\infty$" *folgt* "$1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$".

d) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$".

e) *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y = \mathsf{nan}$" *folgt* "$1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$".

RECH.$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis **145-1**</u> `a)` `VS` gleich $(0 < x) \wedge (y = +\infty)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$0 < x$”
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$0 < x$”
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`1.3:` Aus `VS`
folgt: $y = +\infty$.

`2:` Aus `1.1`“$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **137-6**: $1 : x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`“$1 : x \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $1 : x$ Zahl.

`4:` Aus `3`“$1 : x$ Zahl”
folgt via **FSM**0: $(1 : x) \cdot 0 = 0$.

`5:`
$$\begin{aligned} & 1 : (x \cdot y) \\ \stackrel{1.3}{=}\ & 1 : (x \cdot (+\infty)) \\ \stackrel{1.2}{=}\ & 1 : (+\infty) \\ \stackrel{\mathbf{123\text{-}11}}{=}\ & 0 \\ \stackrel{4}{=}\ & (1 : x) \cdot 0 \\ \stackrel{\mathbf{123\text{-}11}}{=}\ & (1 : x) \cdot (1 : (+\infty)) \\ \stackrel{1.3}{=}\ & (1 : x) \cdot (1 : y). \end{aligned}$$

`6:` Aus `5`
folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

<u>Beweis **145-1**</u> `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y = +\infty)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **107-18**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x < 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -x$.

`3:` Aus `2`"$0 < -x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y = +\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$1 : ((-x) \cdot y) = (1 : (-x)) \cdot (1 : y)$.

`4:`
$$\begin{aligned} & 1 : (x \cdot y) \\ \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} & -(-(1 : (x \cdot y))) \\ \stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} & -(1 : (-x \cdot y)) \\ \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} & -(1 : ((-x) \cdot y)) \\ \stackrel{3}{=} & -((1 : (-x)) \cdot (1 : y)) \\ \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} & (-(1 : (-x))) \cdot (1 : y) \\ \stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} & (-(-(1 : x))) \cdot (1 : y) \\ \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} & (1 : x) \cdot (1 : y). \end{aligned}$$

`5:` Aus `4`
folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

...

<u>Beweis **145-1**</u> `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y = +\infty)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $x = 0$.

`2:` Aus `VS` folgt: $y = +\infty$.

`3:` $$1 : (x \cdot y) \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} 1 : (0 \cdot y) \stackrel{2}{=} 1 : (0 \cdot (+\infty)) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} 1 : 0 \stackrel{\textbf{98-24}}{=} 0 \stackrel{\textbf{98-16}}{=} 0 \cdot 0 \stackrel{\textbf{98-24}}{=} (1 : 0) \cdot 0 \stackrel{\textbf{123-11}}{=} (1 : 0) \cdot (1 : (+\infty)) \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} (1 : x) \cdot (1 : (+\infty)) \stackrel{2}{=} (1 : x) \cdot (1 : y).$$

`4:` Aus `3` folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`1.3.Fall` $0 < x$.

Aus `1.3.Fall` "$0 < x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y = +\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

Beweis **145-1** `c)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y = -\infty)$.

`1:` Aus `VS` "$y = -\infty$"
folgt via **100-13**: $-y = +\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1` "$-y = +\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $1 : (x \cdot (-y)) = (1 : x) \cdot (1 : (-y))$.

`3:`

$$1 : (x \cdot y) \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} -(-1 : (x \cdot y)) \stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} -(1 : (-x \cdot y)) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -(1 : (x \cdot (-y))) \stackrel{2}{=} -((1 : x) \cdot (1 : (-y))) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (1 : x) \cdot (-1 : (-y)) \stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} (1 : x) \cdot (-(-(1 : y))) \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} (1 : x) \cdot (1 : y).$$

`5:` Aus `4`
folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

<u>Beweis **145-1**</u> `d)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3.1`"$x \in \mathbb{C}$" und
aus `3.2`"$y \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-4**: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`2.2.Fall` $x = +\infty$.

`3:` Aus `1`"$y \in \mathbb{S}$" und
aus `2.2.Fall`"$x = +\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $1 : (y \cdot x) = (1 : y) \cdot (1 : x)$.

`4:`
$$1 : (x \cdot y) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} 1 : (y \cdot x) \stackrel{3}{=} (1 : y) \cdot (1 : x) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (1 : x) \cdot (1 : y).$$

`5:` Aus `4`
folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

...

Beweis **145-1** `d) VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $x = -\infty$.

`3:` Aus `1`“$y \in \mathbb{S}$” und
aus `2.3.Fall`“$x = -\infty$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $1 : (y \cdot x) = (1 : y) \cdot (1 : x)$.

`4:`
$$1 : (x \cdot y) \stackrel{\text{KGM}}{=} 1 : (y \cdot x) \stackrel{3}{=} (1 : y) \cdot (1 : x) \stackrel{\text{KGM}}{=} (1 : x) \cdot (1 : y).$$

`5:` Aus `4`
folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

<u>Beweis **145-1**</u> `e)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`1:` Aus `VS`
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`2:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = 0$.

`3:`
$$\begin{aligned}
&1 : (x \cdot y)\\
\stackrel{\texttt{2.1.Fall}}{=}\ &1 : (0 \cdot y)\\
\stackrel{1}{=}\ &1 : (0 \cdot \mathsf{nan})\\
\stackrel{\textbf{AAVI}}{=}\ &1 : 0\\
\stackrel{\textbf{98-24}}{=}\ &0\\
\stackrel{\textbf{AAVI}}{=}\ &0 \cdot \mathsf{nan}\\
\stackrel{\textbf{98-24}}{=}\ &(1 : 0) \cdot \mathsf{nan}\\
\stackrel{\textbf{137-9}}{=}\ &(1 : 0) \cdot (1 : \mathsf{nan})\\
\stackrel{\texttt{2.1.Fall}}{=}\ &(1 : x) \cdot (1 : \mathsf{nan})\\
\stackrel{1}{=}\ &(1 : x) \cdot (1 : y).
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

...

Beweis **145-1** `e)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $0 \neq x$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`"$0 \neq x$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **137-32**: $0 \neq 1 : x$.

`4.1:` Aus `2.2.Fall`"$0 \neq x$" und
aus `3.1`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`4.2:` Aus `3.1`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **137-26**: $1 : x \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `3.2`"$0 \neq 1 : x$" und
aus `4.2`"$1 : x \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $(1 : x) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`6:`
$$
\begin{aligned}
& 1 : (x \cdot y) \\
\stackrel{1}{=}\ & 1 : (x \cdot \mathsf{nan}) \\
\stackrel{4.1}{=}\ & 1 : \mathsf{nan} \\
\stackrel{\mathbf{137-9}}{=}\ & \mathsf{nan} \\
\stackrel{5}{=}\ & (1 : x) \cdot \mathsf{nan} \\
\stackrel{\mathbf{137-9}}{=}\ & (1 : x) \cdot (1 : \mathsf{nan}) \\
\stackrel{1}{=}\ & (1 : x) \cdot (1 : y).
\end{aligned}
$$

`7:` Aus `6`
folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

□

145-2. Die vertraute Formel $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{S}$ und falls $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{T}$ oder $x \in \mathbb{T}, y \in \mathbb{R}$:

145-2(Satz)

a) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$" *folgt* "$1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$".

c) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **145-2** `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **145-1**: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`1.2.Fall` $y = +\infty$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1.2.Fall` "$y = +\infty$"
folgt via **145-1**: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`1.3.Fall` $y = -\infty$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1.3.Fall` "$y = -\infty$"
folgt via **145-1**: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

Beweis **145-2** `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{S}) \vee (y = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$y \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **145-1**: $1 : (y \cdot x) = (1 : y) \cdot (1 : x)$.

`3:` $$1 : (x \cdot y) \stackrel{\text{KGM}}{=} 1 : (y \cdot x) \stackrel{2}{=} (1 : y) \cdot (1 : x) \stackrel{\text{KGM}}{=} (1 : x) \cdot (1 : y).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`1.2.Fall` $y = \mathsf{nan}$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1.2.Fall`"$y = \mathsf{nan}$"
folgt via **145-1**: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

<u>Beweis **145-2**</u> `c)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $1 : (y \cdot x) = (1 : y) \cdot (1 : x)$.

`2:`
$$1 : (x \cdot y) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} 1 : (y \cdot x) \stackrel{1}{=} (1 : y) \cdot (1 : x) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (1 : x) \cdot (1 : y).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

□

145-3. Wie in nachfolgenden Beispielen fest gestellt können die Voraussetzungen von **145-2** nicht ohne Weiteres abgeschwächt werden:

145-3.Bemerkung

- Die Aussage
  "$((x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{T})) \Rightarrow (1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y))$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$((x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{S})) \Rightarrow (1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y))$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

145-4. Wie an Hand dieses Beispiels klar gemacht wird, folgt aus $x \in \mathbb{S}$ und $y \in \mathbb{T}$ nicht ohne Weiteres die Gleichung $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$:

<u>145-4.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) $x = +\infty$.

$\rightarrow$) $y = \mathsf{nan}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{S}$.

b) $y \in \mathbb{T}$.

c) $1 : x = 0$.

d) $1 : y = \mathsf{nan}$.

e) $x \cdot y = \mathsf{nan}$.

f) $1 : (x \cdot y) = \mathsf{nan}$.

g) $(1 : x) \cdot (1 : y) = 0$.

h) $1 : (x \cdot y) \neq (1 : x) \cdot (1 : y)$.

145-5. Wie an Hand dieses Beispiels klar gemacht wird, folgt aus $x \in \mathbb{T}$ und $y \in \mathbb{S}$ nicht ohne Weiteres die Gleichung $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$:

145-5.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) $x = \mathsf{nan}$.

$\rightarrow$) $y = -\infty$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{T}$.

b) $y \in \mathbb{S}$.

c) $1 : x = \mathsf{nan}$.

d) $1 : y = 0$.

e) $x \cdot y = \mathsf{nan}$.

f) $1 : (x \cdot y) = \mathsf{nan}$.

g) $(1 : x) \cdot (1 : y) = 0$.

h) $1 : (x \cdot y) \neq (1 : x) \cdot (1 : y)$.

145-6. Nun wird die Gleichung $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$ vorbereitend thematisiert:

145-6(Satz)

a) *Aus* "$\mathsf{Re}x = 0$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$".

b) *Aus* "$\mathsf{Im}x = 0$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$".

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **145-6** `a)` `VS` gleich $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$"
folgt via **130-2**: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$"
folgt via **130-2**: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$"
folgt via **130-2**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$"
folgt via **130-2**: $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`1.5:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{T})$.

`2.1:` Aus `1.3`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$",
aus `1.5`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$",
aus `1.3`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `1.5`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **113-18**:

$$((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) = ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y)).$$

`2.2:` Aus `1.3`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$",
aus `1.5`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$",
aus `1.3`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `1.5`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$"
folgt via **113-18**:

$$((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) = ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

...

<u>Beweis **145-6**</u> `a)` `VS` gleich $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

...

`3:` $\mathsf{ab2}(x \cdot y)$

$$\stackrel{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Re}(x \cdot y)) \cdot (\mathsf{Re}(x \cdot y)) + (\mathsf{Im}(x \cdot y)) \cdot (\mathsf{Im}(x \cdot y))$$

$$\stackrel{1.1}{=} (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{Im}(x \cdot y) \cdot \mathsf{Im}(x \cdot y)$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{Im}(x \cdot y) \cdot \mathsf{Im}(x \cdot y)$$

$$\stackrel{1.2}{=} ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{2.2}{=} ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y)) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{2.1}{=} ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y)) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{\mathbf{FSA}}{=} ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y))$$

$$\stackrel{\mathbf{133-12}}{=} ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot \mathsf{ab2}(y)$$

$$\stackrel{1.4}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$.

`b)` `VS` gleich $(\mathsf{Im}x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}x = 0 \ldots$"
folgt via **130-3**: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = x \cdot (\mathsf{Re}y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}x = 0 \ldots$"
folgt via **130-3**: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = x \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}x = 0 \ldots$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \in \mathbb{T}$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}x = 0 \ldots$"
folgt via **130-3**: $\mathsf{ab2}(x) = x \cdot x$.

`1.5:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{T})$.

...

<u>Beweis **145-6**</u> `b)` `VS` gleich $(\mathsf{Im}x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

...

`2.1:` Aus `1.3`"$x \in \mathbb{T}$",
aus `1.5`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$",
aus `1.3`"$x \in \mathbb{T}$" und
aus `1.5`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **113-18**: $(x \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (x \cdot (\mathsf{Re}y)) = (x \cdot x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y))$.

`2.2:` Aus `1.3`"$x \in \mathbb{T}$",
aus `1.5`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$",
aus `1.3`"$x \in \mathbb{T}$" und
aus `1.5`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$"
folgt via **113-18**: $(x \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y)) = (x \cdot x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`3:`
$$\begin{aligned}
&\mathsf{ab2}(x \cdot y)\\
\stackrel{\mathbf{96-22}}{=}\ &\mathsf{Re}(x \cdot y) \cdot \mathsf{Re}(x \cdot y) + \mathsf{Im}(x \cdot y) \cdot \mathsf{Im}(x \cdot y)\\
\stackrel{1.1}{=}\ &(x \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (x \cdot (\mathsf{Re}y)) + \mathsf{Im}(x \cdot y) \cdot \mathsf{Im}(x \cdot y)\\
\stackrel{1.2}{=}\ &(x \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (x \cdot (\mathsf{Re}y)) + (x \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y))\\
\stackrel{2.1}{=}\ &(x \cdot x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y)) + (x \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y))\\
\stackrel{2.2}{=}\ &(x \cdot x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y)) + (x \cdot x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y))\\
\stackrel{\mathbf{133-12}}{=}\ &(x \cdot x) \cdot \mathsf{ab2}(y)\\
\stackrel{1.4}{=}\ &\mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y).
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$.

$\square$

145-7. Nun wird Hinreichendes für “$\mathsf{ab2}(x\cdot y)=\mathsf{ab2}(x)\cdot\mathsf{ab2}(y)$” angegeben:

145-7(Satz)

a) *Aus* “$\mathsf{Re}x=0$” *folgt* “$\mathsf{ab2}(x\cdot y)=\mathsf{ab2}(x)\cdot\mathsf{ab2}(y)$”.

b) *Aus* “$\mathsf{Im}x=0$” *folgt* “$\mathsf{ab2}(x\cdot y)=\mathsf{ab2}(x)\cdot\mathsf{ab2}(y)$”.

c) *Aus* “$\mathsf{Re}y=0$” *folgt* “$\mathsf{ab2}(x\cdot y)=\mathsf{ab2}(x)\cdot\mathsf{ab2}(y)$”.

d) *Aus* “$\mathsf{Im}y=0$” *folgt* “$\mathsf{ab2}(x\cdot y)=\mathsf{ab2}(x)\cdot\mathsf{ab2}(y)$”.

e) *Aus* “$x\in\mathbb{T}$” *folgt* “$\mathsf{ab2}(x\cdot y)=\mathsf{ab2}(x)\cdot\mathsf{ab2}(y)$”.

f) *Aus* “$y\in\mathbb{T}$” *folgt* “$\mathsf{ab2}(x\cdot y)=\mathsf{ab2}(x)\cdot\mathsf{ab2}(y)$”.

g) *Aus* “$x\in\mathbb{C}$” *und* “$y\in\mathbb{C}$” *folgt* “$\mathsf{ab2}(x\cdot y)=\mathsf{ab2}(x)\cdot\mathsf{ab2}(y)$”.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **145-7** a) VS gleich $\mathsf{Re}x = 0$.

1: Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall y Zahl.

Aus VS gleich "$\mathsf{Re}x = 0$" und
aus 1.1.Fall "y Zahl"
folgt via **145-6**: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$.

1.2.Fall $y \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.2.Fall "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.2.Fall "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-22**: $\mathsf{ab2}(y) = \mathcal{U}$.

3: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{ab2}(\mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{96-22}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$.

4: Aus 3
folgt: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$.

Beweis **145-7** b) VS gleich $\mathsf{Im}x = 0.$

1: Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A}).$

Fallunterscheidung

1.1.Fall y Zahl.

Aus VS gleich "$\mathsf{Im}x = 0$" und
aus 1.1.Fall "y Zahl"
folgt via **145-6**: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y).$

1.2.Fall $y \notin \mathbb{A}.$

2.1: Aus 1.2.Fall "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}.$

2.2: Aus 1.2.Fall "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-22**: $\mathsf{ab2}(y) = \mathcal{U}.$

3: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{ab2}(\mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{96-22}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y).$

4: Aus 3
folgt: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y).$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y).$

c) VS gleich $\mathsf{Re}y = 0.$

1: Aus VS gleich "$\mathsf{Re}y = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\mathsf{ab2}(y \cdot x) = \mathsf{ab2}(y) \cdot \mathsf{ab2}(x).$

2: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) \stackrel{\mathbf{FSM}}{=} \mathsf{ab2}(y \cdot x) \stackrel{1}{=} \mathsf{ab2}(y) \cdot \mathsf{ab2}(x) \stackrel{\mathbf{FSM}}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y).$

3: Aus 2
folgt: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y).$

d) VS gleich $\mathsf{Im}y = 0.$

1: Aus VS gleich "$\mathsf{Im}y = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen b): $\mathsf{ab2}(y \cdot x) = \mathsf{ab2}(y) \cdot \mathsf{ab2}(x).$

2: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) \stackrel{\mathbf{FSM}}{=} \mathsf{ab2}(y \cdot x) \stackrel{1}{=} \mathsf{ab2}(y) \cdot \mathsf{ab2}(x) \stackrel{\mathbf{FSM}}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y).$

3: Aus 2
folgt: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y).$

Beweis **145-7** `e)` `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}x = 0$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Im}x = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$.

`f)` `VS` gleich $y \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}y = 0$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Im}y = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$.

`g)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **128-9**: $\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$" und
aus `1.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

`2.3:` Aus `1.2`"$\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{R}$"
folgt via **DG**$\mathbb{R}$:
$$\mathsf{ab2}(y) \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x))$$
$$= \mathsf{ab2}(y) \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x)) + \mathsf{ab2}(y) \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)).$$

`3.1:` Aus `2.1`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **DG**$\mathbb{R}$:
$$((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y))$$
$$= ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x)) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

`3.2:` Aus `2.2`"$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **DG**$\mathbb{R}$:
$$((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y))$$
$$= ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

...

<u>Beweis **145-7**</u> `g)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

...

`4:` $\mathsf{ab2}(x \cdot y)$

$$\stackrel{\mathbf{133-12}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))+((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y)))$$
$$+(((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))+((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y)))$$

$$\stackrel{\mathbf{103-6}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y)))$$
$$+(((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))+((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y)))$$

$$\stackrel{3.1}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))$$
$$+(((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))+((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y)))$$

$$\stackrel{3.2}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))$$
$$+((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{\mathbf{FSA}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))$$
$$+((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-22}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot\mathsf{ab2}(y)+((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot\mathsf{ab2}(y)$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} \mathsf{ab2}(y)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))+((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot\mathsf{ab2}(y)$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} \mathsf{ab2}(y)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))+\mathsf{ab2}(y)\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))$$

$$\stackrel{2.3}{=} \mathsf{ab2}(y)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-22}}{=} \mathsf{ab2}(y)\cdot\mathsf{ab2}(x)$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} \mathsf{ab2}(x)\cdot\mathsf{ab2}(y).$$

`5:` Aus 4
folgt: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x)\cdot\mathsf{ab2}(y)$.

□

145-8. Wie in **145-9,10** dargelegt, kann die Voraussetzung $x, y \in \mathbb{C}$ in **145-7g)** nicht ohne Weiteres abgeschwächt werden:

145-8.Bemerkung

- Die Aussage
  "$((x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{C})) \Rightarrow (\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y))$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$((x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})) \Rightarrow (\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y))$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

145-9. Wie an Hand vorliegenden Beispiels klar gemacht wird, kann in **145-8g)** nicht ohne Weiters lediglich $x \in \mathbb{B}$ gefordert werden:

<u>145-9.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) $x = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

→) $y = 1 + \mathsf{i}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{B}$.

b) $y \in \mathbb{C}$.

c) $x \cdot y = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

d) $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$.

e) $\mathsf{ab2}(y) = 2$.

f) $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{nan}$.

g) $\mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y) = +\infty$.

h) $\mathsf{ab2}(x \cdot y) \neq \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$.

145-10. Wie an Hand vorliegenden Beispiels klar gemacht wird, kann in **145-8**g) nicht ohne Weiters lediglich $y \in \mathbb{B}$ gefordert werden:

145-10.BEISPIEL

Es gelte:

→) $x = 1 + \mathsf{i}$.

→) $y = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{C}$.

b) $y \in \mathbb{B}$.

c) $x \cdot y = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

d) $\mathsf{ab2}(x) = 2$.

e) $\mathsf{ab2}(y) = +\infty$.

f) $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{nan}$.

g) $\mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y) = +\infty$.

h) $\mathsf{ab2}(x \cdot y) \neq \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$.

145-11. Vorbereitend für **145-12** wird das nunmehrige Resultat etabliert:

145-11(Satz)

Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "y Zahl" folgt "$1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **145-11** `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`REIM`-**Notation**.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`1.3`: Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **128-11**: $\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}$.

`1.4`: Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$.

`1.5`: Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$.

`2.1`: Aus `1.1`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}x = 0$.

`2.2`: Aus `1.1`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **145-7**: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$.

`2.3`: Aus `1.1`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **130-1**: $x : (x \cdot x) = 1 : x$.

`2.4`: Aus `1.2`"$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **128-9**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

...

<u>Beweis **145-11**</u> `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

...

`3.1:` Aus `2.1`“$\mathsf{Im}x = 0$”
folgt via **130-3**: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = x \cdot (\mathsf{Re}y)$.

`3.2:` Aus `2.1`“$\mathsf{Im}x = 0$”
folgt via **130-3**: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = x \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`3.3:` Aus `2.4`“$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$” und
aus `1.3`“$\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}$”
folgt via **145-2**: $1 : (\mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)) = (1 : \mathsf{ab2}(x)) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(y))$.

`3.4:` Aus `2.1`“$\mathsf{Im}x = 0$”
folgt via **130-3**: $\mathsf{ab2}(x) = x \cdot x$.

`4:` Aus `2.4`“$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$.

`5.1:` Aus `4`“$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$”
folgt via **137-6**: $1 : \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$.

`5.2:` Aus `1.3`“$\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}$”
folgt via **137-6**: $1 : \mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}$.

`6.1:` Aus `1.1`“$x \in \mathbb{T}$”,
aus `1.4`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$”,
aus `5.1`“$1 : \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$” und
aus `5.2`“$1 : \mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}$”
folgt via **113-18**:

$$(x \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot ((1 : \mathsf{ab2}(x)) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(y))) = (x \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x))) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(y))).$$

`6.2:` Aus `1.1`“$x \in \mathbb{T}$”,
aus `1.5`“$\mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$”,
aus `5.1`“$1 : \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$” und
aus `5.2`“$1 : \mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}$”
folgt via **113-18**:

$$(x \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot ((1 : \mathsf{ab2}(x)) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(y))) = (x \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x))) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(y))).$$

...

<u>Beweis **145-11**</u> `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

...

7: $1 : (x \cdot y)$

$$\stackrel{\mathbf{123-9}}{=} (\mathsf{Re}(x \cdot y)) : \mathsf{ab2}(x \cdot y) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}(x \cdot y)) : \mathsf{ab2}(x \cdot y))$$

$$\stackrel{3.1}{=} (x \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(x \cdot y) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}(x \cdot y)) : \mathsf{ab2}(x \cdot y))$$

$$\stackrel{3.2}{=} (x \cdot (\mathsf{Re}y)) : \mathsf{ab2}(x \cdot y) + \mathsf{i} \cdot ((-(x \cdot (\mathsf{Im}y))) : \mathsf{ab2}(x \cdot y))$$

$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (x \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x \cdot y)) + \mathsf{i} \cdot ((-(x \cdot (\mathsf{Im}y))) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x \cdot y)))$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x \cdot y)) + \mathsf{i} \cdot (-((x \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x \cdot y))))$$

$$\stackrel{2.2}{=} (x \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (1 : (\mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y))) + \mathsf{i} \cdot (-((x \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (1 : (\mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)))))$$

$$\stackrel{3.3}{=} (x \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot ((1 : \mathsf{ab2}(x)) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(y))) + \mathsf{i} \cdot (-((x \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot ((1 : \mathsf{ab2}(x)) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(y)))))$$

$$\stackrel{6.1}{=} ((x \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x))) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(y)))) + \mathsf{i} \cdot (-((x \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x)) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(y))))$$

$$\stackrel{6.2}{=} (x \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(y)))) + \mathsf{i} \cdot (-((x \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x))) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(y)))))$$

$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (x : \mathsf{ab2}(x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(y))) + \mathsf{i} \cdot (-((x : \mathsf{ab2}(x)) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(y)))))$$

$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (x : \mathsf{ab2}(x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y))) + \mathsf{i} \cdot (-((x : \mathsf{ab2}(x)) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(y)))))$$

$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (x : \mathsf{ab2}(x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y))) + \mathsf{i} \cdot (-((x : \mathsf{ab2}(x)) \cdot ((\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y))))$$

$$\stackrel{3.4}{=} (x : (x \cdot x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y))) + \mathsf{i} \cdot (-((x : (x \cdot x)) \cdot ((\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y))))$$

$$\stackrel{2.3}{=} (1 : x) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y))) + \mathsf{i} \cdot (-((1 : x) \cdot ((\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y))))$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (1 : x) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y))) + \mathsf{i} \cdot ((1 : x) \cdot (-(\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y)))$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} (1 : x) \cdot ((\mathsf{Re}y) : \mathsf{ab2}(y))) + \mathsf{i} \cdot ((1 : x) \cdot ((-\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y)))$$

$$\stackrel{\mathbf{123-9}}{=} (1 : x) \cdot \mathsf{Re}(1 : y) + \mathsf{i} \cdot ((1 : x) \cdot ((-\mathsf{Im}y) : \mathsf{ab2}(y))).$$

...

<u>Beweis **145-11**</u> `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

...

`7:` $1 : (x \cdot y)$

$$= \ldots = (1 : x) \cdot \mathsf{Re}(1 : y) + \mathsf{i} \cdot ((1 : x) \cdot ((-\mathsf{Im} y) : \mathsf{ab2}(y)))$$

$$\stackrel{\mathbf{123-9}}{=} (1 : x) \cdot \mathsf{Re}(1 : y) + \mathsf{i} \cdot ((1 : x) \cdot \mathsf{Im}(1 : y))$$

$$\stackrel{\mathbf{DG}\mathsf{i}}{=} (1 : x) \cdot (1 : y).$$

`8:` Aus 7
folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

□

145-12. Die vertraute Formel $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$ gilt nicht nur für $x, y \in \mathbb{C}$ - siehe **141-4** -, sondern allgemein für $x \in \mathbb{R}$ *oder* $y \in \mathbb{R}$:

145-12(Satz)

a) *Aus "$x \in \mathbb{R}$" folgt "$1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$".*

b) *Aus "$y \in \mathbb{R}$" folgt "$1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$".*

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **145-12**</u> `a)` `VS` gleich $x \in \mathbb{R}$.

`1:` Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` y Zahl.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$" und
aus `1.1.Fall`"y Zahl"
folgt via **145-11**: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`1.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`1.1:` Aus `1.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`1.2:` Aus `1.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-18**: $1 : y = \mathcal{U}$.

`2:` $1 : (x \cdot y) \stackrel{1.1}{=} 1 : \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (1 : x) \cdot \mathcal{U} \stackrel{1.2}{=} (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`b)` `VS` gleich $y \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $1 : (y \cdot x) = (1 : y) \cdot (1 : x)$.

`2:` $1 : (x \cdot y) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} 1 : (y \cdot x) \stackrel{1}{=} (1 : y) \cdot (1 : x) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (1 : x) \cdot (1 : y)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$.

□

145-13. Nun werden die **DivisionsKürzungsRegeln** $\mathbb{T}$ bewiesen.
Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - a) - b)`:

145-13(Satz) (DKR$\mathbb{T}$: Divisions-KürzungsRegeln $\mathbb{T}$)

`a)` *Aus* "$0 \neq a \in \mathbb{R}$" *und* "$x \in \mathbb{T}$" *folgt* "$(a \cdot x) : a = x$".

`b)` *Aus* "$0 \neq a \in \mathbb{R}$" *und* "$x \in \mathbb{T}$" *folgt* "$a : (a \cdot x) = 1 : x$".

`c)` *Aus* "$0 \neq a \in \mathbb{R}$" *und* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$"

folgt "$(a \cdot x) : (a \cdot y) = x : y$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **145-13** `c)` `VS` gleich $(0 \neq a \in \mathbb{R}) \wedge (x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **145-12**: $1 : (a \cdot y) = (1 : a) \cdot (1 : y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $a \in \mathbb{T}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $a \in \mathbb{C}$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`1.5:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

...

<u>Beweis **145-13**</u> `c)` `VS` gleich $(0 \neq a \in \mathbb{R}) \wedge (x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **137-26**: $1 : y \in \mathbb{T}$.

`2.2:` Aus `1.2`"$a \in \mathbb{T}$"
folgt via **137-26**: $1 : a \in \mathbb{T}$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$0 \neq a \ldots$" und
aus `1.3`"$a \in \mathbb{C}$"
folgt via **139-3**: $a : a = 1$.

`2.4:` Aus `1.4`"x Zahl" und
aus `1.5`"y Zahl"
folgt via :**SZ**: $x : y$ Zahl.

`3.1:` Aus `1.2`"$a \in \mathbb{T}$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{T} \ldots$",
aus `2.2`"$1 : a \in \mathbb{T}$" und
aus `2.1`"$1 : y \in \mathbb{T}$"
folgt via **113-18**: $(a \cdot x) \cdot ((1 : a) \cdot (1 : y)) = (a \cdot (1 : a)) \cdot (x \cdot (1 : y))$.

`3.2:` Aus `2.4`"$x : y$ Zahl"
folgt via **FSM**1: $1 \cdot (x : y) = x : y$.

`4:`
$$\begin{aligned}
&(a \cdot x) : (a \cdot y) \\
&\overset{\mathbf{136-1}}{=} (a \cdot x) \cdot (1 : (a \cdot y)) \\
&\overset{1.1}{=} (a \cdot x) \cdot ((1 : a) \cdot (1 : y)) \\
&\overset{3.1}{=} (a \cdot (1 : a)) \cdot (x \cdot (1 : y)) \\
&\overset{\mathbf{136-1}}{=} (a : a) \cdot (x \cdot (1 : y)) \\
&\overset{2.3}{=} 1 \cdot (x \cdot (1 : y)) \\
&\overset{\mathbf{136-1}}{=} 1 \cdot (x : y) \\
&\overset{3.2}{=} x : y.
\end{aligned}$$

`5:` Aus `4`
folgt: $(a \cdot x) : (a \cdot y) = x : y$.

<u>Beweis **145-13**</u> `a)` `VS` gleich $(0 \neq a \in \mathbb{R}) \wedge (x \in \mathbb{T})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: a Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{T}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$0 \neq a \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{T}$" und
aus **95-12**"$1 \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(a \cdot x) : (a \cdot 1) = x : 1$.

`2.1:` Aus `1.1`"a Zahl"
folgt via **FSM**1: $a \cdot 1 = a$.

`2.2:` Aus `1.2`"x Zahl"
folgt via **FSD**1: $x : 1 = x$.

`3:` $(a \cdot x) : a \stackrel{2.1}{=} (a \cdot x) : (a \cdot 1) \stackrel{1.3}{=} x : 1 \stackrel{2.2}{=} x$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(a \cdot x) : a = x$.

`b)` `VS` gleich $(0 \neq a \in \mathbb{R}) \wedge (x \in \mathbb{T})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: a Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq a \in \mathbb{R} \ldots$",
aus **95-12**"$1 \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(a \cdot 1) : (a \cdot x) = 1 : x$.

`2:` Aus `1.1`"a Zahl"
folgt via **FSM**1: $a \cdot 1 = a$.

`3:` $a : (a \cdot x) \stackrel{2}{=} (a \cdot 1) : (a \cdot x) \stackrel{1.2}{=} 1 : x$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(a \cdot 1) : (a \cdot x) = 1 : x$.

□

Einiges über $x : y = 0$.
Einiges über $x : \mathsf{ab2}(y) = 0$.

Ersterstellung: 08/08/10 **Letzte Änderung: 22/03/12**

146-1. Im vorliegenden Satz wird ein an **NTF**$\mathbb{A}$ erinnerndes Kriterium für $x : y = 0$ formuliert:

146-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x : y = 0$.

`ii)` "$(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$" *oder* "$(x \text{ Zahl}) \wedge (1 : y = 0)$".

`iii)` "$(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$" *oder* "$(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$" *oder* "$(x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **146-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x : y = 0$.

`1:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x : y = 0$" und aus `1`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" folgt: $x \cdot (1 : y) = 0$.

`3.1:` Aus `2`"$x \cdot (1 : y) = 0$" folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $((x = 0) \wedge (1 : y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (1 : y = 0))$.

`3.2:` Via **123-7** gilt: $(1 : y \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (y \text{ Zahl})$.

`4:` Aus `3.1` und aus `3.2` folgt: $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (1 : y = 0))$.

<u>Beweis **146-1**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$

`VS` gleich $$((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(1:y=0)).$$

`1:` Nach `VS` gilt: $$(x=0)\wedge(y\text{ Zahl})$$ $$\vee$$ $$(x\text{ Zahl})\wedge(1:y=0).$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x=0)\wedge(y\text{ Zahl}).$

Aus `2.1.Fall`
folgt: $$((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})).$$

`2.2.Fall` $(x\text{ Zahl})\wedge(1:y=0).$

`3:` Aus `2.2.Fall`"$\ldots 1:y=0$"
folgt via **137-22**: $(y=0)\vee(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}).$

`4:` Aus `2.2.Fall`"x Zahl$\ldots$" und
aus `3`"$(y=0)\vee(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})$"
folgt: $(x\text{ Zahl})\wedge((y=0)\vee(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})).$

`5:` Aus `4`
folgt: $((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})).$

`6:` Aus `5`
folgt: $$((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$((x=0)\wedge(y\text{ Zahl}))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((x\text{ Zahl})\wedge(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})).$$

Beweis **146-1** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$.

`1:` Nach `VS` gilt:
$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$\ldots y$ Zahl”
folgt via **FSD**0: $0 : y = 0$.

`3:` Aus `1.1.Fall`“$x = 0 \ldots$” und
aus 2“$0 : y = 0$”
folgt: $x : y = 0$.

`1.2.Fall` $(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“x Zahl$\ldots$”
folgt via **FSD**0: $x : 0 = 0$.

`3:` Aus 2“$x : 0 = 0$” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots y = 0$”
folgt: $x : y = 0$.

`1.3.Fall` $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`2.1:` Aus `1.3.Fall`“x Zahl”
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0$.

`2.2:` Aus `1.3.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$”
folgt via **137-22**: $1 : y = 0$.

`3:` $x : y \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x \cdot (1 : y) \stackrel{2.2}{=} x \cdot 0 \stackrel{2.1}{=} 0$.

`4:` Aus 3
folgt: $x : y = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x : y = 0$.

□

146-2. Unter der Zusatz-Voraussetzung $y \in \mathbb{T}$ präzisiert sich **146-1** zu der nunmehrigen Form:

<u>146-2(Satz)</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` "$x : y = 0$" *und* "$y \in \mathbb{T}$".

`ii)` "$(x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})$"
oder "$(x \text{ Zahl}) \wedge ((y = 0) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty))$".

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

Beweis **146-2** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(x:y=0)\wedge(y\in\mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x:y=0\ldots$"
folgt via **146-1**:

$$(x=0)\wedge(y \text{ Zahl}) \vee (x \text{ Zahl})\wedge(1:y=0).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x=0)\wedge(y \text{ Zahl})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x=0\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y\in\mathbb{T}$"
folgt: $(x=0)\wedge(y\in\mathbb{T})$.

`3:` Aus `2`
folgt:
$((x=0)\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((x \text{ Zahl})\wedge((y=0)\vee(y=+\infty)\vee(y=-\infty)))$.

`1.2.Fall` $(x \text{ Zahl})\wedge(1:y=0)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y\in\mathbb{T}$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots 1:y=0$"
folgt via **137-21**: $(y=0)\vee(y=+\infty)\vee(y=-\infty)$.

`3:` Aus `1.2.Fall`"x Zahl…" und
aus `2`"$(y=0)\vee(y=+\infty)\vee(y=-\infty)$"
folgt: $(x \text{ Zahl})\wedge((y=0)\vee(y=+\infty)\vee(y=-\infty))$.

`4:` Aus `3`
folgt:
$((x=0)\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((x \text{ Zahl})\wedge((y=0)\vee(y=+\infty)\vee(y=-\infty)))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$((x=0)\wedge(y\in\mathbb{T}))\vee((x \text{ Zahl})\wedge((y=0)\vee(y=+\infty)\vee(y=-\infty))).$$

<u>Beweis</u> **146-2** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $((x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge ((y = 0) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)))$.

`1:` Nach `VS` gilt:

$$(x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})$$
$$\vee$$
$$(x \text{ Zahl}) \wedge ((y = 0) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{T}$”
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`3:` Aus `1.1.Fall`“$x = 0 \ldots$” und
aus 2“y Zahl”
folgt via **146-1**: $x : y = 0$.

`4:` Aus 3“$x : y = 0$” und
aus `1.1.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{T}$”
folgt: $(x : y = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

Beweis **146-2** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $((x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge ((y = 0) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $(x \text{ Zahl}) \wedge ((y = 0) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty))$.

`2:` Aus `1.2.Fall` folgt:

$$(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0) \vee (x \text{ Zahl}) \wedge (y = +\infty) \vee (x \text{ Zahl}) \wedge (y = -\infty).$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$.

`3.1:` Aus `2.1.Fall`"x Zahl..." folgt via **FSD**0: $x : 0 = 0$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall`"$\ldots y = 0$" und aus **95-12**"$0 \in \mathbb{T}$" folgt: $y \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `3.1`"$x : 0 = 0$" und aus `2.1.Fall`"$\ldots y = 0$" folgt: $x : y = 0$.

`5:` Aus `4`"$x : y = 0$" und aus `3.2`"$y \in \mathbb{T}$" folgt: $(x : y = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

...

Beweis **146-2** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $((x = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge ((y = 0) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)))$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $(x \text{ Zahl}) \wedge ((y = 0) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty))$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $(x \text{ Zahl}) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.1.Fall`“x Zahl...”
folgt via **137-3**: $x : (+\infty) = 0$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`“$\ldots y = +\infty$”
folgt via **95-16**: $y \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `2.1`“$x : (+\infty) = 0$” und
aus `2.2.Fall`“$\ldots y = +\infty$”
folgt: $x : y = 0$.

`5:` Aus `4`“$x : y = 0$” und
aus `3.2`“$y \in \mathbb{T}$”
folgt: $(x : y = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

...

Beweis **146-2** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $((x=0) \wedge (y \in \mathbb{T})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge ((y=0) \vee (y=+\infty) \vee (y=-\infty)))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $(x \text{ Zahl}) \wedge ((y=0) \vee (y=+\infty) \vee (y=-\infty))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(x \text{ Zahl}) \wedge (y=-\infty)$.

`3.1`: Aus `2.1.Fall`“x Zahl...”
folgt via **137-3**: $x : (-\infty) = 0$.

`3.2`: Aus `2.3.Fall`“$\ldots y = -\infty$”
folgt via **95-16**: $y \in \mathbb{T}$.

`4`: Aus `3.1`“$x : (-\infty) = 0$” und
aus `2.3.Fall`“$\ldots y = -\infty$”
folgt: $x : y = 0$.

`5`: Aus `4`“$x : y = 0$” und
aus `3.2`“$y \in \mathbb{T}$”
folgt: $(x : y = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(x : y = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x : y = 0) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

□

146-3. Wird in **146-2** die Klasse y durch $\mathsf{ab2}(y)$ ersetzt, so ergibt sich ohne allzu viel Aufwand folgendes Kriterium:

146-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x : \mathsf{ab2}(y) = 0$.

`ii)` "$(x = 0) \wedge (y$ *Zahl*$)$" *oder* "$(x$ *Zahl*$) \wedge (y = 0)$" *oder* "$(x$ *Zahl*$) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = +\infty)$".

`RECH`-**Notation**.

Via **128-8** ist ein Kriterium für "$\mathsf{ab2}(y) = +\infty$" verfügbar.

Beweis **146-3** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $x : \mathsf{ab2}(y) = 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x : \mathsf{ab2}(y) = 0$" und
aus **95-5**"0 Zahl"
folgt: $x : \mathsf{ab2}(y)$ Zahl.

`2:` Aus `1`"$x : \mathsf{ab2}(y)$ Zahl"
folgt via **96-17**: y Zahl.

`3:` Aus `2`"y Zahl"
folgt via **128-11**: $\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$x : \mathsf{ab2}(y) = 0$" und
aus `3`"$\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}$"
folgt via **146-2**:
$$(x = 0) \wedge (\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge ((\mathsf{ab2}(y) = 0) \vee (\mathsf{ab2}(y) = +\infty) \vee (\mathsf{ab2}(y) = -\infty))).$$

`5:` Aus `4`
folgt:
$$((x = 0) \wedge (\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = +\infty)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = -\infty)).$$

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **146-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x : \mathsf{ab2}(y) = 0.$

...

`Fallunterscheidung`

$\boxed{\texttt{5.1.Fall}}$ $(x = 0) \wedge (\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}).$

`6:` Aus `5.1.Fall`“$x = 0 \ldots$” und
aus `2`“y Zahl”
folgt: $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}).$

`7:` Aus `6`
folgt:
$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$
$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = +\infty)).$

$\boxed{\texttt{5.2.Fall}}$ $(x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = 0).$

`6:` Aus `5.2.Fall`“$\ldots \mathsf{ab2}(y) = 0$”
folgt via **128-2**: $y = 0.$

`7:` Aus `5.2.Fall`“x Zahl…” und
aus `6`“$y = 0$”
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0).$

`8:` Aus `7`
folgt:
$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$
$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = +\infty)).$

$\boxed{\texttt{5.3.Fall}}$ $(x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = +\infty).$

Aus `5.3.Fall`
folgt:
$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = +\infty)).$

$\boxed{\texttt{5.4.Fall}}$ $(x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = -\infty).$

Es gilt `5.4.Fall`“$\ldots \mathsf{ab2}(y) = -\infty$”.
Via **128-14** gilt “$\mathsf{ab2}(y) \neq -\infty$”.
Ex falso quodlibet folgt:
$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = +\infty)).$

...

<u>Beweis **146-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x : \mathsf{ab2}(y) = 0.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = +\infty)).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = +\infty)).$

`1:` Nach `VS` gilt:

$$(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$$
$$\vee \quad (x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$$
$$\vee \quad (x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = +\infty).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}).$

`2:` Aus **`1.1.Fall`**"$\ldots y$ Zahl" folgt via **128-11**: $\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}.$

`3:` Aus **`1.1.Fall`**"$x = 0 \ldots$" und aus 2"$\mathsf{ab2}(y) \in \mathbb{T}$" folgt via **146-2**: $x : \mathsf{ab2}(y) = 0.$

`1.2.Fall` $(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0).$

`2.1:` Aus **`1.2.Fall`**"x Zahl..." folgt via **FSD**0: $x : 0 = 0.$

`2.2:` Aus **`1.2.Fall`**"$\ldots y = 0$" folgt via **128-2**: $\mathsf{ab2}(y) = 0.$

`3:` $x : \mathsf{ab2}(y) \stackrel{2.2}{=} x : 0 \stackrel{2.1}{=} 0.$

`4:` Aus 3 folgt: $x : \mathsf{ab2}(y) = 0.$

...

<u>Beweis</u> **146-3** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = +\infty))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $(x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{ab2}(y) = +\infty)$.

`2:` Aus `1.3.Fall`"x Zahl..."
folgt via **137-3**: $x : (+\infty) = 0$.

`3:` Aus 2"$x : (+\infty) = 0$" und
aus `1.3.Fall`"...$\mathsf{ab2}(y) = +\infty$"
folgt: $x : \mathsf{ab2}(y) = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x : \mathsf{ab2}(y) = 0$.

□

146-4. Falls $0 \neq y \in \mathbb{C}$, dann folgt aus $x : y = 0$ die Gleichung $x = 0$:

146-4(Satz)

Aus "$x : y = 0$" und "$0 \neq y \in \mathbb{C}$" folgt "$x = 0$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **146-4** `VS` gleich $(x : y = 0) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x : y = 0 \ldots$"
folgt via **136-1**: $x \cdot (1 : y) = 0$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-23**: $0 \neq 1 : y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1.1`"$x \cdot (1 : y) = 0$" und
aus `1.2`"$0 \neq 1 : y \ldots$"
folgt via **140-10**: $x = 0$.

□

Einiges über $\leq, <$ und $\cdot$.

Ersterstellung: 08/08/10 **Letzte Änderung: 24/03/12**

147-1. Falls $x < y$ und $0 < a \in \mathbb{R}$, dann $a \cdot x < a \cdot y$. Unter anderem im Fall $a = +\infty$ reduziert sich die Schlussfolgerung auf $a \cdot x \leq a \cdot y$. Korrespondierendes gilt für $\mathbb{R} \ni a < 0$ und $a < 0$:

147-1(Satz)

a) *Aus* "$x < y$" *und* "$0 < a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$a \cdot x < a \cdot y$".

b) *Aus* "$x < y$" *und* "$0 < a$" *folgt* "$a \cdot x \leq a \cdot y$".

c) *Aus* "$x \leq y$" *und* "$0 \leq a$" *folgt* "$a \cdot x \leq a \cdot y$".

d) *Aus* "$x < y$" *und* "$\mathbb{R} \ni a < 0$" *folgt* "$a \cdot y < a \cdot x$".

e) *Aus* "$x < y$" *und* "$a < 0$" *folgt* "$a \cdot y \leq a \cdot x$".

f) *Aus* "$x \leq y$" *und* "$a \leq 0$" *folgt* "$a \cdot y \leq a \cdot x$"

RECH.$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis **147-1**</u> `a)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (0 < a \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via **109-7**: $0 < y - x$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$" und
aus `1.1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $a \cdot x \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < a \ldots$" und
aus `1.2`"$0 < y - x$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 < a \cdot (y - x)$.

`3.1:` Aus `2.1`"$a \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $a \cdot x \in \mathbb{T}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $a \cdot (y - x) = a \cdot y - a \cdot x$.

`4:` Aus `2.2`"$0 < a \cdot (y - x)$" und
aus `3.2`"$a \cdot (y - x) = a \cdot y - a \cdot x$"
folgt: $0 < a \cdot y - a \cdot x$.

`5:` Aus `4`"$0 < a \cdot y - a \cdot x$" und
aus `3.1`"$a \cdot x \in \mathbb{T}$"
folgt via **109-9**: $a \cdot x < a \cdot y$.

<u>Beweis **147-1**</u> `b)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (0 < a)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < a$"
folgt via **107-16**: $(a \in \mathbb{R}) \vee (a = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $a \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots 0 < a \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $a \cdot x < a \cdot y$.

`3:` Aus `2`
folgt via **41-3**: $a \cdot x \leq a \cdot y$.

`1.2.Fall` $a = +\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`3:` Aus `2` "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **107-18**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x < 0$.

`4:` Aus `3.1.Fall` "$x < 0$"
folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot x = -\infty$.

`5:` Aus **95-11** "$+\infty \in \mathbb{S}$" und
aus `2` "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(+\infty) \cdot y \in \mathbb{S}$.

`6:` Aus `5` "$(+\infty) \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $-\infty \leq (+\infty) \cdot y$.

`7:` Aus `4` "$(+\infty) \cdot x = -\infty$" und
aus `6` "$-\infty \leq (+\infty) \cdot y$"
folgt: $(+\infty) \cdot x \leq (+\infty) \cdot y$.

`8:` Aus `7` "$(+\infty) \cdot x \leq (+\infty) \cdot y$" und
aus `1.2.Fall` "$a = +\infty$"
folgt: $a \cdot x \leq a \cdot y$.

...

...

...

<u>Beweis **147-1**</u> `b)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (0 < a)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $a = +\infty$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $x = 0$.

`4:` Aus `VS` gleich “$x < y \ldots$” und
aus `3.2.Fall`“$x = 0$”
folgt: $0 < y$.

`5.1:` Aus 4“$0 < y$”
folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot y = +\infty$.

`5.2:` Aus **AAVI**“$(+\infty) \cdot 0 = 0$” und
aus **107-6**“$0 < +\infty$”
folgt: $(+\infty) \cdot 0 < +\infty$.

`6:` Aus `5.2`“$(+\infty) \cdot 0 < +\infty$” und
aus `5.1`“$(+\infty) \cdot y = +\infty$”
folgt: $(+\infty) \cdot 0 < (+\infty) \cdot y$.

`7:` Aus `6`“$(+\infty) \cdot 0 < (+\infty) \cdot y$” und
aus `1.2.Fall`“$a = +\infty$”
folgt: $a \cdot 0 < a \cdot y$.

`8:` Aus `7`“$a \cdot 0 < a \cdot y$” und
aus `3.2.Fall`“$x = 0$”
folgt: $a \cdot x < a \cdot y$.

`9:` Aus `8`“$a \cdot x < a \cdot y$”
folgt via **41-3**: $a \cdot x \leq a \cdot y$.

...

...

<u>Beweis **147-1**</u> `b)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (0 < a)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $a = +\infty$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.3.Fall` $0 < x$.

`4.1`: Aus `3.3.Fall` "$0 < x$"
folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot x = +\infty$.

`4.2`: Aus `3.3.Fall` "$0 < x$" und
aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via **107-8**: $0 < y$.

`5`: Aus `4.2` "$0 < y$"
folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot y = +\infty$.

`6`: Aus `4.1` "$(+\infty) \cdot x = +\infty$" und
aus **107-6** "$+\infty \leq +\infty$"
folgt: $(+\infty) \cdot x \leq +\infty$.

`7`: Aus `6` "$(+\infty) \cdot x \leq +\infty$" und
aus `5` "$(+\infty) \cdot y = +\infty$"
folgt: $(+\infty) \cdot x \leq (+\infty) \cdot y$.

`8`: Aus `7` "$(+\infty) \cdot x \leq (+\infty) \cdot y$" und
aus `1.2.Fall` "$a = +\infty$"
folgt: $a \cdot x \leq a \cdot y$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $a \cdot x \leq a \cdot y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $a \cdot x \leq a \cdot y$.

<u>Beweis **147-1**</u> `c)` `VS` gleich $(x \le y) \wedge (0 \le a)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \le y \ldots$”
folgt via **41-5**: $(x < y) \vee (x = y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots 0 \le a$”
folgt via **41-5**: $(0 < a) \vee (0 = a)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{array}{rl} & (x < y) \wedge (0 < a) \\ \vee & (x < y) \wedge (0 = a) \\ \vee & (x = y) \wedge (0 < a) \\ \vee & (x = y) \wedge (0 = a). \end{array}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x < y) \wedge (0 < a)$.

Aus `2.1.Fall`“$x < y \ldots$” und
aus `2.1.Fall`“$\ldots 0 < a$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $a \cdot x \le a \cdot y$.

...

<u>Beweis **147-1**</u> `c)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (0 \leq a)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $(x < y) \wedge (0 = a)$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`“$x < y \ldots$”
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $0 = a$.

`4.1:` Aus `3.1`“$x \in \mathbb{S} \ldots$”
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`4.2:` Aus `3.1`“$\ldots y \in \mathbb{S}$”
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`5.1:` Aus `4.1`“x Zahl”
folgt via **FSM**0: $0 \cdot x = 0$.

`5.2:` Aus `4.2`“y Zahl”
folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0$.

`6:` Aus `5.1`“$0 \cdot x = 0$” und
aus **107-6**“$0 \leq 0$”
folgt: $0 \cdot x \leq 0$.

`7:` Aus `6`“$0 \cdot x \leq 0$” und
aus `5.2`“$0 \cdot y = 0$”
folgt: $0 \cdot x \leq 0 \cdot y$.

`8:` Aus `7`“$0 \cdot x \leq 0 \cdot y$” und
aus `3.2`“$0 = a$”
folgt: $a \cdot x \leq a \cdot y$.

...

Beweis **147-1** `c) VS` gleich $(x \leq y) \wedge (0 \leq a)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(x = y) \wedge (0 < a)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$"
folgt via **107-3**: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq a$"
folgt via **107-3**: $a \in \mathbb{S}$.

`3.3:` Aus `2.3.Fall`"$x = y \ldots$"
folgt: $a \cdot x = a \cdot y$.

`4:` Aus `3.2`"$a \in \mathbb{S}$" und
aus `3.1`"$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $a \cdot x \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `4`"$a \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $a \cdot x \leq a \cdot x$.

`6:` Aus `5`"$a \cdot x \leq a \cdot x$" und
aus `3.3`"$a \cdot x = a \cdot y$"
folgt: $a \cdot x \leq a \cdot y$.

`2.4.Fall` $(x = y) \wedge (0 = a)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$"
folgt via **107-3**: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq a$"
folgt via **107-3**: $a \in \mathbb{S}$.

`3.3:` Aus `2.4.Fall`"$x = y \ldots$"
folgt: $a \cdot x = a \cdot y$.

`4:` Aus `3.2`"$a \in \mathbb{S}$" und
aus `3.1`"$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $a \cdot x \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `4`"$a \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $a \cdot x \leq a \cdot x$.

`6:` Aus `5`"$a \cdot x \leq a \cdot x$" und
aus `3.3`"$a \cdot x = a \cdot y$"
folgt: $a \cdot x \leq a \cdot y$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $a \cdot x \leq a \cdot y$.

<u>Beweis **147-1**</u> `d)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (\mathbb{R} \ni a < 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathbb{R} \ni a \ldots$"
folgt via **117-3**: $-a \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -a$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$",
aus `1.2`"$0 < -a$" und
aus `1.1`"$-a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(-a) \cdot x < (-a) \cdot y$.

`3:` Aus `2`"$(-a) \cdot x < (-a) \cdot y$"
folgt via **109-14**: $-((-a) \cdot y) < -((-a) \cdot x)$.

`4.1:` $a \cdot y \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} -(-a \cdot y) \stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=} -((-a) \cdot y)$.

`4.2:` $a \cdot x \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} -(-a \cdot x) \stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=} -((-a) \cdot x)$.

`5:` Aus `4.1`"$a \cdot y = \ldots = -((-a) \cdot y)$" und
aus `3`"$-(-a) \cdot y < -((-a) \cdot x)$"
folgt: $a \cdot y < -((-a) \cdot x)$.

`6:` Aus `5`"$a \cdot y < -((-a) \cdot x)$" und
aus `4.2`"$a \cdot x = \ldots = -((-a) \cdot x)$"
folgt: $a \cdot y < a \cdot x$.

<u>Beweis **147-1**</u> `e)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (a < 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -a$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$" und
aus `1.2`"$0 < -a$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(-a) \cdot x \leq (-a) \cdot y$.

`3:` Aus `2`"$(-a) \cdot x \leq (-a) \cdot y$"
folgt via **109-15**: $-(-a) \cdot y \leq -(-a) \cdot x$.

`4.1:` $a \cdot y \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} -(-a \cdot y) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -((-a) \cdot y)$.

`4.2:` $a \cdot x \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} -(-a \cdot x) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -((-a) \cdot x)$.

`5:` Aus `4.1`"$a \cdot y = \ldots = -((-a) \cdot y)$" und
aus `3`"$-((-a) \cdot y) \leq -((-a) \cdot x)$"
folgt: $a \cdot y \leq -((-a) \cdot x)$.

`6:` Aus `5`"$a \cdot y \leq -((-a) \cdot x)$" und
aus `4.2`"$a \cdot x = \ldots = -((-a) \cdot x)$"
folgt: $a \cdot y \leq a \cdot x$.

`f)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (a \leq 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -a$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$" und
aus `1`"$0 \leq -a$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(-a) \cdot x \leq (-a) \cdot y$.

`3:` Aus `2`"$(-a) \cdot x \leq (-a) \cdot y$"
folgt via **109-15**: $-((-a) \cdot y) \leq -((-a) \cdot x)$.

`4.1:` $a \cdot y \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} -(-a \cdot y) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -((-a) \cdot y)$.

`4.2:` $a \cdot x \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} -(-a \cdot x) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -((-a) \cdot x)$.

`5:` Aus `4.1`"$a \cdot y = \ldots = -((-a) \cdot y)$" und
aus `3`"$-((-a) \cdot y) \leq -((-a) \cdot x)$"
folgt: $a \cdot y \leq -((-a) \cdot x)$.

`6:` Aus `5`"$a \cdot y \leq -((-a) \cdot x)$" und
aus `4.2`"$a \cdot x = \ldots = -((-a) \cdot x)$"
folgt: $a \cdot y \leq a \cdot x$.

□

147-2. Nun werden einige Folgerungen aus **147-1** gezogen.
Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - c) - d)`:

147-2(Satz)

`a)` *Aus* "$x < y < 0$" *und* "$0 < a < b$" *folgt* "$b \cdot x < a \cdot y$".

`b)` *Aus* "$x < y$" *und* "$0 \leq y$" *und* "$0 < a < b$" *folgt* "$a \cdot x < b \cdot y$".

`c)` *Aus* "$0 < x < y$" *und* "$b < a < 0$" *folgt* "$b \cdot y < a \cdot x$".

`d)` *Aus* "$x < y$" *und* "$x \leq 0$" *und* "$b < a < 0$" *folgt* "$a \cdot y < b \cdot x$".

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis **147-2**</u> `b)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (0 \le y) \wedge (0 < a < b)$.

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$0 < a < b$"
folgt via **107-12**: $a \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a < b$"
folgt via **41-3**: $a \le b$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots 0 < a \ldots$" und
aus `1.1` "$a \in \mathbb{R}$"
folgt via **147-1**: $a \cdot x < a \cdot y$.

`2.2:` Aus `1.2` "$a \le b$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \le y \ldots$"
folgt via **147-1**: $y \cdot a \le y \cdot b$.

`3.1:` Via **KGM** gilt: $a \cdot y = y \cdot a$.

`3.2:` Via **KGM** gilt: $y \cdot b = b \cdot y$.

`4:` Aus `3.1` "$a \cdot y = y \cdot a$" und
aus `2.2` "$y \cdot a \le y \cdot b$"
folgt: $a \cdot y \le y \cdot b$.

`5:` Aus `2.1` "$a \cdot x < a \cdot y$" und
aus `4` "$a \cdot y \le y \cdot b$"
folgt via **107-8**: $a \cdot x < y \cdot b$.

`6:` Aus `5` "$a \cdot x < y \cdot b$" und
aus `3.2` "$y \cdot b = b \cdot y$"
folgt: $a \cdot x < y \cdot b$.

<u>Beweis **147-2**</u> `a)` `VS` gleich $(x < y < 0) \wedge (0 < a < b)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via **109-14**: $-y < -x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y < 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 < -y$.

`2:` Aus `1.2`"$0 < -y$" und
aus `1.1`"$-y < -x$"
folgt via **107-8**: $0 < -x$.

`3:` Aus `2`"$0 < -x$"
folgt via **41-3**: $0 \leq -x$.

`4:` Aus `1.1`"$-y < -x$",
aus `3`"$0 \leq -x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 < a < b$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $a \cdot (-y) < b \cdot (-x)$.

`5.1:` Via **FS**$-\cdot$ gilt: $-a \cdot y = a \cdot (-y)$.

`5.2:` Via **FS**$-\cdot$ gilt: $b \cdot (-x) = -b \cdot x$.

`6:` Aus `5.1`"$-a \cdot y = a \cdot (-y)$" und
aus `4`"$a \cdot (-y) < b \cdot (-x)$"
folgt: $-a \cdot y < b \cdot (-x)$.

`7:` Aus `6`"$-a \cdot y < b \cdot (-x)$" und
aus `5.2`"$b \cdot (-x) = -b \cdot x$"
folgt: $-a \cdot y < -b \cdot x$.

`8:` Aus `7`"$-a \cdot y < -b \cdot x$"
folgt via **109-14**: $b \cdot x < a \cdot y$.

<u>Beweis **147-2**</u> `c)` `VS` gleich $(0 < x < y) \wedge (b < a < 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **109-16**: $-x < 0$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < y \ldots$"
folgt via **109-14**: $-y < -x$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots b < a \ldots$"
folgt via **109-14**: $-a < -b$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots a < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -a$.

`2.1:` Aus `1.2`"$-y < -x$" und
aus `1.1`"$-x < 0$"
folgt: $-y < -x < 0$.

`2.2:` Aus `1.4`"$0 < -a$" und
aus `1.3`"$-a < -b$"
folgt: $0 < -a < -b$.

`3:` Aus `2.1`"$-y < -x < 0$" und
aus `2.2`"$0 < -a < -b$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(-b) \cdot (-y) < (-a) \cdot (-x)$.

`4.1:` Via **FS**$-\cdot$ gilt: $b \cdot y = (-b) \cdot (-y)$.

`4.2:` Via **FS**$-\cdot$ gilt: $(-a) \cdot (-x) = a \cdot x$.

`5:` Aus `4.1`"$b \cdot y = (-b) \cdot (-y)$" und
aus `3`"$(-b) \cdot (-y) < (-a) \cdot (-x)$"
folgt: $b \cdot y < (-a) \cdot (-x)$.

`6:` Aus `5`"$b \cdot y < (-a) \cdot (-x)$" und
aus `4.2`"$(-a) \cdot (-x) = a \cdot x$"
folgt: $b \cdot y < a \cdot x$.

<u>Beweis</u> **147-2** `d)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (x \leq 0) \wedge (b < a < 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via **109-14**: $-y < -x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -x$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots b < a \ldots$"
folgt via **109-14**: $-a < -b$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots a < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -a$.

`2:` Aus `1.4`"$0 < -a$" und
aus `1.3`"$-a < -b$"
folgt: $0 < -a < -b$.

`3:` Aus `1.1`"$-y < -x$",
aus `1.2`"$0 \leq -x$" und
aus `2`"$0 < -a < -b$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(-a) \cdot (-y) < (-b) \cdot (-x)$.

`4.1:` Via **FS**$-\cdot$ gilt: $a \cdot y = (-a) \cdot (-y)$.

`4.2:` Via **FS**$-\cdot$ gilt: $(-b) \cdot (-x) = b \cdot x$.

`5:` Aus `4.1`"$a \cdot y = (-a) \cdot (-y)$" und
aus `3`"$(-a) \cdot (-y) < (-b) \cdot (-x)$"
folgt: $a \cdot y < (-b) \cdot (-x)$.

`6:` Aus `5`"$a \cdot y < (-b) \cdot (-x)$" und
aus `4.2`"$(-b) \cdot (-x) = b \cdot x$"
folgt: $a \cdot y < b \cdot x$.

$\square$

- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- **A. Levy**, *Basic Set Theory*, Springer, 1979.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).
- **J. Schmidt**, *Mengenlehre. Band 1: Grundbegriffe*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1974(2).