Über die Nullstellen einer Klasse meromorpher Funktionen

vorgelegt von
Diplom-Mathematiker
Janis Meyer
aus Hamburg

Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr. Michael Pohst
Erster Gutachter: Prof. Dr. Günter Frank
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. James K. Langley

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 25.5.2005

Berlin 2005

D 83

Zusammenfassung

Es sei

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z - z_\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{a_\nu}{z_\nu} \right| < \infty$$

eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$ endlicher Ordnung. Wir geben Winkelräume für die Verteilung der Polstellen (z_ν) an, so dass bei beliebiger Wahl der Residuen (a_ν) die Funktion f stets unendlich viele Nullstellen besitzt. Wir diskutieren die Fälle, dass die Ordnung ganzzahlig oder nichtganzzahlig ist, getrennt. Für letzteres beweisen wir als Hilfsmittel, mit Ideen von W. H. J. Fuchs, G. Brosch und L. Volkmann eine Abschätzung, mit der sich das radiale Verhalten ganzer Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen kontrollieren lässt. Anhand einiger Beispiele weisen wir nach, dass die Winkelräume bei gewissen Ordnungen nicht vergrößert werden können.

Weiter diskutieren wir die Frage, wann sich reziproke ganze Funktionen der Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ in obiger Form entwickeln lassen. Dies gelingt etwa dann, wenn die Verteilung der Polstellen bestimmten Regularitätsbedingungen genügt. Schließlich zeigen wir, dass zu jeder endlichen Ordnung Funktionen f der obigen Form existieren, die keine Nullstellen besitzen.

Abschließend schränken wir die Residuen auf $a_\nu > 0$ ein. Ist u das zu f gehörige subharmonische Potenzial, so geben wir eine von den Ordnungen von u und f abhängige Relation an, so dass die Funktion f stets unendlich viele Nullstellen besitzt. Diese Relation stellt eine Verallgemeinerung eines älteren Resultates von A. Eremenko, J. Langley und J. Rossi dar.

Danksagung

Zunächst einmal möchte ich mich herzlichst bei Herrn Prof. G. Frank bedanken. Seine Aufmerksamkeit und guten Ratschläge haben wesentlich dazu beigetragen, dass diese Arbeit, auch unter den nicht immer angenehmen äusseren Einflüssen, zügig voranging. Weiter bedanke ich mich bei Herrn S. Schidlowskij für die zügigen und dennoch sehr sorgfältigen Übersetzungen der russischen Arbeiten und Herrn T. Fellberg, der mir, wie immer, bereitwillig bei den sprachlichen Korrekturen geholfen hat. Und natürlich auch tausend Dank an SuB.

Einleitung

Wir betrachten die Klasse aller in $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen, die eine Darstellung

$$f(z) = \frac{a_0}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z - z_\nu} \tag{1}$$

mit $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{a_\nu}{z_\nu}\right| < \infty$ sowie $a_\nu, z_\nu \neq 0$, $\nu \geq 1$ zulassen. Besonders interessant ist sicher das Problem, unter welchen Bedingungen an (z_ν) und (a_ν) gewährleistet werden kann, dass f stets Nullstellen besitzt. Dies ist eine weitgehende Verallgemeinerung einer Frage von L. Rubel:
Existiert eine Folge (z_ν), so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ stets

$$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \ldots \neq 0$$

gilt?

Seitdem hat es eine Reihe von Entwicklungen und Fortschritten gegeben, wobei in [E/L/R] Rubels Frage negativ beantwortet wird. Dabei werden die weiteren Untersuchungen jetzt oft geprägt von der weitaus allgemeineren

Vermutung 0.1. *Ist $a_\nu > 0$, dann hat f aus (1) unendlich viele Nullstellen.*

Dabei hat 0.1 folgende physikalische Interpretation. Man lege einen unendlich langen Draht mit der Ladungsdichte $\frac{a_\nu}{2}$ in jeden Punkt z_ν und zwar senkrecht zur komplexen Ebene. Das resultierende elektrostatische Vektorfeld ist durch $(\mathrm{Re}\, f, -\mathrm{Im}\, f)$ gegeben. Die Vermutung ist daher äquivalent zu der These, dass jedes solche Vektorfeld stationäre Punkte für ein freies Elektron besitzt, in dem dieses dort verharrt.

Die Vermutung 0.1 hat sich in zwei kontrastierenden Situationen als wahr erwiesen, nämlich falls $\sum_{|z_\nu| \leq r} a_\nu = o(\sqrt{r})$ ([Cl/E/R], auch Satz 4.2), oder falls $\inf_{\nu \geq 1} a_\nu > 0$ ([E/L/R], auch Satz 4.5) ist. Inzwischen werden vielfältige Methoden der Funktionentheorie verwendet, um auch komplexe Werte a_ν zuzulassen. Hervorzuheben sind hierbei die neueren Arbeiten von [L/R] und [L/R2], aber auch einige ältere Resultate, von denen die wichtigsten in der vorliegenden Arbeit diskutiert werden.

Ebenfalls eng verbunden mit 0.1 ist das folgende

Problem 0.2. *Existiert zu jeder Folge (z_ν) eine Wahl von (a_ν) mit $\sum_{\nu \geq 1} \left|\frac{a_\nu}{z_\nu}\right| < \infty$, so dass f aus (1) nur höchstens endlich viele Nullstellen hat?*

Dieses Problem lässt sich mit älteren Ergebnissen von z.B. [O] negativ entscheiden. Dabei ist die Lage der (z_ν) sehr stark eingeschränkt, vgl. auch Bemerkung 3.5.1.4. Wir konzentrieren uns auf die Situation, in welcher die Ordnung von f endlich ist. In Abhängigkeit dieser Ordnung geben wir Winkelräume an, in der sämtliche Pole von f liegen können, so dass bei beliebiger Wahl von (a_ν) stets unendlich viele Nullstellen existieren. Dabei behandeln wir die Fälle der Ganzzahligkeit und Nichtganzzahligkeit der Ordnung getrennt. Kurioserweise ist die erste Situation einfacher zu behandeln. Aus den seit Langem bekannten Typergebnissen können wir mit verhältnismäßig geringem Aufwand die erwähnten Winkelräume konstruieren. Bei der Nichtganzzahligkeit muss viel weiter ausgeholt werden.

Die Arbeit zerfällt in zwei Teile, wobei im ersten Problem 0.2 diskutiert wird, im zweiten das Augenmerk auf Vermutung 0.1 gelegt wird. In Kapitel 1 werden die wichtigsten Begriffe und Sätze dargelegt, die bei den späteren Untersuchungen verwendet werden. In Kapitel 2 leiten wir das Ergebnis her, welches zur Diskussion der nichtganzzahligen Ordnung benötigt wird. Kapitel 3 ist das Herzstück der Arbeit: Wir konstruieren die Winkelräume und vergleichen die Qualität der Ergebnisse anhand vieler Beispiele. Im letzten Kapitel 4 stellen wir die wesentlichen Ergebnisse der Potenzialtheorie dar und beweisen einige der derzeit bekannten Teilresultate, die Vermutung 0.1 bekräftigen.

Einige Bemerkungen zu den Bezeichnungen. Wir schreiben $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x > 0\}$ und $\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Weiter benutzen wir die gängigen Landau- Symbole: Ist $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von U, sowie $f, g : U \to \mathbb{C}$ zwei beliebige Funktionen, so schreiben wir $f(z) = O(g(z))$, $z \to a$, falls eine Konstante $K > 0$ existiert, so dass gilt $|f(z)| \leq K|g(z)|$ in einer Umgebung von a. Oft schreiben wir für diesen Sachverhalt auch $f \ll g$. Gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U(\varepsilon) \subset U$ von a, für die $|f(z)| \leq \varepsilon |g(z)|$ für alle $z \in U(\varepsilon)$ bleibt, so schreiben wir auch $f = o(g)$. Schließlich bezeichnen wir die offene Kugel um a und dem Radius $r > 0$ mit $B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad |z - a| < r\}$.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel geben wir eine kurze Übersicht der für uns wichtigen Resultate ganzer und meromorpher Funktionen und den technischen Hilfsmitteln. Die Hauptreferenz ist [H1]. Sachverhalte, die sich dort nicht finden, erhalten an entsprechender Stelle einen zusätzlichen Verweis.

1.1 Ordnungen

Es sei $r_0 > 0$ und $S : [r_0, +\infty[\to \mathbb{R}_0^+$ monoton wachsend. Die Ordnung von S ist dann durch

$$\lambda := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{\log r}$$

erklärt. Es ist stets $0 \leq \lambda \leq +\infty$ und gilt in der zweiten Ungleichung keine Gleichheit, so heißt S von endlicher Ordnung. Gelegentlich taucht bei uns die untere Ordnung

$$\rho := \liminf_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{\log r}$$

auf.
Ist $0 < \lambda < +\infty$ so verfeinert man die Wachstumsskala durch den Typus von S (bzgl. λ):

$$\sigma := \limsup_{r\to\infty} \frac{S(r)}{r^\lambda}.$$

Bei $\sigma = 0$ heißt S vom Minimaltyp (bzgl. λ), bei $0 < \sigma < +\infty$ vom Mittel- oder Normaltyp und bei $\sigma = \infty$ nennt man S vom Maximaltyp. Wir sprechen hierbei von den Typklassen.

1.2 Ordnung positiver Funktionen und verfeinerte Ordnung I

Die Ergebnisse dieses Abschnittes entnehmen wir [Le].

Definition 1.1. *Ist $r_0 > 0$, so heißt $\lambda : [r_0, +\infty[\to \mathbb{R}_0^+$ verfeinerte Ordnung, falls gilt:*

1. *$\lambda(r)$ ist stetig, überall links- und rechtsseitig differenzierbar und stückweise differenzierbar.*

2. Für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ *ist* $\lim\limits_{r\to\infty} \lambda(r) = \lambda$.

3. Bezeichnet man mit $\lambda'_-(r)$, *bzw.* $\lambda'_+(r)$ *die links- bzw. rechtsseitigen Ableitungen und setzt man* $\tilde{\lambda}'(r) := \max\{\lambda'_+(r), \lambda'_-(r)\}$, *so ist* $\lim\limits_{r\to\infty} \tilde{\lambda}'(r) r \log r = 0$.

Bemerkung

Ist $r_0 > 0$, so heißt $L : [r_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ langsam wachsend, falls in einem beliebigen endlichen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{L(kr)}{L(r)} = 1.$$

Dabei soll die Konvergenz gleichmäßig in $k \in [a, b]$ bleiben.

Wir notieren einige wichtige Eigenschaften und asymptotische Beziehungen.

Lemma 1.2. *Es sei* $\lambda : [r_0, +\infty[\to \mathbb{R}_0^+$ *eine verfeinerte Ordnung.*

(a) Die Funktion $L(r) = r^{\lambda(r)-\lambda}$ *ist für* $r_1 \geq r_0$ *auf* $r \geq r_1$ *langsam wachsend.*

(b) Für $\lambda > 0$ *und* $r_0 \leq r$ *ist die Funktion* $r^{\lambda(r)}$ *monoton wachsend.*

(c) Ist $0 < \varepsilon < 1$, $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$, *so gilt für* $r \geq r_1 \geq r_0$ *gleichmäßig in* k*:*

$$(1-\varepsilon)k^\lambda r^{\lambda(r)} < (kr)^{\lambda(kr)} < (1+\varepsilon)k^\lambda r^{\lambda(r)}.$$

Insbesondere folgt für $r \geq r_1$, $\frac{1}{4}r \leq t \leq 4r$*:* $r^{\lambda(r)-\lambda(t)} = 1 + o(1); \quad r \to \infty$.

Wegen (b) können wir nach trivialer Fortsetzung annehmen, dass $r^{\lambda(r)}$ für $r \geq 0$ monoton wachsend ist.

Beweis. Zu (a). Zunächst ist

$$\log \frac{L(kr)}{L(r)} = \big(\lambda(kr) - \lambda\big) \log k + \big(\lambda(kr) - \lambda(r)\big) \log r. \tag{1.1}$$

Wir fixieren $0 < a \leq k \leq 1$. Nach einer geeigneten Unterteilung von $[kr, r]$ und Anwendung des Mittelwertsatzes ist

$$|\lambda(r) - \lambda(kr)| \leq (1-k) r \sup_{\xi\in[kr,r]} |\tilde{\lambda}'(\xi)|.$$

Ist r_1 hinreichend groß, so ist nach Definition 1.1: $|\lambda(r) - \lambda| < \varepsilon$, $\sup\limits_{\xi\in[kr,r]} |\tilde{\lambda}'(\xi)\xi \log \xi| < \varepsilon$ für $r \geq r_1$, also

$$|\lambda(r) - \lambda(kr)| < \frac{1-k}{k} \frac{1}{\log kr} \varepsilon.$$

Das zusammen liefert in (1.1): $\log \frac{L(kr)}{L(r)} = o(1)$ und damit die Behauptung.

Zu (b). Es ist

$$\frac{d}{dr} r^{\lambda(r)} = e^{\lambda(r)\log r} \left(\frac{\lambda(r)}{r} + \lambda'(r) \log r \right) = r^{\lambda(r)-1} \big(\lambda(r) + r\lambda'(r) \log r\big). \tag{1.2}$$

Für $r \geq r_1$ ist der erste Summand in der Klammer größer als $\frac{\lambda}{2}$, der zweite kleiner als $\varepsilon < \frac{\lambda}{2}$, und $\frac{d}{dr} r^{\lambda(r)}$ ist damit positiv.

Zu (c). Folgt unmittelbar aus (a). □

Lemma 1.3. *(a) Für $\lambda < q+1, \alpha < r$ gilt:*

$$\int_\alpha^r t^{q-\lambda(t)} dt = \frac{1}{q+1-\lambda} r^{q+1-\lambda(r)} + o(r^{q+1-\lambda(r)}) \ll r^{q+1-\lambda(r)}, r \to \infty.$$

(b) Für $q < \lambda$ gilt:

$$\int_r^\infty t^{q-\lambda(t)-1} dt = \frac{1}{\lambda - q} r^{q-\lambda(r)} + o(r^{q-\lambda(r)}) \ll r^{q-\lambda(r)}.$$

Beweis. Zu (a). Wegen

$$\frac{d}{dt} t^{\lambda-\lambda(t)} = t^{\lambda-\lambda(t)-1}\big((\lambda - \lambda(t)) - \lambda'(t) t \log t\big) = o(t^{\lambda-\lambda(t)-1})$$

folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_\alpha^r t^{q-\lambda(t)} dt = \int_\alpha^r t^{q-\lambda} t^{\lambda-\lambda(t)} dt &= \frac{1}{q+1-\lambda} t^{q+1-\lambda} t^{\lambda-\lambda(t)} \Big|_\alpha^r \\ -\frac{1}{q+1-\lambda} \int_\alpha^r t^{q+1-\lambda} \frac{d}{dt} t^{\lambda-\lambda(t)} dt &= \frac{1}{q+1-\lambda} r^{q+1-\lambda(r)} + o(1) \int_\alpha^r t^{q-\lambda(t)} dt. \end{aligned}$$

Für $q < \lambda(t)$ ist das Restglied unmittelbar gegeben, für $q \geq \lambda(t)$ liefert die Abschätzung

$$\left| \int_\alpha^r t^{q-\lambda(t)} dt \right| \leq K r^{q+1-\lambda(r)}$$

ebenfalls die gewünschte Darstellung.

Zu (b). Analoge Überlegungen ergeben

$$\begin{aligned} \int_r^\infty t^{q-\lambda(t)-1} dt = \int_r^\infty t^{q-1-\lambda} t^{\lambda-\lambda(t)} dt &= \frac{1}{q-\lambda} t^{q-\lambda} t^{\lambda-\lambda(t)} \Big|_r^\infty \\ -o(1) \int_r^\infty t^{q-\lambda} t^{\lambda-\lambda(t)-1} dt &= \frac{1}{\lambda-q} r^{q-\lambda(r)} + o(r^{q-\lambda(r)}). \end{aligned}$$

□

Verfeinerte Ordnungen erfüllen hier zwei Funktionen. Die erste, auf Valiron zurückgehende klassische, verfolgt das Ziel, die Wachstumsskala für den Typus derart zu verfeinern, dass die Extremfälle Minimal- und Maximaltyp nicht mehr auftreten. (Die zweite Anwendung besprechen wir in Abschnitt 1.5 .)
Hat S die Ordnung $0 < \lambda < \infty$, so heißt jede verfeinerte Ordnung $\lambda(r)$ mit

$$0 < \sigma := \limsup_{r \to \infty} \frac{S(r)}{r^{\lambda(r)}} < \infty$$

eine verfeinerte Ordnung für S. Dabei heißt σ der verfeinerte Typus von S.
Als ersten zentralen Existenzsatz notieren wir:

Satz 1.4 (Existenz I). *Jede positive monotone Funktion S besitzt eine verfeinerte Ordnung. Dabei kann $\lambda(r)$ so gewählt werden, dass $S(r) \leq r^{\lambda(r)}$ für $r \geq r_0$ ist und für den verallgemeinerten Typus $\sigma = 1$ gilt.*

1.3 Anzahlfunktionen

Es sei (z_ν) eine Folge komplexer Zahlen $0 \leq |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$ ohne endlichen Häufungspunkt mit zugehöriger Anzahlfunktion

$$n(t) := \sharp\{z_\nu \quad \Big| \quad |z_\nu| \leq t\}.$$

Setzen wir $S(t) := n(t)$, so übertragen sich die obigen Begriffsbildungen Ordnung, Typus etc. auf $n(t)$. Gelegentlich sprechen wir vom Typus von (z_ν) und meinen damit den Typus der zugehörigen Anzahlfunktion $n(t)$. Weiter sei

$$N(r) := \int_0^r \frac{n(t) - n(0)}{t} dt + n(0) \log r, \quad r > 0. \tag{1.3}$$

Wegen

$$n(0) \log r + n(r) \log \frac{R}{r} \leq N(R) \leq n(R) \log R \tag{1.4}$$

für $0 < r < R$ stimmen Ordnung und Typklasse von $n(r)$ und $N(r)$ stets überein.

Wir nehmen ab jetzt an, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes erwähnt wird, dass die Ordnung von (z_ν) oder, was dasselbe ist, die Ordnung von $n(t)$ stets endlich ist.

1.4 Pólya- Peaks

Aus [J/V] entnehmen wir:

Lemma 1.5. *Es seien $\phi, \psi : [r_0, +\infty[\to \mathbb{R}_0^+$ mit folgenden Eigenschaften gegeben: ψ sei stetig, nullstellenfrei und monoton wachsend; außerdem mögen ϕ und ϕ/ψ in jedem abgeschlossenen Intervall ihr Maximum annehmen. Weiter gelte:*

1. $\limsup_{t \to \infty} \phi(t) = \infty$,
2. $\lim_{t \to \infty} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} = 0$.

Dann existiert eine Folge (t_m) mit $t_m \to \infty$, so dass simultan die Ungleichungen:

$$\phi(t) \leq \phi(t_m), \quad t_0 \leq t \leq t_m, \tag{1.5}$$

$$\frac{\phi(t)}{\psi(t)} \leq \frac{\phi(t_m)}{\psi(t_m)}, \quad t_m \leq t \tag{1.6}$$

erfüllt sind.

Bemerkung

Hat $n(t)$ die ordnung λ mit $0 < \lambda < \infty$, $0 < \varepsilon < \lambda$ und setzen wir $\phi(t) = \frac{n(t)}{t^{\lambda-\varepsilon}}, \psi(t) = t^{2\varepsilon}$, so garantiert Lemma 1.5 die Existenz einer unbeschränkten Folge $t_m \to \infty$ mit

1. $n(t) \leq n(t_m)\left(\frac{t}{t_m}\right)^{\lambda-\varepsilon}, \quad r_0 \leq t \leq t_m$ und

2. $n(t) \leq n(t_m)\left(\frac{t}{t_m}\right)^{\lambda+\varepsilon}, \quad t_m \leq t.$

Bekanntlich heißt (t_m) eine Folge von Pólya- Peaks der Ordnung λ für $n(t)$.

1.5 Verfeinerte Ordnungen II

Wir kommen zur zweiten Verwendung verfeinerter Ordnungen, die im nächsten Kapitel eine dominante Rolle spielt: Die Differenzierbarkeitseigenschaften werden verbessert, und für die extremale Folge (t_n) mit $n(t_n) = t_n^{\lambda(t_n)}$ kann eine geeignete Folge von Pólya-Peaks gewählt werden. (Allerdings kann jetzt nicht mehr $n(r) \leq r^{\lambda(r)}$ garantiert werden, weswegen keiner der Existenzsätze redundant ist.)

Satz 1.6 (Existenz II). *Es existiert eine verfeinerte Ordnung $\lambda(r)$ für $n(r)$ mit den zusätzlichen Eigenschaften:*

(a) $\lambda(r)$ ist stetig differenzierbar und besitzt eine stückweise stetige zweite Ableitung. Es gilt: $\lim\limits_{r\to\infty} \tilde{\lambda}''(r)r^2 \log r = 0$, wenn man noch $\tilde{\lambda}''(r) := \max\{\lambda''_+(r), \lambda''_-(r)\}$ setzt.

(b) Es existiert eine unbeschränkte Folge (τ_n) von Pólya-Peaks der Ordnung λ für $n(r)$ mit $n(\tau_n) = \tau_n^{\lambda(\tau_n)}$.

Wir folgen bei der Konstruktion der Darstellung von [F1].

Beweis. Zunächst fixieren wir $t > e^2$ und konstruieren eine Hilfsfunktion

$$\phi = \phi_t : [t, +\infty[\to [0, +\infty[; \quad r \mapsto \phi_t(r) := \begin{cases} \phi_1(r) & , \quad t \leq r \leq 2t \\ \phi_2(r) & , \quad 2t < r \leq u(t) \\ \phi_3(r) & , \quad u(t) < r \leq v(t) \\ \phi_4(r) & , \quad v(t) < r \end{cases}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es ist $\phi \in C^1([t, +\infty[)$ und ϕ hat eine stückweise stetige zweite Ableitung.

(ii) Es gilt $\phi'(r) = O(\frac{1}{r\log r})$, $\phi''(t) = O(\frac{1}{r^2 \log r})$, für $r \to \infty$. Dabei sind die O- Konstanten unabhängig von t.

(iii) Es ist $\phi(u) = 1$, $\phi(t) = 0$.

(iv) Es gilt $\phi'(t) = \phi'(v) = 0$.

(v) Die Funktion ϕ ist monoton wachsend.

Wir setzen ϕ stetig differenzierbar zusammen. Für $t \leq r \leq 2t$ erklären wir

$$\phi_1(r) := -\log\log r + \log\log t + \frac{r-t}{t\log t},$$

d.h.

$$\phi_1'(r) = -\frac{1}{r\log r} + \frac{1}{t\log t}.$$

Wir sehen

$$\phi_1(t) = \phi_1'(t) = 0 \tag{1.7}$$

und

$$0 < \phi_1'(r) < \frac{1}{t\log t} < \frac{4}{r\log r}, \quad t < r \leq 2t, \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{2t\log t} < \phi_1'(2t) = \frac{1}{t\log t} - \frac{1}{2t\log 2t} < \frac{1}{t\log t}. \tag{1.9}$$

Für $2t < r$ setzen wir ϕ stetig fort durch

$$\phi_2(r) := 2t\phi_1'(2t)\log 2t\big(\log\log r - \log\log 2t\big) + \phi_1(2t). \tag{1.10}$$

Da ϕ_2 in diesem Bereich monoton wächst und $\phi_1(2t) < 1$ ist, existiert ein $u > 2t$ mit

$$\phi_2(u) = 1. \tag{1.11}$$

Weiter ist wegen (1.9) und (1.10):

$$0 \leq \phi_2'(r) = 2t\phi_1'(2t)\log 2t\frac{1}{r\log r} < \frac{3}{r\log r}, \quad 2t < r \leq u. \tag{1.12}$$

Für $u < r$ erklären wir zunächst

$$\phi_3(r) := 2u\phi_2'(u)\log u\big(\log\log r - \log\log t\big) - (r-t)\phi_2'(u) + C, \tag{1.13}$$

wobei C so gewählt wird, dass ϕ_2 in u stetig fortgesetzt ist. Wegen (1.13),

$$\phi_3'(r) = \frac{2u\phi_2'(u)\log u}{r\log r} - \phi_2'(u), \text{ also } \phi_3'(u) = \phi_2'(u) > 0,$$

wird auch ϕ_2' in u stetig fortgesetzt. Da $\phi_3'(u) > 0$, $\phi_3'(2u) < 0$ existiert ein $v < 2u$ mit

$$\phi_3'(v) = 0. \tag{1.14}$$

Da ϕ_3' monoton fällt kommt

$$0 \leq \phi_3'(r) < \phi_3'(u) < \frac{4}{u\log u} < \frac{16}{r\log r}, \quad u < r \leq v. \tag{1.15}$$

Schließlich setzen wir:

$$\phi_4(r) := \phi_3(v), \quad r > v. \tag{1.16}$$

Es bleibt (i).– (v). einzusehen:
(i). Folgt unmittelbar aus der Konstruktion.
(ii). Nach Definition von ϕ_k folgt

$$\phi''(r) = O\left(\left|\frac{d^2}{dr^2}\log\log r\right|\right) = O\left(\frac{1}{r^2\log r}\right).$$

Wegen (1.8),(1.12),(1.15) und (1.16) folgt die O-Charakterisierung für ϕ'.
(iii). Folgt aus (1.7) und (1.11).
(iv). Folgt aus (1.7) und (1.14).
(v). Folgt aus (1.8),(1.12),(1.15) und (1.16).

Nun konstruieren wir $\lambda(r)$ und die gewünschte Teilfolge der Pólya- Peaks simultan. Es sei $t_1, t_2, \ldots$ eine Folge von Pólya- Peaks von $n(r)$, und $\tau_1 := t_1 > e^2$ ein solcher Peak. Weiter sei τ_2 der kleinste Peak, für den $\tau_2 \geq v(\tau_1)$ gelte. Wir setzen

$$\lambda(r) := \frac{\log n(\tau_1)}{\log \tau_1} + \alpha_1 \phi_{\tau_1}(r), \quad \tau_1 \leq r \leq \tau_2,$$

wobei α_1 so bestimmt ist, dass im Punkt τ_2 gilt:

$$\lambda(\tau_2) = \frac{\log n(\tau_2)}{\log \tau_2}.$$

Die Konstruktion führen wir induktiv fort. Sind die Werte $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n$ bereits bestimmt und $\lambda(r)$ im Intervall $[\tau_1, \tau_n]$ erklärt, so wählen wir für τ_{n+1} den kleinsten Pólya- Peak, für den $\tau_{n+1} \geq v(\tau_n)$ besteht. Weiter sei

$$\lambda(r) := \frac{\log n(\tau_n)}{\log \tau_n} + \alpha_n \phi_{\tau_n}(r), \quad \tau_n < r \leq \tau_{n+1}, \quad n > 1,$$

wobei α_n so bestimmt ist, dass an der Stelle τ_{n+1} gilt:

$$\lambda(\tau_{n+1}) = \frac{\log n(\tau_{n+1})}{\log \tau_{n+1}}. \tag{1.17}$$

Wegen (iii). und (v). gilt: $\phi_{\tau_n}(\tau_{n+1}) = \phi(v(\tau_n)) \geq \phi(u) = 1$. Da τ_n eine Folge von Pólya-Peaks bildet folgt unter zusätzlicher Verwendung von (v). für $n \to \infty$:

$$|\alpha_n| \phi_{\tau_n}(r) \leq |\alpha_n| \phi_{\tau_n}(\tau_{n+1}) = \left| \frac{\log n(\tau_{n+1})}{\log \tau_{n+1}} - \frac{\log n(\tau_n)}{\log \tau_n} \right| \to 0, \quad \tau_n \leq r \leq \tau_{n+1}. \tag{1.18}$$

Fassen wir zusammen: Offenbar ist $\lambda(r)$ stetig und außerhalb der τ_n differenzierbar. Wegen $\phi'_{\tau_n}(\tau_{n+1}) = 0 = \phi'_{\tau_{n+1}}(\tau_{n+1})$ nach (iv). ist $\lambda(r)$ auch in diesen Stellen differenzierbar. Außerdem besitzt $\lambda(r)$ stückweise eine zweite Ableitung. Wegen (ii). und (1.18) ist weiter

$$|\lambda'(r) r \log r| = O(\alpha_n) = o(1), \quad |\lambda''(r) r^2 \log r| = O(\alpha_n) = o(1), \quad r \to \infty,$$

sowie für $\tau_n \leq r \leq \tau_{n+1}$:

$$|\lambda(r) - \lambda| \leq \left| \frac{\log n(\tau_n)}{\log \tau_n} - \lambda \right| + |\alpha_n \phi_{\tau_n}(r)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Damit ist $\lambda(r)$ eine verfeinerte Ordnung und Eigenschaft (a) des Satzes ist erfüllt. Eigenschaft (b) liest man aus (1.17) ab. $\square$

In Kapitel 2 werden wir die verschärften Bedingungen, insbesondere (a) wesentlich ausnutzen. Die Bedingung (b) garantiert eine technisch wichtige Besonderheit.

Korollar 1.7. *Das Integral $\int_\alpha^\infty n(r) r^{-\lambda(r)-1} dr$, $\alpha > 0$ ist divergent.*

Beweis. Es sei τ_n ein Pólya- Peak mit $n(\tau_n) = \tau_n^{\lambda(\tau_n)}$ und $\lambda(\tau_n) \geq 2\lambda$. Dann kommt wegen

$\tau_n \le r \le 2\tau_n$ und Lemma 1.2 (c) folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_n}^{2\tau_n} n(r) r^{-\lambda(r)-1} dr &\ge n(\tau_n)\tau_n^{-\lambda(\tau_n)} \int_{\tau_n}^{2\tau_n} \tau_n^{\lambda(\tau_n)} r^{-\lambda(r)-1} dr \\
\ge \int_{\tau_n}^{2\tau_n} \left(\frac{1}{2}r\right)^{\lambda(\tau_n)} r^{-\lambda(r)-1} dr &\ge \left(\frac{1}{2}\right)^{2\lambda} \int_{\tau_n}^{2\tau_n} r^{\lambda(\tau_n)-\lambda(r)-1} dr \\
= \left(\frac{1}{2}\right)^{2\lambda} (1+o(1)) \int_{\tau_n}^{2\tau_n} r^{-1} dr &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2\lambda} (1+o(1)) \log 2,
\end{aligned}$$

d.h. $\left(\int_{\tau_n}^{2\tau_n} n(r) r^{-\lambda(r)-1} dr\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bildet keine Cauchy- Folge. □

1.6 Ganze und meromorphe Funktionen

Unter einer meromorphen Funktion verstehen wir, sofern nichts anderes gesagt wird, eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$. Wir erinnern an die grundlegenden Begriffe der Nevanlinna-Theorie.

Ist f meromorph, $r > 0$ und $n(r, f)$ die Anzahlfunktion der Polstellen von f, so heißt

$$N(r, f) := \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log r$$

Nevanlinna'sche Anzahlfunktion,

$$m(r, f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(re^{i\phi})| d\phi$$

Schmiegungsfunktion und

$$T(r, f) := m(r, f) + N(r, f)$$

die Nevanlinnasche Charakteristik von f. Die Rechtfertigung für diese Namensgebung wird im ersten Hauptsatz festgestellt.

Satz 1.8 (Erster Hauptsatz). *Sei f meromorph, $a \in \mathbb{C}$ und $(f(z)-a)^{-1} = \sum\limits_{\nu \ge p(a)}^{\infty} c_\nu z^\nu$, so gilt für jedes $r > 0$:*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + \log |c_{p(a)}| + \varepsilon(a, r),$$

mit $|\varepsilon(a, r)| \le \overset{+}{\log}|a| + \log 2$.

Die Ordnung $\lambda(f)$, Typklasse etc. einer meromorphen Funktion wird durch $S(r) := T(r, f)$ den allgemeinen Begriffsbildungen unterworfen. Ist f darüber hinaus ganz mit Maximalbetrag $M(r, f) := \max\limits_{|z| \le r} |f(z)|$, so kann man wegen

$$T(r, f) \le \overset{+}{\log} M(r, f) \le 3T(2r, f), \quad r > 0$$

auch $S(r) = \overset{+}{\log} M(r, f)$ setzen, ohne Ordnung und Typklasse zu verändern.

1.7 Kanonische Produkte

Es sei (z_ν) eine Folge $0 < |z_1| \le |z_2| \le \dots$ endlicher Ordnung λ. Für die Konvergenztheorie erweisen sich die Begriffe des Konvergenzexponenten:

$$\lambda_1 := \inf\left\{\alpha > 0 \;\middle|\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|z_\nu|^\alpha} < \infty\right\} \in [0, \infty[$$

und des Geschlechtes von (z_ν):

$$p := \min\left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|z_\nu|^{k+1}} < \infty\right\}$$

als nützlich. Diese stehen mit der Ordnung in der einfachen Relation

$$p \le \lambda_1 = \lambda \le p + 1. \tag{1.19}$$

Wir bezeichnen den Weierstrassschen Primfaktor der Ordnung p mit

$$E(p, z) := (1 - z) \exp \sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}.$$

In unserer Situation konvergiert das sogenannte kanonische Produkt von (z_ν):

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(p, \frac{z}{z_\nu}\right)$$

lokal gleichmäßig gegen eine ganze Funktion $\prod$, die genau in den Punkten (z_ν) verschwindet. Nach einem klassischen Satz von Borel gilt $\lambda = \lambda(\prod)$, womit sich die Kette in (1.19) verlängern lässt. Es gilt

$$T\big(r, \prod\big) \le (p+1)A(p)\left\{r^p \int_0^r n(t)t^{-p-1}dt + r^{p+1} \int_r^\infty n(t)t^{-p-2}dt\right\}, \tag{1.20}$$

mit $A(0) = 1, A(p) = 2(2 + \log(p+1)), p \ge 1$.

1.7.1 Typ von (z_ν) versus Typ von $\prod$

Wir fassen die für unsere Untersuchungen wichtigen Typergebnisse kanonischer Produkte zusammen.

1. Bei $\lambda \notin \mathbb{N}$ stimmen Typklasse von $\prod$ und (z_ν) überein.
2. Bei $\lambda \in \mathbb{N}$ liegen die Verhältnisse etwas komplizierter. Es kann $p = \lambda$ oder $p+1 = \lambda$ auftreten, außerdem benötigen wir eine Verteilungsgröße für (z_ν). Wir diskutieren $p = \lambda \ge 1$ und setzen:

$$\delta(r) := \frac{1}{p} \sum_{|z_\nu| \le r} z_\nu^{-p}, \quad \delta := \limsup_{r \to \infty} |\delta(r)| \in [0, \infty]. \tag{1.21}$$

Damit gilt, vgl. [Le]: S.27, Lehrsatz 15,

Satz 1.9. *Ist $\prod$ ein kanonisches Produkt von (z_ν) der Ordnung $\lambda(\prod) \in \mathbb{N}$ und Geschlecht $p = \lambda(\prod)$, so gilt:*
Die Typklasse von $\prod$ stimmt mit der Typklasse von $\max(\delta, \sigma((z_\nu)))$ überein, sofern $\sigma((z_\nu))$ den Typus von (z_ν) darstellt.

Der ausgesparte Fall $p = 0$ wird in anderem Zusammenhang von Interesse sein.

1.7.2 Faktorisierung meromorpher Funktionen endlicher Ordnung

Satz 1.10 (Hadamard). *Es sei f meromorph der Ordnung $\lambda(f) < \infty$ mit den Nullstellen (z_ν) und den Polstellen (w_μ). Dann besitzt f die Faktorisierung*

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \frac{\prod_{\nu=1}^{\omega_1} E\left(p_1, \frac{z}{z_\nu}\right)}{\prod_{\mu=1}^{\omega_2} E\left(p_2, \frac{z}{w_\mu}\right)}, \tag{1.22}$$

mit $m \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq \omega_1, \omega_2 \leq \infty$ und einem Polynom $P(z) = a_k z^k + \ldots + a_0$ vom Grade $k \leq \lambda$. Wählen wir für p_1 und p_2 die zugehörigen Geschlechter von (z_ν) bzw. (w_μ), so gilt $\max(p_1, p_2) \leq \lambda(f)$, und diese Faktorisierung ist bis auf eine additive Konstante modulo $2\pi i\mathbb{Z}$ für $P(z)$ eindeutig.

1.7.3 Ganze Funktionen unterer Ordnung $\rho(f) \leq \frac{1}{2}$

Von Bedeutung ist folgendes Ergebnis über das Minimum

$$m(r) := \min_{|z|=r} |f(z)|, \quad r > 0.$$

Satz 1.11 (Wiman). *Ist f ganz, von der Ordnung $\lambda(f) < 1$ und gilt*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r,f)}{r^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

dann ist entweder $\limsup_{r\to\infty} m(r) = \infty$ oder f ist konstant.

1.8 Reguläre Punktverteilungen

Sind die Nullstellen eines kanonischen Produktes sehr regelmäßig verteilt, so hat es ein vollkommen reguläres radiales Wachstum zur Folge. Diese folgenden, sehr tiefliegenden Resultate entnehmen wir [Le]: S.88ff.

Wir beschränken das Argument durch $0 \leq \arg\cdot < 2\pi$, erklären für $0 < \alpha < 2\pi$ die Anzahlfunktion

$$n(r,\alpha) := \sharp\{z_\nu \quad | \quad |z_\nu| \leq r, 0 < \arg z_\nu < \alpha\} \tag{1.23}$$

und nennen (z_ν) regelmäßig verteilt bzgl. der Ordnung $\lambda(r)$, falls

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r,\alpha)}{r^{\lambda(r)}} =: \Delta(\alpha)$$

mit bis auf abzählbar vielen Ausnahmen α existiert. Zu dieser regelmäßigen Verteilung fordern wir eine weitere Regularitätsbedingung.

(R1) Es existiere $d > 0$, so dass für $R_\nu := d|z_\nu|^{1-\frac{\lambda(|z_\nu|)}{2}}$ gilt: $B_{R_\nu}(z_\nu) \cap B_{R_\mu}(z_\mu) = \varnothing$ für $\mu \neq \nu$. In dem Zusammenhang ist dann $E = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} B_{R_\nu}(z_\nu)$.

(R2) Es existiere $d > 0$, so dass $|z_{\nu+1}| - |z_\nu| > d|z_\nu|^{1-\lambda(|z_\nu|)}$ bleibt. Hier setzen wir $E = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} B_{d|z_\nu|^{1-\lambda(|z_\nu|)}}(z_\nu)$.

Satz 1.12 (Pfluger/Lewin). *Es sei (z_ν) regelmäßig verteilt bzgl. der verfeinerten Ordnung $\lambda(r)$, $\lambda \notin \mathbb{N}$ und eine der Regularitätsbedingungen (R1), (R2) sei erfüllt. Weiter bezeichne man das zugehörige kanonische Produkt mit*

$$g(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left([\lambda], \frac{z}{z_\nu}\right).$$

Man setze noch

$$H(\delta) = \frac{\pi}{\sin \lambda\pi} \int_{\delta-2\pi}^{\delta} \cos \lambda(\delta - \psi - \pi) d\Delta(\psi). \tag{1.24}$$

Dann gilt:

$$\lim_{r\to\infty, r\notin E} \frac{\log |f(re^{i\delta})|}{r^{\lambda(r)}} = H(\delta),$$

und diese radiale Konvergenz ist gleichmäßig in δ.

Kapitel 2

Radiales Verhalten kanonischer Produkte

Wir nehmen jetzt ein für Kapitel 3 grundlegendes Resultat in Angriff. Sofern nichts anderes gesagt wird, setzen wir voraus, dass $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$ eine Folge nicht ganzzahliger Ordnung sei. Ist g ganz von der Ordnung λ mit den Nullstellen (z_ν), so ist nach Satz 1.10 die Faktorisierung

$$g(z) = e^{Q(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left([\lambda], \frac{z}{z_\nu}\right) \tag{2.1}$$

mit einem Polynom Q vom Grad $< \lambda$ möglich. Wir schreiben oft abkürzend $T(r)$ für $T(r, g)$. Weiter beschränken wir das Argument $0 \leq \arg\cdot < 2\pi$ und erinnern an die Anzahlfunktionen der Nullstellen $n(r) := n(r, 1/g)$ bzw. $n(r, \alpha)$, $\alpha > 0$ in (1.23). Der folgende Satz stellt das Hauptresultat dieses Kapitels dar.

Satz 2.1. *Es gelte $\delta < \arg z_\nu < 2\pi - \delta$ für ein $\delta > 0$. Zu $\varepsilon > 0$ existieren dann beliebig große r, so dass gilt:*

$$\frac{\log |g(re^{i\delta})g(re^{-i\delta})|}{n(r)} \leq \frac{2\pi \cos \lambda\delta}{n(r) \sin \lambda\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \cos \lambda(\alpha - \pi) dn(r, \alpha) + \varepsilon.$$

Wir können nun g entlang der Strahlen $re^{i\delta}$ einigermaßen kontrollieren. Ist $\lambda > \frac{1}{2}$ und (z_ν) in ausgesuchte Winkelräume gepackt, so wird $|g|$ für beliebig große r auf mindestens einem der Strahlen klein. Für uns ist wichtig:

Korollar 2.2. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes 2.1 gegeben. Man wähle $\eta > 0$ klein. Die Folge (z_ν) der Ordnung λ erfülle die zu λ zugehörige Bedingung:*

- *Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $2k < \lambda < 2k + 1$ gelte:*

$$\alpha_\nu = \arg z_\nu \in E_{\lambda,\eta} := \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \left\{ \alpha \;\middle|\; \frac{\pi}{\lambda}\left(2l + \frac{1}{2} + \lambda\right) + \eta \leq \alpha \leq \frac{\pi}{\lambda}\left(2l + \frac{3}{2} + \lambda\right) - \eta \right\}.$$

- *Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $2k + 1 < \lambda < 2k + 2$ gelte:*

$$\alpha_\nu = \arg z_\nu \in E_{\lambda,\eta} := \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \left\{ \alpha \;\middle|\; \frac{\pi}{\lambda}\left(2l - \frac{1}{2} + \lambda\right) + \eta \leq \alpha \leq \frac{\pi}{\lambda}\left(2l + \frac{1}{2} + \lambda\right) - \eta \right\}.$$

Sei g durch (2.1) gegeben. Dann existiert eine Konstante $K > 0$ und ein $\delta > 0$, so dass auf mindestens einem der beiden Strahlen $\arg z = \pm\delta$ für beliebig große $|z| = r$ gilt:

$$|g(z)| \le e^{-\frac{1}{2}Kn(r)}.$$

Beweis. Wähle $\delta > 0$ so klein, dass $\cos\lambda\delta > 0$ bleibt. Die Bedingungen implizieren

$$\operatorname{sign}\left(\frac{1}{\sin\lambda\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\cos\lambda(\alpha-\pi)dn(r,\alpha)\right) = -1.$$

Im ersten Fall etwa erhalten wir $\cos\lambda(\alpha_\nu - \pi) \le A < 0$, daher

$$\frac{1}{n(r)\sin\lambda\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\cos\lambda(\alpha-\pi)dn(r,\alpha) \le \frac{A}{\sin\lambda\pi} = A' < 0.$$

Ist $\varepsilon < -A'\pi\cos\lambda\delta$, so liefert Satz 2.1 für beliebig große r:

$$\frac{\log|g(re^{i\delta})g(re^{-i\delta})|}{n(r)} \le A'\pi\cos\lambda\delta =: -K < 0.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Der Beweis von Satz 2.1 beginnt nach einem vorbereitenden Lemma in Abschnitt 2.2 und zieht sich bis an den Schluss des Kapitels. Die Beweisstrategie geht im Wesentlichen auf Fuchs [F1] und Goldberg [G] zurück. Weitere wesentliche Impulse zu diesem Ansatz findet man in der Arbeit von Brosch und Volkmann [B/V]. Aufgrund der recht technischen Beweisführung geben wir einen kurzen Überblick des Ablaufes.

Die Abschätzung wird durch einen Glättungsprozess gewonnen: Wir zeigen mit der verfeinerten Ordnung $\lambda(r)$ aus Satz 1.6:

$$\int_t^s r^{-\lambda(r)-1}\frac{\lambda\sin\lambda\pi}{\pi}\log|g(re^{i\delta})g(re^{-i\delta})|dr = 2\cos\lambda\delta\sum_{t<|z_\nu|<s}|z_\nu|^{-\lambda(|z_\nu|)}\cos\lambda(\alpha_\nu-\pi)+E(t,s),$$

mit einem Restterm

$$E(t,s) \ll t^{-\lambda(t)}T(2t) + s^{-\lambda(s)}T(2s) + o\left(\int_t^s r^{-\lambda(r)-1}T(r)dr\right).$$

Dabei läßt sich die trigonometrische Summe in ein integriertes Riemann- Stieltjes- Integral umschreiben:

$$\begin{aligned}\sum_{t<|z_\nu|<s}|z_\nu|^{-\lambda(|z_\nu|)}\cos\lambda(\alpha_\nu-\pi) \quad &\le \quad \int_t^s r^{-\lambda(r)-1}\left\{\int_\delta^{2\pi-\delta}\lambda\cos\lambda(\alpha-\pi)dn(r,\alpha)\right\}dr\\ = n(s)s^{-\lambda(s)} + n(t)t^{-\lambda(t)} \quad &+ \quad o\left(\int_t^s r^{-\lambda(r)-1}T(r)dr\right).\end{aligned}$$

Besonders sorgfältig muss der verwickelte Restterm diskutiert werden. Wir zeigen, dass für zwei unbeschränkte Folgen (t_n), (s_n) mit $s_n > t_n$ gilt

$$E(t_n,s_n) = o(1)\int_{t_n}^{s_n} r^{-\lambda(r)-1}n(r)dr, \quad t_n \to \infty.$$

Dies führt dann auf eine integrierte Version des Satzes:

$$\int_t^s r^{-\lambda(r)-1}n(r)\left\{\frac{\log g(re^{i\delta})g(re^{-i\delta})|}{n(r)} - \frac{2\pi\cos\lambda\delta}{n(r)\sin\lambda\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta}\cos\lambda(\alpha-\pi)dn(r,\alpha)+o(1)\right\}dr \le 0.$$

2.1 Ein Lemma

Lemma 2.3. *Es seien $\tau = \tau_m$, $\sigma = \tau_n > \tau$ Pólya-Peaks von $n(r)$, die im Zusammenhang der verfeinerten Ordnung $\lambda(r)$ die Konditionen von Satz 1.6 erfüllen und es sei $\frac{1}{4}\tau < t < \frac{1}{2}\tau$, $\frac{1}{4}\sigma < s < \frac{1}{2}\sigma$. Dann gilt für $\tau > t_0$:*

$$\int_t^s T(r)r^{-\lambda(r)-1}dr \ll \int_t^s n(r)r^{-\lambda(r)-1}dr + n(\tau)\tau^{-\lambda(\tau)} + n(\sigma)\sigma^{-\lambda(\sigma)}.$$

Beweis. Wegen (1.20) ist

$$T(r) \leq (p+1)A(p)\left(r^p \int_0^r n(u)u^{-p-1}du + r^{p+1}\int_r^\infty n(u)u^{-p-2}du\right).$$

Eine Integration bzgl. r über das Intervall $[t,s]$ zeigt unter Berücksichtigung von $t < \sigma$:

$$\begin{aligned} \int_t^s T(r)r^{-\lambda(r)-1}dr &< \int_t^\sigma T(r)r^{-\lambda(r)-1}dr \\ \ll \int_t^\sigma r^{-\lambda(r)-1+p}\int_0^r n(u)u^{-p-1}dudr &+ \int_t^\sigma r^{p-\lambda(r)}\int_r^\infty n(u)u^{-p-2}dudr \\ \ll \int_t^\sigma r^{-\lambda(r)-1+p}dr\int_0^t n(u)u^{-p-1}du &+ \int_t^\sigma r^{-\lambda(r)-1+p}\int_t^r n(u)u^{-p-1}dudr \\ +\int_t^\sigma r^{p-\lambda(r)}\int_r^\sigma n(u)u^{-p-2}dudr &+ \int_t^\sigma r^{p-\lambda(r)}dr\int_\sigma^\infty n(u)u^{-p-2}du \\ =: I_1 + I_2 + I_3 + I_4. & \end{aligned}$$

Die Integrale I_k schätzen wir jetzt ab und beachten dabei: $t < \tau < 4t$. Wegen Bemerkung 1.4.1), Lemma 1.3.(a) und Lemma 1.2.(c) kommt

$$\begin{aligned} I_1 \ll t^{p-\lambda(t)}n(\tau)\tau^{\varepsilon-\lambda}\int_{|z_0|}^t u^{\lambda-\varepsilon-p-1}du &\ll t^{p-\lambda(t)}n(\tau)\tau^{\varepsilon-\lambda}t^{\lambda-\varepsilon-p} \\ \ll \tau^{p-\lambda(\tau)}n(\tau)\tau^{\varepsilon-\lambda}\tau^{\lambda-\varepsilon-p} &\ll n(\tau)\tau^{-\lambda(\tau)}. \end{aligned}$$

Die Integration von $h(r,u) := r^{p-\lambda(r)-1}n(u)u^{-p-1}$ auf $t \leq r \leq \sigma$, $\quad t \leq u \leq r$ entspricht derjenigen auf $t \leq u \leq \sigma$, $u \leq r \leq \sigma$. Ein Vertauschen der Integrationsreihenfolge liefert mit Lemma 1.3.(b):

$$\begin{aligned} I_2 = \int_t^\sigma n(u)u^{-p-1}\int_u^\sigma r^{p-\lambda(r)-1}drdu &\leq \int_t^\sigma n(u)u^{-p-1}\int_u^\infty r^{p-\lambda(r)-1}drdu \\ \ll \int_t^\sigma n(u)u^{-p-1+p-\lambda(u)}du &= \int_t^\sigma n(u)u^{-\lambda(u)-1}du. \end{aligned}$$

Analog entspricht die Integration von $h(r,u) := r^{p-\lambda(r)}n(u)u^{-p-2}$ auf $t \leq r \leq \sigma$, $r \leq u \leq \sigma$, derjenigen auf $t \leq u \leq \sigma$, $t \leq r \leq u$, also erhalten wir mit Lemma 1.3.(a):

$$I_3 = \int_t^\sigma n(u)u^{-p-2}\int_t^u r^{p-\lambda(r)}drdu \ll \int_t^\sigma n(u)u^{-\lambda(u)-1}du.$$

Letztlich gilt wegen $s < \sigma < 4s$ mit Bemerkung 1.4.2), Lemma 1.3.(a) und Lemma 1.2.(c):

$$\begin{aligned} I_4 &\ll \sigma^{p+1-\lambda(\sigma)} n(\sigma)\sigma^{-\lambda-\epsilon} \int_\sigma^\infty u^{-p-2+\lambda+\epsilon} du \\ &\ll \sigma^{p+1-\lambda(\sigma)} n(\sigma)\sigma^{-\lambda-\varepsilon}\sigma^{-p-1+\lambda+\varepsilon} = n(\sigma)\sigma^{-\lambda(\sigma)}. \end{aligned}$$

Zusammen führt das zu

$$\int_t^s T(r) r^{-\lambda(r)-1} dr \ll n(\sigma)\sigma^{-\lambda(\sigma)} + n(\tau)\tau^{-\lambda(\tau)} + \int_t^\sigma n(u) u^{-\lambda(u)-1} du. \tag{2.2}$$

Um von (2.2) zur Behauptung zu gelangen, ist das rechte Integral im Bereich von $[s, \sigma]$ zu diskutieren. Wegen $\frac{1}{4}\sigma < s \le u \le \sigma$ haben wir aus Lemma 1.2.(c): $u^{-\lambda(u)-1} = u^{-\lambda(\sigma)-1}(1 + o(1))$, und damit folgt

$$\begin{aligned} \int_s^\sigma n(u) u^{-\lambda(u)-1} du &\le \int_{1/4\sigma}^\sigma n(u) u^{-\lambda(u)-1} du \\ \ll n(\sigma) \int_{1/4\sigma}^\sigma u^{-\lambda(\sigma)-1} du &\ll n(\sigma)\sigma^{-\lambda(\sigma)}. \end{aligned}$$

Deswegen erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_t^\sigma n(u) u^{-\lambda(u)-1} du &= \left\{ \int_t^s + \int_s^\sigma \right\} n(u) u^{-\lambda(u)-1} du \\ &\ll \int_t^s n(u) u^{-\lambda(u)-1} du + n(\sigma)\sigma^{-\lambda(\sigma)}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

also aus (2.2) und (2.3):

$$\int_t^s T(r) r^{-\lambda(r)-1} dr \ll n(\sigma)\sigma^{-\lambda(\sigma)} + n(\tau)\tau^{-\lambda(\tau)} + \int_t^s n(u) u^{-\lambda(u)-1} du,$$

wie im Lemma behauptet war. □

2.2 Beweis von Satz 2.1

Für $t, s, \rho > 0$ setzen wir:

$$B := B_{\rho,t,s} := \{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \quad | \quad t < |z| < s, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad |z - z_\nu| > \rho \},$$

wobei ρ so klein sei, dass für $t < |z_\nu| < s$ die Kreise $\overline{B_\rho(z_\nu)}$ im geschlitzten Kreisring $B_{t,s}(0) \backslash \mathbb{R}^+$ enthalten sein mögen. Weiter setzen wir für alles Folgende

$$u(z) := \log |g(z)|, \quad v(re^{i\theta}) := r^{-\lambda(r)} \cos \lambda(\theta - \pi).$$

Wir benutzen die Green'sche Formel

$$\frac{1}{2\pi} \int_{B_{\rho,t,s}} (u\Delta v - v\Delta u) dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_{\rho,t,s}} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \tag{2.4}$$

Dabei bezeichne $\frac{\partial}{\partial n}$ die Richtungsableitung entlang der äußeren Normalen von $B_{\rho,t,s}$. Die beiden folgenden Hilfssätze werten zunächst Gebiets- und Randintegral aus.

2.2.1 Das Gebietsintegral

Lemma 2.4. *Für hinreichend kleines $\rho > 0$ gilt*

$$\left|\int_{B_{\rho,t,s}} (u\Delta v - v\Delta u)dS\right| = o\bigg(\int_t^s T(r)r^{-\lambda(r)-1}dr\bigg), \quad t \to \infty.$$

Beweis. Wir berechnen zunächst für $r \to \infty$ die Größenordnung von Δv mit

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
r\frac{\partial}{\partial r}v &= \big(-\lambda'(r)r\log r - \lambda(r)\big)r^{-\lambda(r)}\cos\lambda(\theta-\pi),\\
\frac{\partial}{\partial r}\bigg(r\frac{\partial}{\partial r}v\bigg) &= \big(-\lambda''(r)r^2\log r - \lambda'(r)r\log r - 2\lambda'(r)r + \lambda'^2(r)r^2\log^2 r\\
&\quad +\lambda^2(r) + 2\lambda'(r)\lambda(r)r\log r\big)r^{-\lambda(r)-1}\cos\lambda(\theta-\pi)
\end{aligned}$$

ist unter Berücksichtigung von Satz 1.6.(a):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\bigg(r\frac{\partial}{\partial r}\bigg)v = \big(\lambda^2(r) + o(1)\big)r^{-\lambda(r)-2}\cos\lambda(\theta-\pi).$$

Schließlich ist noch

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}v = -r^{-\lambda(r)-2}\lambda^2\cos\lambda(\theta-\pi).$$

Wir gewinnen

$$\Delta v = o\big(r^{-\lambda(r)-2}\big), \quad r \to \infty. \tag{2.5}$$

Da g holomorph und nullstellenfrei in $B_{\rho,t,s}$ ist, ist $\Delta u \equiv 0$, und wir können unter Verwendung von (2.5) nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned}
\left|\int_B (u\Delta v - v\Delta u)dS\right| = \left|\int_B u\Delta v dS\right| &\leq \int_B \big|\log|g(re^{i\theta})|\big||\Delta v||dS|\\
\leq \int_t^s r\bigg(\int_0^{2\pi}\big|\log|g(re^{i\theta})|\big|d\theta\bigg)o(r^{-\lambda(r)-2})dr &= o\bigg(\int_t^s r^{-\lambda(r)-1}\bigg(m(r,g) + m\bigg(r,\frac{1}{g}\bigg)\bigg)dr\bigg)\\
&= o\bigg(\int_t^s r^{-\lambda(r)-1}T(r)dr\bigg), \quad t \to \infty,
\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich das letzte Gleichheitszeichen unter Verwendung des ersten Hauptsatzes 1.8. Die Abschätzung bleibt offenbar richtig, falls wir den Grenzübergang $\rho \to 0$ durchführen. □

2.2.2 Das Randintegral

Wir erinnern noch einmal an die Normierung des Arguments und die Voraussetzung $z_\nu \notin \mathbb{R}_0^+$.

Lemma 2.5. *Es gilt*

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_{\rho,t,s}}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds &= -\frac{\lambda\sin\lambda\pi}{\pi}\int_t^s r^{-\lambda(r)-1}\log|g(r)|dr\\ +\sum_{t<|z_\nu|<s}|z_\nu|^{-\lambda(|z_\nu|)}\cos\lambda(\alpha_\nu-\pi) &+ R_t+R_s\end{aligned}$$

mit

$$|R_r|\ll\int_0^{2\pi}\left|\log|g(re^{i\theta})|\right|r^{-\lambda(r)-1}rd\theta+\int_0^{2\pi}r^{-\lambda(r)}\left|\frac{g'}{g}(re^{i\theta})\right|rd\theta.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass auf den Rändern $|z|=t,s$ keine Nullstellen liegen. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_{\rho,t,s}}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds &= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{\bigcup\limits_{t<|z_\nu|<s}\{|z-z_\nu|=\rho\}}+\int_{\{|z|=t\}\cup\{|z|=s\}}+\int_{\{\theta=0\}\cup\{\theta=2\pi\}}\right\}(\ldots)ds\\ &:= I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

Wir behandeln den Beitrag von I_1. Mit der lokalen Entwicklung

$$g(z)=R(z-z_\nu)^m(1+h(z)),\quad R\neq 0,\quad h(z_\nu)\neq -1$$

folgt für $z=z_\nu+\rho e^{i\phi}$, $0\leq\phi\leq 2\pi$:

$$\log|g(z)|=\log|R|+m\log\rho+\log|1+h(z)|;$$

wegen $\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial\rho}$ erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial n}\log|g(z)|=-\left(\frac{m}{\rho}+\frac{\partial}{\partial\rho}\log|1+h(z)|\right)=-\frac{m}{\rho}+O(1),\quad\rho\to 0.$$

Aus Stetigkeitsgründen ist

$$v(z)\to|z_\nu|^{-\lambda(|z_\nu|)}\cos\lambda(\alpha_\nu-\pi),\quad\rho\to 0.$$

Daraus folgt unter Verwendung von $ds=\rho d\phi$ für $\rho\to 0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_\rho(z_\nu)}v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(m+O(\rho))v(z_\nu+\rho e^{i\phi})d\phi\to -m|z_\nu|^{-\lambda(|z_\nu|)}\cos\lambda(\alpha_\nu-\pi).$$

Weiter ist offensichtlich

$$\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|=O(1),\quad u(z)=O(\log\rho),\quad\rho\to 0,$$

also:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_\rho(z_\nu)}u\frac{\partial v}{\partial n}ds=O(\rho\log\rho)=o(1),\quad\rho\to 0,$$

und damit ist insgesamt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_\rho(z_\nu)}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds\to m|z_\nu|^{-\lambda(|z_\nu|)}\cos\lambda(\alpha_\nu-\pi),\quad\rho\to 0.$$

Als nächstes werten wir I_2 aus. Es ist

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\theta=0}=<\nabla u,\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}>=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\theta=2\pi}=<\nabla u,\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}>=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Wegen

$$\big\{-\lambda'(r)r\log r - \lambda(r)\big\}r^{-\lambda(r)-1}\cos\lambda(\theta-\pi) = \frac{\partial}{\partial r}v = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta,$$
$$-r^{-\lambda(r)}\lambda\sin\lambda(\theta-\pi) = \frac{\partial}{\partial\theta}v = -\frac{\partial v}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial y}r\cos\theta$$

folgt

$$\frac{\partial v}{\partial y}(re^{i\theta})\bigg|_{\theta=0} = r^{-\lambda(r)-1}\lambda\sin\lambda\pi, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(re^{i\theta})\bigg|_{\theta=2\pi} = -r^{-\lambda(r)-1}\lambda\sin\lambda\pi$$

und damit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial n}(re^{i\theta})\bigg|_{\theta=0} &= < \nabla v(re^{i\theta})|_{\theta=0}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} > = < \nabla v(re^{i\theta})|_{\theta=2\pi}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} > = \frac{\partial v}{\partial n}(re^{i\theta})\bigg|_{\theta=2\pi}\\ &= -r^{-\lambda(r)-1}\lambda\sin\lambda\pi.\end{aligned}$$

Dies führt zu

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\theta=0)\cup(\theta=2\pi)}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds &= \frac{1}{\pi}\int_t^s \log|g(r)|\frac{\partial}{\partial n}v(r)dr\\ &= -\frac{\lambda\sin\lambda\pi}{\pi}\int_t^s \log|g(r)|r^{-\lambda(r)-1}dr.\end{aligned}$$

Es bleibt das Integral I_3 auszuwerten. Betrachten wir $|z| = t$, so kommt wegen $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}(re^{i\theta})\bigg|_{r=t}\right| = \left|-\frac{\partial}{\partial r}\log|g(re^{i\theta})|\bigg|_{r=t}\right| \leq \left|\frac{\partial}{\partial r}\log g(re^{i\theta})\bigg|_{r=t}\right| = \left|\frac{g'}{g}(te^{i\theta})\right|,$$
$$\left|\frac{\partial v}{\partial n}(re^{i\theta})\bigg|_{r=t}\right| \ll t^{-\lambda(t)-1}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}|R_t| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_t(0)}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds\right| &\ll \int_0^{2\pi}\big|\log|g(te^{i\theta})|\big|t^{-\lambda(t)-1}td\theta\\ &+ \int_0^{2\pi} t^{-\lambda(t)}\left|\frac{g'}{g}(te^{i\theta})\right|td\theta.\end{aligned}$$

Die Integration über $|z| = s$ wird ganz analog ausgewertet. □

2.3 Restglied I: Das Integral $\int_0^{2\pi}\big|\frac{g'}{g}(te^{i\theta})\big|td\theta$

Wir konzentrieren uns zunächst auf das Integral $\int_0^{2\pi}|\frac{g'}{g}(te^{i\theta})|td\theta$ und zeigen folgenden Hilfssatz, der auf Fuchs [F2] zurückgeht.

Lemma 2.6. *Es sei $g : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorph, der unteren Wachstumsordnung $\rho(f) < \infty$ und $R > 0$ beliebig. Dann existiert ein $t \in [R, \frac{5}{4}R]$, so dass gilt*

$$\int_0^{2\pi} t\left|\frac{g'}{g}(te^{i\theta})\right|d\theta \ll T(2t, g).$$

Die implizite Konstante hängt dabei nicht von t ab.

Beweis. Wir starten von einer logarithmisch differenzierten Version der Poisson- Jensen-Formel, vgl. [H1]: S.36 (2.2). Dabei sind (a_k) die Nullstellen und (b_l) die Pole von g:

$$\frac{g'}{g}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(\rho e^{i\phi})| \frac{2\rho e^{i\phi}}{(\rho e^{i\phi}-z)^2} d\phi + \sum_{|a_k|<\rho}\left(\frac{1}{z-a_k} + \frac{\overline{a}_k}{\rho^2 - \overline{a}_k z}\right)$$
$$+ \sum_{|b_l|<\rho}\left(\frac{1}{z-b_l} + \frac{\overline{b}_l}{\rho^2 - \overline{b}_l z}\right), \quad |z| < \rho.$$

Für $|z| = t$ ist unter Berücksichtigung von $|a_k| < \rho$:

$$\left|\frac{1}{z-a_k} + \frac{\overline{a}_k}{\rho^2 - \overline{a}_k z}\right| = \frac{|\rho^2 - \overline{a}_k z + \overline{a}_k z - |a_k|^2|}{|z-a_k||\rho^2 - \overline{a}_k z|} \leq \frac{\rho^2 - |a_k|^2}{|z-a_k|(\rho^2 - |a_k|t)}.$$

Entsprechend verfahren wir mit den Polen, und zusammen führt dies zu

$$\left|\frac{g'}{g}(z)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big|\log|g(\rho e^{i\phi})|\big| \frac{2\rho}{|\rho e^{i\phi} - z|^2} d\phi$$
$$+ \sum_{|a_k|<\rho} \frac{\rho^2 - |a_k|^2}{|z-a_k|(\rho^2 - |a_k|t)} + \sum_{|b_l|<\rho} \frac{\rho^2 - |b_l|^2}{|z-b_l|(\rho^2 - |b_l|t)}.$$

Wir nehmen an, dass auf $|z| = t$ keine Pole vorhanden sind und erhalten nach einer Integration

$$t\int_0^{2\pi}\left|\frac{g'}{g}(te^{i\theta})\right| d\theta < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big|\log|g(\rho e^{i\phi})|\big| \int_0^{2\pi} \frac{2t\rho}{|\rho e^{i\phi} - te^{i\theta}|^2} d\theta d\phi$$

$$+ \sum_{|a_k|<\rho} \frac{(\rho^2 - |a_k|^2)t}{(\rho^2 - |a_k|t)} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|te^{i\theta} - a_k|} + \sum_{|b_l|<\rho} \frac{(\rho^2 - |b_l|^2)t}{(\rho^2 - |b_l|t)} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|te^{i\theta} - b_l|}. \tag{2.6}$$

Für eine, bei $t > 0$, in $|z| \leq t$ oder $|z| \geq t$ holomorphe Funktion $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{\pm n}$ erinnern wir an die Parseval'sche Vollständigkeitsrelation, vgl. [T]: S.422, 13.54,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(te^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 t^{\pm 2n}.$$

Dies führt, angewandt auf $h(z) = (z-a)^{-1/2}$, zu

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|te^{i\theta} - a|} = \frac{2\pi}{|a|}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k}^2 \left(\frac{t}{|a|}\right)^{2k}, \quad 0 < t < |a| < \rho, \tag{2.7}$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|te^{i\theta} - a|} = \frac{2\pi}{t}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k}^2 \left(\frac{|a|}{t}\right)^{2k}, \quad 0 < |a| < t < \rho.$$

Mit der Stirling'schen Formel erhalten wir leicht: $(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k} \cong \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$, d.h. aus (2.7) folgt mit $\log(1-x)^{-1} = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}x^k, \quad |x| < 1$ und einer Konstanten $K > 0$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|te^{i\theta} - a|} \leq \frac{2\pi}{|a|}\left(1 + K\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{t}{|a|}\right)^{2k}\right) \leq \frac{2\pi}{|a|}\left(1 + K\log\frac{|a|^2}{|a|^2 - t^2}\right)$$
$$\leq \frac{2\pi}{t}\left(1 + K\log\frac{\rho}{|a| - t}\right), \tag{2.8}$$

wobei im letzten Schritt

$$1 < \frac{|a|^2}{|a|^2 - t^2} = \frac{|a|^2}{(|a|+t)(|a|-t)} \leq \frac{|a|}{|a|-t}$$

ausgenutzt wurde. Für $0 < |a| < t < \rho$ gewinnen wir ganz entsprechend

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|te^{i\theta} - a|} \leq \frac{2\pi}{t}\left(1 + K \log \frac{\rho}{t - |a|}\right). \tag{2.9}$$

Die Ungleichungen (2.8) und (2.9) können zu einer einzigen zusammengefasst werden:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|te^{i\theta} - a|} \leq \frac{2\pi}{t}\left(1 + K \log \frac{\rho}{|t - |a||}\right), \quad 0 < |a| < \rho. \tag{2.10}$$

Schließlich haben wir noch

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|\rho e^{i\phi} - te^{i\theta}|^2} = \frac{1}{\rho^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\rho}\right)^{2k} = \frac{1}{\rho^2 - t^2} \tag{2.11}$$

durch ganz entsprechende Handhabung.
Für $0 < |a| \leq t < \rho$ gilt:

$$\frac{\rho^2 - |a|^2}{\rho^2 - |a|t} < \frac{\rho^2 - |a|^2}{t(\rho - |a|)} = \frac{\rho + |a|}{t} \leq \frac{2\rho}{t}. \tag{2.12}$$

Wir setzen (2.10), (2.11) und (2.12) in (2.6) ein:

$$\begin{aligned} t\int_0^{2\pi}\left|\frac{g'}{g}(te^{i\theta})\right| d\theta \quad &\leq \quad \frac{2t\rho}{\rho^2 - t^2}\int_0^{2\pi}\big|\log|g(\rho e^{i\phi})|\big| d\phi \\ &+ \quad \frac{4\rho\pi}{t}\sum_{c=a_k,b_l;|c|<\rho}\left(1 + K\left(\log\frac{\rho}{|t-|c||}\right)\right) \\ &\leq \quad \frac{4\pi t\rho}{\rho^2 - t^2}\left\{m(\rho,g) + m\left(\rho,\frac{1}{g}\right)\right\} + \frac{4\pi\rho}{t}\left\{n(\rho,g) + n\left(\rho,\frac{1}{g}\right)\right\} \\ &+ \quad 4\pi K\frac{\rho}{t}\sum_{c=a_k,b_l;|c|<\rho}\log\frac{\rho}{|t-|c||}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Die letzte Summe wird in Umgebungen der c- Stellen unkontrollierbar. Außerhalb nicht zu großer Umgebungen können wir unter Verwendung des folgenden Resultats weiter abschätzen.

Lemma 2.7. *Es sei $p(x) = x^M + \beta_{M-1}x^{M-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ ein normiertes komplexes Polynom. Dann hat die Menge $x \in \mathbb{R}$, für die $|p(x)| \leq h^M$ gilt, das lineare Maß höchstens $4h$.*

Einen Beweis findet man in [P/S]: S.85 Aufgaben 62,63 bzw. S.281f für den Fall $h = 1$. Aus Homogenitätsgründen ergibt sich das allgemeine Resultat unmittelbar. □

Wir wenden das Lemma an auf

$$p(x) = \prod_{c=a_k,b_l;|c|<\rho}(x - |c|).$$

Sein nun $R > 0$ sowie $\frac{2}{3}\rho := R$, $h := \frac{\rho}{48}$, und $M := n(\rho, 1/g) + n(\rho, g)$. Damit existiert ein t in $\frac{2}{3}\rho \leq t \leq \frac{5}{6}\rho$, so dass gilt $|p(t)| > \left(\frac{\rho}{48}\right)^M$. Dies führt auf

$$\sum_{c=a_k, b_l; |c|<\rho} \log \frac{\rho}{|t - |c||} = \log \frac{\rho^M}{|p(t)|} < M \log 48 \tag{2.14}$$

für ein t mit $R \leq t \leq \frac{5}{4}R$. Für dieses t ist weiter

$$\frac{\rho}{t} \leq \frac{3}{2}; \quad \frac{t\rho}{\rho^2 - t^2} \leq \frac{30}{11}. \tag{2.15}$$

Damit ergibt sich aus (2.13), (2.14), (2.15) und (1.4):

$$\begin{aligned} t \int_0^{2\pi} \left| \frac{g'}{g}(te^{i\theta}) \right| d\theta &\ll m(\rho, g) + m\left(\rho, \frac{1}{g}\right) + n(\rho, g) + n\left(\rho, \frac{1}{g}\right) \\ &\ll T(\rho, g) + T\left(\rho, \frac{1}{g}\right) + N\left(\frac{5}{4}\rho, g\right) + N\left(\frac{5}{4}\rho, \frac{1}{g}\right) \\ &\ll T\left(\frac{5}{4}\rho, g\right) \ll T(2t, g), \end{aligned}$$

womit der Beweis fertig ist. □

2.4 Überblick und Beweisfortgang

Nun wird im Beweis von 2.1 fortgefahren, und die Ergebnisse der Hilfssätze 2.4 und 2.5 werden in die Formel von Green (2.4) eingesetzt:

$$\frac{\lambda \sin \pi\lambda}{\pi} \int_t^s r^{-\lambda(r)-1} \log |g(r)| dr = \sum_{t<|z_\nu|<s} |z_\nu|^{-\lambda(|z_\nu|)} \cos \lambda(\alpha_\nu - \pi) + E(t, s) \tag{2.16}$$

mit

$$E(t, s) := R_t + R_s + o\left(\int_t^s r^{-\lambda(r)-1} T(r) dr\right).$$

Es existieren zu $R_2 > R_1 > 0$ mit $\frac{5}{4}R_1 < R_2$ nach Lemma 2.6 Werte $t \in [R_1, \frac{5}{4}R_1]$ und $s \in [R_2, \frac{5}{4}R_2]$, so dass gilt

$$\begin{aligned} R_t &\ll t^{-\lambda(t)} \left\{ m(t, g) + m\left(t, \frac{1}{g}\right) \quad + \quad \int_0^{2\pi} \left| \frac{g'}{g}(te^{i\theta}) \right| t d\theta \right\} \ll t^{-\lambda(t)} \left\{ T(t) + T(2t) \right\} \\ &\ll t^{-\lambda(t)} T(2t), \quad t \to \infty \end{aligned}$$

und ganz entsprechend $R_s \ll s^{-\lambda(s)} T(2s)$ bleibt. Wir erhalten also

$$E(t, s) \ll t^{-\lambda(t)} T(2t) + s^{-\lambda(s)} T(2s) + o\left(\int_t^s r^{-\lambda(r)-1} T(r) dr\right). \tag{2.17}$$

Um eine symmetrische, einfach zu verarbeitende Formel zu gewinnen, wenden wir (2.16) auf $g_1(z) = g(ze^{i\delta})$, $g_2(z) = g(ze^{-i\delta})$ an. Wegen $z_\nu = r_\nu e^{i\alpha_\nu}$, $\delta < \alpha_\nu < 2\pi - \delta$ variieren die Nullstellen g_1 im Argument $]0, 2\pi - \delta[$. Dabei nimmt (2.16) die Form

$$\frac{\lambda \sin \pi\lambda}{\pi} \int_t^s r^{-\lambda(r)-1} \log |g_1(r)| dr = \sum_{\delta<\alpha_\nu<2\pi-\delta, t<r_\nu<s} r_\nu^{-\lambda(r_\nu)} \cos \lambda(\alpha_\nu - \delta - \pi) + E_1(t, s) \tag{2.18}$$

an. Entsprechend erstreckt sich die trigonometrische Summe von (2.16) bei Anwendung auf g_2 über

$$\frac{\lambda \sin \pi\lambda}{\pi} \int_t^s r^{-\lambda(r)-1} \log |g_2(r)| dr = \sum_{\delta<\alpha_\nu<2\pi-\delta, t<r_\nu<s} r_\nu^{-\lambda(r_\nu)} \cos \lambda(\alpha_\nu + \delta - \pi) + E_2(t,s). \quad (2.19)$$

Wegen

$$\cos \lambda(\alpha_\nu - \delta - \pi) + \cos \lambda(\alpha_\nu + \delta - \pi) = 2 \cos \lambda\delta \cos \lambda(\alpha_\nu - \pi)$$

folgt nach Addition von (2.18) und (2.19):

$$\frac{\lambda \sin \lambda\pi}{\pi} \int_t^s r^{-\lambda(r)-1} \log |g(re^{i\delta}) g(re^{-i\delta})| dr = 2 \cos \lambda\delta \sum_{\delta<\alpha_\nu<2\pi-\delta, t<r_\nu<s} r_\nu^{-\lambda(r_\nu)} \cos \lambda(\alpha_\nu - \pi) + E_1 + E_2. (2.20)$$

Dabei erfüllt das Paar (t,s) für E_1 die Abschätzung (2.17) genau dann, wenn es für E_2 derselben Abschätzung genügt. Das erkennt man sofort aus der Tatsache, dass g_1 und g_2 durch Rotation aus g hervorgehen.
Es seien $\delta < \alpha_1 < \ldots < \alpha_m < 2\pi - \delta$ die Strahlen, auf denen in $t < r < s$ Glieder von (z_ν) liegen. Liegt auf $|z| = t, s$ kein z_ν – was wir annehmen können – so bekommen wir, wenn wir noch $\alpha_{m+1} = 2\pi - \delta$ setzen:

$$\begin{aligned}
\sum_{\delta<\alpha_\nu<2\pi-\delta, t<r_\nu<s} r_\nu^{-\lambda(r_\nu)} \cos \lambda(\alpha_\nu - \pi) &= \sum_{j=1}^m \cos \lambda(\alpha_j - \pi) \sum_{t<r_\nu<s, \alpha_\nu=\alpha_j} r_\nu^{-\lambda(r_\nu)} \\
&= \sum_{j=1}^m \cos \lambda(\alpha_j - \pi) \quad \times \quad \int_t^s r^{-\lambda(r)} d\big\{n(r,\alpha_{j+1}) - n(r,\alpha_j)\big\}.
\end{aligned}$$

Für einen festen Summanden folgt nach partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int_t^s r^{-\lambda(r)} d\big\{n(r,\alpha_{j+1}) - n(r,\alpha_j)\big\} &= \big(n(r,\alpha_{j+1}) - n(r,\alpha_j)\big) r^{-\lambda(r)} \Big|_{r=t}^{r=s} \\
&\quad - \int_t^s \big(n(r,\alpha_{j+1}) - n(r,\alpha_j)\big) \frac{d}{dr} r^{-\lambda(r)} dr.
\end{aligned}$$

Dabei ist wegen $\frac{d}{dr} r^{-\lambda(r)} = -\lambda r^{-\lambda(r)-1} + o(r^{-\lambda(r)-1})$ offenbar

$$\begin{aligned}
\int_t^s \big(n(r,\alpha_{j+1}) - n(r,\alpha_j)\big) \frac{d}{dr} r^{-\lambda(r)} dr &= -\lambda \int_t^s \big(n(r,\alpha_{j+1}) - n(r,\alpha_j)\big) r^{-\lambda(r)-1} dr \\
&\quad + o\bigg(\int_t^s \big(n(r,\alpha_{j+1}) - n(r,\alpha_j)\big) r^{-\lambda(r)-1} dr\bigg).
\end{aligned}$$

Fassen wir zusammen:

$$\begin{aligned}
\sum r_\nu^{-\lambda(r_\nu)} \cos \lambda(\alpha_\nu - \pi) &= \int_t^s r^{-\lambda(r)-1} \bigg(\lambda \sum_{j=1}^m \cos \lambda(\alpha_j - \pi) \big\{n(r,\alpha_{j+1}) - n(r,\alpha_j)\big\}\bigg) dr \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \cos \lambda(\alpha_j - \pi) \bigg(\big\{n(r,\alpha_{j+1}) - n(r,\alpha_j)\big\} r^{-\lambda(r)}\bigg)\bigg|_{r=t}^{r=s} \\
&\quad + o\bigg(\int_t^s \big(\sum_{j=1}^m \big\{n(r,\alpha_{j+1}) - n(r,\alpha_j)\big\} r^{-\lambda(r)-1}\big) dr\bigg) \\
&\le \int_t^s r^{-\lambda(r)-1} \bigg\{\lambda \int_\delta^{2\pi-\delta} \cos \lambda(\alpha - \pi) dn(r,\alpha)\bigg\} dr + n(s) s^{-\lambda(s)} + n(t) t^{-\lambda(t)} \\
&\quad + o\bigg(\int_t^s r^{-\lambda(r)-1} n(r) dr\bigg). \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Aus (2.20) und (2.21) folgt

$$\int_t^s r^{-\lambda(r)-1}\left\{\frac{\lambda\sin\lambda\pi}{\pi}\log|g(re^{i\delta})g(re^{-i\delta})| - 2\lambda\cos\lambda\delta\int_\delta^{2\pi-\delta}\cos\lambda(\alpha-\pi)dn(r,\alpha)\right\}dr$$

$$\leq n(s)s^{-\lambda(s)} + n(t)t^{-\lambda(t)} + E_1(t,s) + E_2(t,s). \tag{2.22}$$

2.5 Restglied II

In einem letzten Schritt zeigen wir, dass die rechte Seite von (2.22) bei geeignetem s und t klein wird, genauer:

Lemma 2.8. *Es sei $R > 1$. Dann existieren $s > t > R$, so dass gilt:*

$$n(s)s^{-\lambda(s)} + n(t)t^{-\lambda(t)} + E_1(t,s) + E_2(t,s) = o\left(\int_t^s r^{-\lambda(r)-1}n(r)dr\right).$$

Beweis. Es sei $\tau > 4R$ ein Pólya- Peak mit $n(\tau)\tau^{-\lambda(\tau)} = 1$, dessen Existenz nach Satz 1.6 gewährleistet ist. Weiter sei $\frac{1}{4}\tau < t < \frac{1}{2}\tau$. Nach dem $\kappa(\lambda)$- Theorem, vgl. [H1]: S.101, Theorem 4.5, gilt auf einer Folge von Pólya- Peaks $T(\tau) \ll n(\tau)$. Damit gelingt, unter Verwendung von Lemma 1.2.(c), die Abschätzung

$$\begin{aligned} n(t)t^{-\lambda(t)} \ll T(2t)t^{-\lambda(t)} \leq{} & T(\tau)\left(\tfrac{1}{4}\tau\right)^{-\lambda(t)} \ll T(\tau)\tau^{-\lambda(\tau)}\tau^{\lambda(\tau)-\lambda(t)} \\ \ll n(\tau)\tau^{-\lambda(\tau)} ={} & 1. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Da nach Korollar 1.7 das Integral $\int^\infty n(r)r^{-\lambda(r)-1}dr$ divergiert, existiert für $M > 0$ und t ein Pólya- Peak $\sigma > 4t$ mit

$$\int_t^{\sigma/4} n(r)r^{-\lambda(r)-1}dr > M. \tag{2.24}$$

Wegen (2.23) gilt analog für ein beliebiges s mit $\frac{1}{4}\sigma < s < \frac{1}{2}\sigma$:

$$n(s)s^{-\lambda(s)} \ll T(2s)s^{-\lambda(s)} \ll 1. \tag{2.25}$$

Dies bedeutet $T(2t)t^{-\lambda(t)} + T(2s)s^{-\lambda(s)} < K_1$ sowie $n(t)t^{-\lambda(t)} + n(s)s^{-\lambda(s)} < K_1$ unabhängig von t und s, sofern $\frac{1}{4}\tau < t < \frac{1}{2}\tau$, $\frac{1}{4}\sigma < s < \frac{1}{2}\sigma$ bleibt. Wir wählen nun (t,s) derart, dass auch (2.17) gilt. Daraus folgt mit Lemma 2.3:

$$n(s)s^{-\lambda(s)} + n(t)t^{-\lambda(t)} + E_1(t,s) + E_2(t,s) + o(1)\int_t^s r^{-\lambda(r)-1}T(r)dr \tag{2.26}$$

$$\leq 3K_1 + o(1)\int_t^s r^{-\lambda(r)-1}T(r)dr \tag{2.27}$$

$$\leq 3K_1 + o(1)\int_t^s r^{-\lambda(r)-1}n(r)dr. \tag{2.28}$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $M > 0$ so groß, dass gilt $3K_1 < M\varepsilon$. Damit gewinnen wir aus (2.24):

$$\begin{aligned} 3K_1 + o(1)\int_t^s r^{-\lambda(r)-1}n(r)dr &\leq \varepsilon\int_t^{\sigma/4} r^{-\lambda(r)-1}n(r)dr + o(1)\int_t^s r^{-\lambda(r)-1}n(r)dr \\ &\leq o(1)\int_t^s r^{-\lambda(r)-1}n(r)dr. \end{aligned}$$

□

Wir beenden jetzt den Beweis von Satz 2.1:
Aus Lemma 2.8 und (2.22) können wir nun beliebig große t und s so bestimmen, dass gilt:

$$\int_t^s r^{-\lambda(r)-1} n(r) \left\{ \frac{\log |g(re^{i\delta})g(re^{-i\delta})|}{n(r)} - \frac{2\pi \cos \lambda\delta}{n(r) \sin \pi\lambda} \int_\delta^{2\pi-\delta} \cos \lambda(\alpha - \pi) dn(r, \alpha) + o(1) \right\} dr \leq 0.$$

Damit ist die Klammer im Integral für gewisse r sicher ≤ 0. Ersetzen wir $o(1)$ durch ε, so ergibt sich der Inhalt von Satz 2.1. $\square$.

Kapitel 3

Nullstellen von $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z-z_\nu}$ bei beliebiger Wahl der Residuen

3.0.1 Vorbemerkung

Wir betrachten eine beliebige Folge (z_ν), mit $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$ ohne Wiederholung und ohne endlichen Häufungspunkt sowie eine Folge (a_ν) mit $a_\nu \neq 0$, $\nu \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{\nu \geq 1} \left| \frac{a_\nu}{z_\nu} \right| < \infty$ ist. Eine einfache Verifikation zeigt, dass

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z - z_\nu} \tag{3.1}$$

lokal gleichmäßig und absolut in $\mathbb{C} \backslash \{(z_\nu) \quad | \quad \nu \in \mathbb{N}\}$ konvergiert. Daher stellt f eine meromorphe Funktion mit einfachen Polen in den z_ν und Residuen a_ν dar.

3.1 Ein Lemma von Ostrovskij

Für alles Weitere fundamental ist das

Lemma 3.1 (Ostrovskij). *Hat f die Form* (3.1)*, so gilt für* $0 < p < 1$*:*

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\phi})|^p d\phi = o(1) \quad \textit{und } m(r, f) = o(1) \quad , r \to \infty. \tag{3.2}$$

Wir reproduzieren den Beweis der Vollständigkeit halber und orientieren uns an der Darstellung von [G/O]: S.327ff. Dabei stellt das folgende, auf Smirnov [Sm] zurückgehende Lemma die Grundlage dar.

Lemma 3.2 (Smirnov). *Sei $R > 0$, $F : B_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph und Re F oder Im F von konstantem Vorzeichen. Weiter sei*

$$u(\phi) := \liminf_{z \to Re^{i\phi}, |z| < R} |F(z)|, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Dann gilt für jedes p mit $0<p<1$:

$$\int_0^{2\pi} u^p(\phi)d\phi \leq \frac{2\pi}{\cos\frac{\pi p}{2}}|F(0)|^p.$$

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. $\operatorname{Re} F>0$ in $|z|<R$ an und legen das Argument durch $|\arg w|<\pi$ fest. Wegen

$$F^p(z)=|F(z)|^p\exp\left(ip\arg F(z)\right) \tag{3.3}$$

ist nach Voraussetzung $|\arg F|<\frac{\pi}{2}$. Da F in $|z|<R$ keine Nullstellen hat, ist $\operatorname{Re} F^p$ harmonisch. Aus (3.3) kommt also

$$\operatorname{Re} F^p(z)\geq |F(z)|^p\cos\frac{p\pi}{2},$$

und dies führt uns für $r<R$ unter Verwendung der Mittelwertformel auf

$$\int_0^{2\pi}|F(re^{i\phi})|^p d\phi \leq \frac{1}{\cos\frac{p\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} F^p(re^{i\phi})d\phi=\frac{2\pi}{\cos\frac{p\pi}{2}}\operatorname{Re} F^p(0).$$

Die Behauptung ergibt sich für $r\to R$ unter Verwendung des Fatouschen Lemmas. □

Zum *Beweis* von Lemma 3.1 setzen wir $\theta_\nu=\arg z_\nu, a_\nu=\alpha_\nu+i\beta_\nu$, fixieren $R>0$ und schreiben f um zu

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{|z_\nu|>R,\operatorname{Re} a_\nu e^{-i\theta_\nu}>0}\frac{e^{i\theta_\nu}\operatorname{Re} a_\nu e^{-i\theta_\nu}}{z-z_\nu}+\sum_{|z_\nu|>R,\operatorname{Re} a_\nu e^{-i\theta_\nu}\leq 0}\frac{e^{i\theta_\nu}\operatorname{Re} a_\nu e^{-i\theta_\nu}}{z-z_\nu}\\
&\quad +i\sum_{|z_\nu|>R,\operatorname{Im} a_\nu e^{-i\theta_\nu}>0}\frac{e^{i\theta_\nu}\operatorname{Im} a_\nu e^{-i\theta_\nu}}{z-z_\nu}+i\sum_{|z_\nu|>R,\operatorname{Im} a_\nu e^{-i\theta_\nu}\leq 0}\frac{e^{i\theta_\nu}\operatorname{Im} a_\nu e^{-i\theta_\nu}}{z-z_\nu}\\
&\quad +\sum_{|z_\nu|\leq R,\alpha_\nu>0}\frac{\alpha_\nu}{z-z_\nu}+\sum_{|z_\nu|\leq R,\alpha_\nu\leq 0}\frac{\alpha_\nu}{z-z_\nu}\\
&\quad +i\sum_{|z_\nu|\leq R,\beta_\nu>0}\frac{\beta_\nu}{z-z_\nu}+i\sum_{|z_\nu|\leq R,\beta_\nu\leq 0}\frac{\beta_\nu}{z-z_\nu}\\
&=: \sum_{k=1}^{8}F_k(z).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Spezifizieren wir nun $|z|<R$, so ist für $|z_\nu|>R$:

$$\operatorname{Re}\frac{e^{i\theta_\nu}}{z-z_\nu}\leq\frac{|z|-|z_\nu|}{\big||z|-|z_\nu|\big|^2}<0,$$

also $\operatorname{Re} F_k$ für $k=1,\dots,4$ nur von einem Vorzeichen. Das Lemma 3.2 liefert

$$\int_0^{2\pi}|F_k(Re^{i\phi})|^p d\phi\leq\frac{2\pi}{\cos\frac{p\pi}{2}}|F_k(0)|^p\leq\frac{2\pi}{\cos\frac{\pi p}{2}}\left(\sum_{|z_\nu|>R}\left|\frac{a_\nu}{z_\nu}\right|\right)^p. \tag{3.5}$$

Die restlichen vier Summanden schätzen wir mit einem Trick auf gleiche Art ab. Hierfür behandeln wir exemplarisch $k=5$. Für $|z|=R$ zeigt eine leichte Rechnung

$$|F_5(z)|=\left|\sum_{|z_\nu|\leq R,\alpha_\nu>0}\frac{\alpha_\nu}{z-z_\nu}\right|=\left|\sum_{|z_\nu|\leq R,\alpha_\nu>0}\frac{R\alpha_\nu}{R^2-\overline{z}_\nu z}\right|. \tag{3.6}$$

Betrachten wir die Hilfsfunktion

$$\tilde{F}_5(z) := \sum_{|z_\nu| \le R, \alpha_\nu > 0} \frac{R\alpha_\nu}{R^2 - \overline{z}_\nu z}, \quad |z| < R,$$

so ist für die beschriebenen Summanden

$$\operatorname{Re} \frac{R}{R^2 - \overline{z}_\nu z} > 0,$$

und somit liefern (3.6) sowie das Lemma 3.2 zusammen

$$\int_0^{2\pi} |F_5(Re^{i\phi})|^p d\phi = \int_0^{2\pi} |\tilde{F}_5(Re^{i\phi})|^p d\phi \le \frac{2\pi}{\cos\frac{\pi p}{2}} |\tilde{F}_5(0)|^p \le \frac{2\pi}{\cos\frac{\pi p}{2}} \left(\frac{1}{R} \sum_{|z_\nu| \le R} |a_\nu| \right)^p.$$

Wie oben erwähnt ist daher

$$\int_0^{2\pi} |F_k(Re^{i\phi})|^p d\phi \le \frac{2\pi}{\cos\frac{\pi p}{2}} \left(\frac{1}{R} \sum_{|z_\nu| \le R} |a_\nu| \right)^p, \quad k = 5, \dots, 8. \tag{3.7}$$

Damit kommt aus (3.4), (3.5), (3.7) und der Konvergenz von $\sum_{\nu \ge 1} \left|\frac{a_\nu}{z_\nu}\right|$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\phi})|^p d\phi &\le \frac{8\pi}{\cos\frac{p\pi}{2}} \left(\left(\sum_{|z_\nu| > R} \left|\frac{a_\nu}{z_\nu}\right| \right)^p + \left(\frac{1}{R} \sum_{|z_\nu| \le R} |a_\nu| \right)^p \right) \\ &\le \frac{8\pi}{\cos\frac{p\pi}{2}} \left(\left(\sum_{|z_\nu| > R} \left|\frac{a_\nu}{z_\nu}\right| \right)^p + \left(\frac{1}{\sqrt{R}} \sum_{|z_\nu| \le \sqrt{R}} \left|\frac{a_\nu}{z_\nu}\right| + \sum_{\sqrt{R} < |z_\nu| \le R} \left|\frac{a_\nu}{z_\nu}\right| \right)^p \right) \\ &= o(1), \quad R \to \infty. \end{aligned}$$

Wegen $\overset{+}{\log}\, a \le \frac{1}{p} a^p$, für $a \ge 0$, $p > 0$ folgt $m(r, f) = o(1)$ unmittelbar aus dem eben Bewiesenen. □

3.2 Folgen ganzzahliger Ordnung

Wir beginnen mit einer trivialen aber wichtigen Bemerkung.

Proposition 3.3. *Hat f aus (3.1) nur endlich viele Nullstellen, so existiert eine ganze Funktion g und ein Polynom P mit*

$$f = \frac{P}{g}. \tag{3.8}$$

Es gilt dabei $N\left(r, \frac{1}{g}\right) = T(r, g) + O(\log r)$.

Beweis. Die Darstellung (3.8) ist klar. Für die zweite Aussage benutzen wir Lemma 3.1. Daraus folgt dann

$$T(r, g) = T\left(r, \frac{P}{f}\right) \le T(r, P) + T(r, f) + O(1) = T(r, f) + O(\log r) = N\left(r, \frac{1}{g}\right) + O(\log r).$$

□

Die Tatsache, dass $N\left(r, \frac{1}{g}\right)$ ungefähr so schnell wie $T(r, g)$ wächst, schränkt die Entwickelbarkeit von P/g in der Form (3.1) drastisch ein. Die Bezeichnungen von Abschnitt 1.7 werden hier übernommen.

Satz 3.4. *Für die Folge (z_ν) gelte $\lambda_1 = p \geq 1$, der Typ sei normal und $\delta = \infty$. Dann hat f aus* (3.1) *unendlich viele Nullstellen.*

Beweis. Nach Proposition 3.3 hätten wir (3.8) und für g: $N\big(r, \frac{1}{g}\big) = T(r,g) + O(\log r)$. Die Voraussetzungen implizieren aber, dass $N(r, \frac{1}{g})$ vom Mitteltyp, nach Satz 1.9 aber $T(r,g)$ vom Maximaltyp ist. Widerspruch. □

Korollar 3.5. *Für die Folge (z_ν) gelte der Zusammenhang $\lambda_1 = p \geq 1$. Weiter mögen die Glieder $z_\nu = r_\nu e^{i\alpha_\nu}$, $0 \leq \alpha_\nu < 2\pi$ folgende Verteilung in $\mathbb{C}$ erfüllen:*
Es existieren Konstanten $K_0, \ldots, K_{2\lambda_1+1} > 0$ mit

$$\max\left(\frac{1}{\lambda_1}\left(2m - \frac{1}{2}\right)\pi, 0\right) < K_{2m} \leq K_{2m+1} < \min\left(\frac{1}{\lambda_1}\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi, 2\pi\right), \quad k = 0, \ldots, 2\lambda_1+1,$$

so dass für alle ν ein Paar (K_{2m}, K_{2m+1}) existiert mit $K_{2m} \leq \alpha_\nu \leq K_{2m+1}$.
Dann hat f aus (3.1) *unendlich viele Nullstellen.*

Beweis. Die Bedingungen implizieren

$$|\delta(r)| \geq \operatorname{Re} \frac{1}{p} \sum_{|z_\nu| \leq r} \frac{1}{z_\nu^p} \geq \frac{1}{p} \min_{k=0}^{2\lambda_1+1} (\cos a_k) \sum_{|z_\nu| \leq r} \frac{1}{r_\nu^p} \to +\infty, \quad r \to \infty.$$

□

3.2.1 Bemerkungen

1. Die Aussagen aus den Abschnitten 3.2 und auch gleich aus 3.3 sind invariant bzgl. Rotationen der gesamten Folge.
2. Der Satz und sein Korollar bleiben richtig, sofern (z_ν) eine in der Ebene beliebig gestreute Teilfolge (z'_ν) besitzt, für die $\sum |z'_\nu|^{-p} < \infty$ bleibt. Diese Folge hat nämlich keine Auswirkung auf die Größen λ_1 und δ sowie auf die Typklasse.
3. Ist $\lambda_1 = p = 1$, so kann eine Folge (z_ν), die diese Bedingungen erfüllt, beliebig in einem abgeschlossenen Winkelraum mit Öffnungsweite $\pi - \varepsilon$ verteilt werden. Die Öffnungsweite ist insofern größtmöglich, als das ε nicht durch Null ersetzt werden kann. Man vergleiche hierfür Beispiel 3.6.1.

3.3 Folgen nicht ganzzahliger Ordnung

Ist $\lambda \notin \mathbb{N}$, so kann aus Proposition 3.3 nicht unmittelbar wie oben ein Widerspruch abgeleitet werden. Wir benutzen jetzt Korollar 2.2 und vergleichen f mit einer in (z_ν) verschwindenden ganzen Funktion. Zuvor ein

Lemma 3.6. *Sei f durch* (3.1) *gegeben und mit einem $\delta > 0$ gelte für $z_\nu = r_\nu e^{i\alpha_\nu}$: $\alpha_\nu \in]\delta, 2\pi - \delta[$. Dann gilt für $0 < \varepsilon < \delta$ und $\phi \in [0, \varepsilon] \cup [2\pi - \varepsilon, 2\pi[$ gleichmäßig:*

$$\lim_{re^{i\phi} \to \infty} f(z) = 0.$$

Beweis. Es sei $z = re^{i\phi}$ und ϕ wie gefordert. Ist $\tilde{z} = \tilde{r}e^{i\delta}$ (bzw. $\tilde{z} = \tilde{r}e^{i(2\pi-\delta)}$) der Fußpunkt des Lotes von $re^{i\varepsilon}$ (bzw. $re^{i(2\pi-\varepsilon)}$) auf $\arg \tilde{z} = \delta$ (bzw. $\arg \tilde{z} = 2\pi - \delta$), so gilt offenbar

$$|z - z_\nu| \geq |re^{i\varepsilon} - \tilde{z}| = r \arcsin(\delta - \varepsilon) =: Kr, \quad K > 0.$$

Für $|z_\nu| > 2r$ ist $|z - z_\nu| > \frac{1}{2}|z_\nu|$, also

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\le \sum_{|z_\nu|\le 2r} \left|\frac{a_\nu}{z - z_\nu}\right| \quad + \quad \sum_{|z_\nu|>2r} \left|\frac{a_\nu}{z - z_\nu}\right| \\
&\le \frac{1}{Kr} \sum_{|z_\nu|\le 2r} |a_\nu| \quad + \quad 2 \sum_{|z_\nu|>2r} \left|\frac{a_\nu}{z_\nu}\right| \\
&= \frac{1}{Kr} \sum_{|z_\nu|<\sqrt{r}} |a_\nu| \quad + \quad \frac{1}{Kr} \sum_{\sqrt{r}<|z_\nu|\le 2r} |a_\nu| + o(1) \\
&\le \frac{1}{K\sqrt{r}} \sum_{|z_\nu|<\sqrt{r}} \left|\frac{a_\nu}{z_\nu}\right| \quad + \quad \frac{2}{K} \sum_{\sqrt{r}<|z_\nu|\le 2r} \left|\frac{a_\nu}{z_\nu}\right| + o(1) = o(1), \quad r \to \infty,
\end{aligned}$$

denn $\sum_{\nu\ge 1}\left|\frac{a_\nu}{z_\nu}\right| < \infty$. □

Satz 3.7. *Die Folge* (z_ν) *erfülle die Voraussetzungen von Korollar 2.2. Dann hat* f *aus* (3.1) *unendlich viele Nullstellen.*

Beweis. Hätte f nur endlich viele Nullstellen, so bekämen wir (3.8) mit einer ganzen Funktion g der Ordnung $\lambda(f) = \lambda(g)$. Die Typklasse von (z_ν) und g müssen nach Lemma 3.1 ebenfalls übereinstimmen. Nach dem Korollar wäre dann mit einer Konstanten $K > 0$ für beliebig große $|z| = r$:

$$\left|\frac{P(z)}{g(z)}\right| \ge e^{\frac{1}{4}Kn(r)},$$

auf einem der Strahlen $\arg z = \pm\delta$. Die Aussage bleibt bei $0 < \varepsilon < \delta$ etwa für $\arg z = \varepsilon$ richtig. Das würde bedeuten: $\limsup_{r\to\infty} |f(re^{i\varepsilon})| > 0$ im krassen Widerspruch zu Lemma 3.6. □

3.3.1 Bemerkungen

Wir machen Satz 3.7 etwas plastischer und geben in Abhängigkeit von λ einige Winkelräume für (z_ν) an, so dass f unendlich viele Nullstellen besitzt.

1. Für $\lambda \le \frac{1}{2}$ ist $E_{\lambda,\eta} = \varnothing$. Dies ist in Anbetracht des noch folgenden Abschnittes 3.5 und Beispiel 3.6.4 nicht anders zu erwarten.
2. Es sei $\frac{1}{2} < \lambda < 1$. Es ergeben sich für $\delta, \eta > 0$ die Winkelräume bei $l = -1$: $\delta \le \alpha \le \pi\big(1 - \frac{1}{2\lambda}\big) - \eta$, bei $l = 0$: $\pi\big(1 + \frac{1}{2\lambda}\big) + \eta \le \alpha \le 2\pi - \delta$. Für $\lambda \to 1$ gehen die Winkelräume in den bei $\lambda = 1$ gegebenen über. (vgl. Abbildung 3.1)
3. Für $1 < \lambda \le \frac{3}{2}$ finden wir wie in 2. bei $\eta > 0$: $\pi\big(1 - \frac{1}{2\lambda}\big) + \eta \le \alpha \le \pi\big(1 + \frac{1}{2\lambda}\big) - \eta$.
4. Für $\frac{3}{2} \le \lambda < 2$ finden wir wie in 2. bei $\eta, \delta > 0$: $\delta < \alpha \le \pi\big(1 - \frac{3}{2\lambda}\big) - \eta$, $\pi\big(1 - \frac{1}{2\lambda}\big) + \eta \le \alpha \le \pi\big(1 + \frac{1}{2\lambda}\big) - \eta$ nebst $\pi\big(1 + \frac{3}{2\lambda}\big) + \eta \le \alpha < 2\pi - \delta$. (vgl. Abbildung 3.2)

3.4 Satz von Keldysh

Der Vollständigkeit halber bringen wir einen schönen Satz, der auf Keldysh zurückgeht. Hier liegt der Schwerpunkt auf der Willkürlichkeit von (z_ν). In der Darstellung folgen wir

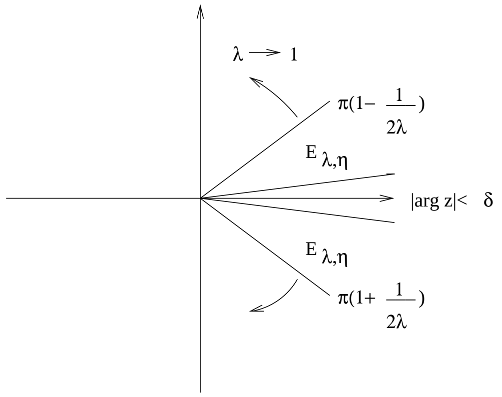

Abbildung 3.1: $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$

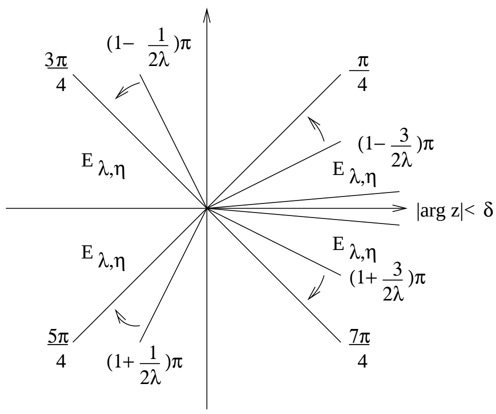

Abbildung 3.2: $\frac{3}{2} \leq \lambda < 2$

[G/O]. Ist f meromorph, so erklärt man für $a \in \mathbb{C}$ bekanntlich den Defekt durch:

$$\delta(a,f) := 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}, \quad \delta(\infty,f) := 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,f)}{T(r,f)}.$$

Satz 3.8 (Keldysh). *Es sei f durch* (3.1) *gegeben mit endlicher unterer Ordnung $\rho(f)$. Dann ist für $a \in \hat{\mathbb{C}}\backslash\{0\}$: $\delta(a,f) = 0$, und $N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ und $T(r,f)$ sind von derselben Ordnung. Der Sachverhalt bleibt für $a = 0$ richtig, sofern gilt:*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| < \infty \tag{3.9}$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \neq 0. \tag{3.10}$$

Beweis. Für $a = \infty$ ist dies eine sofortige Konsequenz von Lemma 3.1. Es sei $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Dann ist durch Übergang zu

$$\frac{f(z)-a}{z} = -\frac{a}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{(z-z_\nu)z} = \frac{a_0'}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu'}{z-z_\nu} =: f_1(z)$$

mit $a_0' := -a - \sum_{\nu\geq 1} \frac{a_\nu}{z_\nu}$, $a_\nu' := \frac{a_\nu}{z_\nu}, \nu \geq 1$ die Situation auf $a = 0$ zurückgespielt:

$$T(r,f_1) = T(r,f) + O(\log r), \quad N\left(r, \frac{1}{f_1}\right) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + O(\log r),$$

$$\delta(0,f_1) = \delta(a,f), \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu'| < \infty, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu' = -a \neq 0.$$

Des Weiteren nehmen wir $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = 1$ an und setzen

$$zf(z) - 1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\frac{z}{z-z_\nu} - 1\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu z_\nu}{z-z_\nu} =: \hat{f}(z). \tag{3.11}$$

Wegen (3.9) hat $\hat{f}$ die Form (3.1) und für $0 < \rho < 1$ liefert Lemma 3.1:

$$\int_0^{2\pi} |\hat{f}(re^{i\phi})|^\rho d\phi = o(1), \quad r \to \infty.$$

Für $r > 0$ setzen wir nun

$$E_r := \left\{ \phi \in [0, 2\pi[\;\middle|\; |\hat{f}(re^{i\phi})| \geq \frac{1}{2} \right\} \tag{3.12}$$

und $\varepsilon_r := \text{meas}_1\, E_r$. Dann gilt zunächst

$$\varepsilon_r \leq 2^\rho \int_{E_r} |\hat{f}(re^{i\phi})|^\rho d\phi \leq 2^\rho \int_0^{2\pi} |\hat{f}(re^{i\phi})|^\rho d\phi = o(1), \quad r \to \infty.$$

In Verbindung mit (3.11) folgt $|f(re^{i\phi})| \geq \frac{1}{2r}$ für $\phi \in [0, 2\pi[\setminus E_r$, also

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{f}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{E_r} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(re^{i\phi})}\right| d\phi + \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[\setminus E_r} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(re^{i\phi})}\right| d\phi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{E_r} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(re^{i\phi})}\right| d\phi + \log 2r. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Es wird nun aus [E/F] benötigt:

Lemma 3.9. *Sei $1 < r < R < \infty$ und g meromorph in $|z| \leq R$. Weiter sei $E_r \subset [0, 2\pi[$ eine Lebesgue- messbare Teilmenge mit $\varepsilon_r = meas_1 E_r$. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{E_r} \overset{+}{\log}|g(re^{i\phi})| d\phi \leq \frac{11R\varepsilon_r}{R - r}\left(1 + \overset{+}{\log}\frac{1}{\varepsilon_r}\right) T(R, g).$$

Wir fixieren $k > 1$, setzen im Lemma $R = kr$, beachten $\log 2r = o(T(r, f))$ und erhalten aus (3.13) und dem ersten Hauptsatz 1.8:

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{f}\right) &\leq \frac{11k\varepsilon_r}{k - 1}\left(1 + \overset{+}{\log}\frac{1}{\varepsilon_r}\right) T\left(kr, \frac{1}{f}\right) + o(T(r, f)) \\ &\leq \theta(k, r) T(kr, f) \end{aligned} \tag{3.14}$$

mit $\theta(k, r) = o(1), r \to \infty$.
Nehmen wir $\delta(0, f) > 0$ an, dann gelingt mit (3.14) für hinreichend großes r die Abschätzung

$$T(r, f) \leq \frac{2}{\delta(0, f)} m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{2\theta(k, r)}{\delta(0, f)} T(kr, f).$$

Diese Ungleichung besagt, dass ein $\beta > 1$ und ein $r_0 = r_0(k, \beta)$ existieren, so dass für $r \geq r_0$ gilt

$$T(kr, f) \geq \beta T(r, f),$$

und induktiv ergibt sich jetzt für $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$T(k^n r_0, f) \geq \beta^n T(r_0, f). \tag{3.15}$$

Setzen wir für $r \geq r_0$: $n = \left[\frac{\log r - \log r_0}{\log k}\right]$, so ist

$$r \geq k^n r_0, \quad \beta^n \geq \beta^{-\frac{\log r_0}{\log k} - 1} r^{\frac{\log \beta}{\log k}}$$

und daher in Verbindung mit (3.15):

$$T(r,f) \geq r^{\frac{\log\beta}{\log k}} \beta^{-\frac{\log r_0}{\log k}-1} T(r_0, f).$$

Dies impliziert aber $\rho(f) \geq \frac{\log\beta}{\log k}$, und da außer der Einschränkung $k > 1$ nichts zusätzlich gefordert war, ergibt sich der Widerspruch $\rho(f) = \infty$.

Die Behauptung, dass $N\big(r, \frac{1}{f}\big)$ und $T(r,f)$ von derselben Ordnung sind bedarf eines ähnlichen, aber getrennten Argumentes. Wir starten von (3.14) und addieren $N(r, \frac{1}{f})$ hinzu:

$$T(r,f) + O(1) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \theta(k,r) T(kr, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right). \tag{3.16}$$

wobei wieder $k > 1$ fixiert und dabei gilt: $\theta(k,r) = o(1)$, $r \to \infty$. Angenommen, die Ordnung λ_1 von $N\big(r, \frac{1}{f}\big)$ sei kleiner als die Ordnung λ_2 von $T(r,f)$. Wir wählen μ mit $\lambda_1 < \mu < \lambda_2$ und erhalten für $r > r_1$: $N(r, \frac{1}{f}) < r^\mu$ und für $r_2 > r_1$: $T(r_2, f) \geq 2r_2^\mu$. Wählen wir $r \geq r_2$, so können wir noch $0 < 4\theta(k,r)k^\mu < 1$ annehmen. Aus (3.16) kommt

$$T(kr_2, f) \geq \frac{1}{\theta(k, r_2)} \left\{ T(r_2, f) - N\left(r_2, \frac{1}{f}\right) \right\} \geq \frac{1}{2\theta(k,r_2)} T(r_2, f) \geq 2(kr_2)^\mu$$

und mit Induktion

$$T(k^n r_2, f) \geq \frac{1}{2^n \theta(k,r_2)\theta(k,kr_2) \cdot \ldots \cdot \theta(k, k^{n-1}r_2)} T(r_2, f) \geq (2k^\mu)^n T(r_2, f).$$

Wählen wir für $r \geq r_2$: $n = \left[\frac{\log r - \log r_2}{\log k}\right]$, so ergibt sich

$$T(r,f) \geq (2k^\mu)^{\frac{\log r - \log r_2}{\log k} - 1} T(r_2, f), \quad r \geq r_2$$

und damit $\rho(f) \geq \frac{\mu \log k + \log 2}{\log k}$. Da dies wieder für beliebiges $k > 1$ gilt, folgt erneut der Widerspruch $\rho(f) = \infty$. □

3.5 Entwicklung reziproker ganzer Funktionen kleiner Ordnung

Satz 3.7 liefert bei $\lambda \leq \frac{1}{2}$ keine Information, vgl. Bemerkung 3.3.1.1. In der Tat lässt sich zeigen, dass bei $\lambda < \frac{1}{2}$ eine Entwicklung von $\frac{P}{g}$ in (3.1) bei regulär verteilten Nullstellen möglich ist. Ausgangspunkt ist erneut eine simple Bemerkung. Wir nehmen der Einfachheit halber $P \equiv 1$ an.

Proposition 3.10. *Ist g ganz mit einfachen Nullstellen, P ein Polynom und besitzt $\frac{1}{g}$ eine Entwicklung der Form* (3.1)*, so ist $a_\nu = \frac{1}{g'(z_\nu)}$.*

Damit bleiben zwei Punkte zu diskutieren:

- Wann ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{z_\nu g'(z_\nu)} \right| < \infty$?
- Wann ist $f - \frac{1}{g} =: H \equiv 0$?

Die zweite Frage besitzt bei kleinen Funktionen eine einfache Antwort.

Lemma 3.11. *Sei g ganz mit einfachen Nullstellen (z_ν), $\rho(g) \le \frac{1}{2}$ und höchstens Minimaltyp, sowie $\lambda(g) < 1$. Es gelte $\sum_{\nu=1}^\infty \left|\frac{1}{g'(z_\nu)}\right| < \infty$. Dann hat $\frac{1}{g}$ eine Entwicklung der Form* (3.1).

Beweis. Nach Satz 1.11 existiert zu festem $1 > \varepsilon > 0$ eine Folge $r_\nu \to \infty$ mit $\left|\frac{1}{g(r_\nu e^{i\phi})}\right| < \varepsilon$, für alle $\phi \in [0, 2\pi[$, also $m\big(r_\nu, \frac{1}{g}\big) = 0$. Mit $a_\nu = \frac{1}{g'(z_\nu)}$ und $H = f - \frac{1}{g}$ ist H ganz und in Verbindung mit Lemma 3.1 folgt:

$$T(r_\nu, H) \le m(r_\nu, f) + \log 2 = \log 2 + o(1), \quad \nu \to \infty,$$

also $H \equiv const.$. Ist $E_r = \{\phi \in [0, 2\pi[\;\; \big| \;\; |f(re^{i\phi})| \ge \varepsilon\}$, so folgt erneut mit Lemma 3.1:

$$\mathrm{meas}_1\, E_r \le \varepsilon^{-p} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\phi})|^p d\phi = o(1), \quad r \to \infty.$$

Wählen wir r_ν so groß, dass $CE_{r_\nu} \ne \varnothing$, so gilt mit einem $\phi_\nu \in CE_{r_\nu}$: $|f(r_\nu e^{i\phi_\nu})| < \varepsilon$, also $|H| < 2\varepsilon$ und damit $H \equiv 0$. □

Für eine Antwort der ersten Frage benutzen wir die Notation aus Abschnitt 1.8 und geben eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz von $\sum_{\nu \ge 1} \left|\frac{1}{g'(z_\nu)}\right|$ an.

Satz 3.12. *Sei g ganz mit einfachen Nullstellen (z_ν), die regulär verteilt im Sinne von Abschnitt 1.8 sind und eine der zusätzlichen Regularitätsbedingungen erfüllen, sowie $0 < \lambda(g) < \frac{1}{2}$. Dann gilt: $\sum_{\nu=1}^\infty \left|\frac{1}{g'(z_\nu)}\right| < \infty$ und*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{g'(z_\nu)} \frac{1}{z - z_\nu} = \frac{1}{g(z)}.$$

Beweis. Wegen $\lambda < \frac{1}{2}$ ist $\lambda + \eta < \frac{1}{2}$, sofern $\eta > 0$ hinreichend klein ist. Wegen $\delta - 2\pi < \psi < \delta$ folgt $(\eta - \frac{1}{2})\pi < \lambda(\delta - \psi - \pi) < (\frac{1}{2} - \eta)\pi$, also $H(\delta) \ge C > 0$. Wir schätzen $g'(z_\nu)$ für große ν ab und betrachten einen Ausnahmekreis $B = B_{\delta(z_\nu)}(z_\nu)$, der zu E in den Regularitätsbedingungen aus 1.8 führt. Die Funktion $h(z) = \log\left|\frac{g(z)}{z - z_\nu}\right|$ ist in B harmonisch und nullstellenfrei; nach Satz 1.12 gilt für $z \in \partial B$:

$$h(z) \ge C|z_\nu|^{\lambda(|z_\nu|)}.$$

Das Max- und Minimumprinzip zeigt

$$\log|g'(z_\nu)| = h(z_\nu) \ge C|z_\nu|^{\lambda(|z_\nu|)}.$$

Da die Konvergenz von $\frac{\log|f(re^{i\delta})|}{r^{\lambda(r)}}$ gleichmäßig in δ außerhalb von E ist, erweist sich die fragliche Reihe als konvergent. □

3.5.1 Bemerkungen

1. Für $\lambda = 0$ lässt sich als adäquater Ersatz für Satz 1.12 etwa [C]: Theorem 52 verwenden. Regularitätsbedingungen müssen erneut gefordert werden, der zu Satz 3.12 korrespondierende wird dann analog bewiesen. Wir führen dies hier nicht aus.

2. In [L/R] wird mit etwas anderer Argumentation und schwächeren Voraussetzungen als in Lemma 3.11 dieselbe Folgerung erzielt: Im Wesentlichen darf g endlich viele Pole besitzen und die untere Wachstumsordnung $\rho(g)$ ist höchstens 1 und vom Minimaltyp.

3. Nach Keldysh muss für ganze Funktionen $g(z) = \Pi_{\nu=1}^{\infty}\big(1 - \frac{z}{z_\nu}\big)$, die sich in der Form (3.1) entwickeln lassen und $\sum_{\nu\geq 1}\big|\frac{1}{g'(z_\nu)}\big| < \infty$ genügen, offenbar $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{g'(z_\nu)} = 0$ gelten. Damit liegen in beiden Winkelräumen $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{3\pi}{2}$ stets unendlich viele $g'(z_\nu)$.

4. Notwendige Bedingung für die Entwicklung reziproker ganzer Funktionen g höherer Ordnung in der Form (3.1) wurden bereits von Krein untersucht, aber unter starken Winkelraumbedingungen an (z_ν), vgl. [Le]: S.257ff :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{z_\nu}\right| < \infty. \tag{3.17}$$

Konvergenz in (3.17) hat zur Folge, dass für $\delta > 0$ die Teilfolge (z'_ν) von (z_ν) mit $|\arg z'_\nu| \geq \delta$ oder $|\arg z'_\nu - \pi| \geq \delta$ den Konvergenzexponenten ≤ 1 und Minimaltyp haben muss. Ein seine Ergebnisse wesentlich weiter führendes Resultat stammt von Ostrovskij [O]:

Satz 3.13. *Sei f von der Form* (3.1) *und es gelte* (3.17). *Ist für irgendein $a \in \hat{\mathbb{C}}$: $\delta(a, f) > 0$, so ist $\lambda(f) \leq 1$ und Normaltyp. Dasselbe gilt für (z_ν).*

3.6 Beispiele

Wir betrachten jetzt einige Beispiele, um die Präzision der in den vorigen Abschnitten erhaltenen Resultate auf die Waagschale zu legen.

1. Sei $h(z) = e^{2\pi i z} - 1 = 2ie^{i\pi z}\sin\pi z = 2\pi i z e^{\pi i z}\prod\limits_{\nu\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\big(1 - \frac{z}{\nu}\big)e^{\frac{z}{\nu}}$. Logarithmisches Differenzieren zeigt

$$\frac{h'}{h}(z) = \frac{1}{z} + \pi i + \sum_{\nu\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{z-\nu}\right).$$

Ist $\alpha \notin \mathbb{Z}$, so liefert eine Reihenmanipulation:

$$\begin{aligned}\frac{h'(z)}{h(z)(z-\alpha)} &= \frac{1}{\alpha}\frac{z-(z-\alpha)}{z(z-\alpha)} + \frac{\pi i}{z-\alpha} + \sum_{\nu\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{\nu(z-\alpha)} + \frac{(z-\nu)-(z-\alpha)}{(z-\nu)(z-\alpha)(\alpha-\nu)}\right)\\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{z-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} + \pi i + \sum_{\nu\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\alpha-\nu}\right)\right)\\ &\quad -\frac{1}{\alpha z} - \sum_{\nu\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{(\alpha-\nu)(z-\nu)} =: f(z).\end{aligned}$$

Dabei kann aufgrund der absoluten Konvergenz sämtlicher Reihen der linken und rechten Seite von $(*)$ diese spezielle Umordnung bedenkenlos durchgeführt werden. Damit hat f die Form (3.1), endliche Ordnung und $\sum_{\nu\geq 1}|a_\nu| = \infty$, womit (3.9) nicht vernachlässigbar ist. In Bemerkung 3.2.1.3 ist der angegebene Winkelraum weitestmöglich.

2. Beispiel 1 ordnet sich einer Konstruktionsmethode unter, die für sich genommen interessant ist und die wir im Folgenden oft verwenden werden. Ist F meromorph der Ordnung $\lambda(F) < \infty$, so ist nach Satz 1.10:

$$F(z) = z^s e^{Q(z)}\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\omega_1}E\big(p_1, \frac{z}{z_\nu}\big)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\omega_2}E\big(p_2, \frac{z}{w_\mu}\big)}; \quad \max(\operatorname{Deg}Q, p_1, p_2) \leq \lambda(F). \tag{3.18}$$

Um Triviales zu vermeiden, nehmen wir an, dass wenigstens ein kanonisches Produkt nicht endlich viele Faktoren besitzt. Logarithmisches Differenzieren zeigt

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{s}{z} + Q'(z) + \sum_{\nu=1}^{\omega_1}\left(\frac{1}{z-z_\nu} + \ldots + \frac{z^{p_1-1}}{z_\nu^{p_1}}\right) - \sum_{\nu=1}^{\omega_2}\left(\frac{1}{z-w_\nu} + \ldots + \frac{z^{p_2-1}}{w_\nu^{p_2}}\right).$$

Sei $P \in \mathbb{C}[z]$, wobei sämtliche Nullstellen von P einfach, von (z_ν), (w_ν), eventuell auch von 0 verschieden seien mögen und $\operatorname{Deg} P = m \geq [\lambda(F)]$ genüge. Mit Partialbruchzerlegung und Umordnung wie in Beispiel 1 gewinnen wir zunächst

$$f(z) := \frac{F'(z)}{F(z)P(z)} = \sum_{h_\nu} \frac{a_\nu}{z-h_\nu}. \tag{3.19}$$

Dabei durchläuft h_ν sämtliche Nullstellen und Pole von F, sowie sämtliche Nullstellen von P. Die Berechnung der Koeffizienten führt zu $a_\nu = O\left(\left|\frac{1}{h_\nu^m}\right|\right)$, $\nu \to \infty$. Aufgrund der kanonischen Zerlegung (3.18) und der Forderung an m ist $\sum_{\nu\geq 1}\left|\frac{a_\nu}{h_\nu}\right| \leq K\sum_{\nu\geq 1}\left|\frac{1}{h_\nu^{m+1}}\right| < \infty$. Die Funktion f hat daher die Darstellung (3.1).

3. Zu $\lambda \geq \frac{1}{2}$ existiert ein f der Form (3.1) mit $\lambda(f) = \lambda$ und ohne Nullstellen.

   Beweis. Wir nehmen zunächst $\lambda \notin \mathbb{N}$ an, die Situation $\lambda \in \mathbb{N}$ behandeln wir in Beispiel 4. Nach [Cl/E/R]: example 2.5, existiert eine meromorphe Funktion F mit $\lambda(F) = \lambda$, so dass $H = \frac{F'}{F}$ keine Nullstellen hat. Dabei wird F mittels Streckenkomplexen konstruiert. Man kann erreichen, dass F nur über 0 und ∞ verzweigt ist und die Windungszahlen beschränkt bleiben. Offenbar ist $\lambda(H) \leq \lambda$. Aufgrund der Ordnungsvoraussetzung hat F höchstens einen Borelschen Ausnahmewert, wegen $N(r,H) = \overline{N}(r,F) + \overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)$ und obiger Bemerkung über die Windungszahlen folgt sofort $\lambda(H) \geq \lambda$, d.h. $\lambda(H) = \lambda$. Nun führen wir die Konstruktion von Beispiel 2 aus und erhalten für $\lambda \notin \mathbb{N}$ die Behauptung. □

4. Wir betrachten bei $n \in \mathbb{N}$ die meromorphe Funktion $F(z) := \tan^2 \pi\sqrt{z^n}$, vgl. [Cl/E/R] für den Fall $n = 1$. Offenbar ist $\lambda(F) = \frac{n}{2}$ und F vom Mitteltyp. Wegen

   $$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{2nz^{n-1}}{\sqrt{z^n}\sin 2\pi\sqrt{z^n}} \neq 0$$

   gewinnen wir mit der Konstruktion aus Beispiel 2 eine nullstellenfreie Funktion der Form (3.1). Für die Pole von f gilt $z_{\nu,k} = \zeta^k\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{2}{n}}$, mit $\zeta = \exp\frac{2\pi i}{n}$ und $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Alle Pole liegen auf Strahlen, die einen Winkel von $\frac{2\pi}{n}$ einschließen. Satz 1.20 ist „fast scharf" im halbzahligen Fall, insofern dass, abgesehen vom polstellenfreien, um $x \geq 0$ gelegenen Winkelraum, die übrigen Segmente für Polstellen nicht vergrößert werden können. Im Übrigen klärt dies auch die in Beispiel 3 offen gebliebene Diskussion $\lambda \in \mathbb{N}$. Ob die Winkelräume für $\lambda \notin \frac{\mathbb{N}}{2}$ immer noch weitestmöglich sind, bleibt ein offenes Problem.

5. Das folgende Beispiel zeigt ein gegensätzliches Phänomen. Wir starten mit der Euler'schen Γ- Funktion

   $$\frac{1}{\Gamma}(z) = e^{\gamma z} z \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(1, -\frac{z}{\nu}\right), \quad (\gamma\text{: Euler'sche Konstante}).$$

   Durch Imitation der obigen Rechnungen gewinnen wir

   $$\Psi(z) = -\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \gamma + \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{\nu}\right),$$

$$f(z) := -\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)(z-1)} = \frac{\gamma}{z-1} - \frac{1}{z} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)(z+\nu)}.$$

Da Γ nullstellenfrei ist, ist $\Psi(z)=0 \Leftrightarrow \Gamma'(z)=0 \Leftrightarrow f(z)=0$. Um die Nullstellen von Ψ zu lokalisieren betrachten wir standardgemäß

$$\operatorname{Im}\,\Psi(z) = -y\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)^2+y^2}, \quad z=x+iy$$

und erkennen $\Psi(z)=0 \Rightarrow z\in\mathbb{R}$. Für $z=x$ ist $\Psi'(x)<0$ und Ψ daher in $]-(\nu+1),-\nu[$ streng monoton. Ein Blick auf die Pole zeigt, dass Ψ in jedem dieser Intervalle genau eine Nullstelle besitzt. Das bedeutet $|n(r,\Gamma)-n(r,\frac{1}{\Gamma'})|\le 1$, woraus in Verbindung mit Lemma 3.1 folgt:

$$T(r,f) = N(r,\Gamma)+O(\log r) = N\left(r,\frac{1}{\Gamma'}\right)+O(\log r) = N\left(r,\frac{1}{f}\right)+O(\log r),$$

also $\delta(0,f)=0$. Ist (3.9) nicht erfüllt, so muss f nicht notwendig 0 als defekten Wert haben.

6. In [G/O] wird die Notwendigkeit von (3.10) durch kein konkretes Beispiel belegt, vielmehr wird aus der Annahme, der Satz sei ohne die Bedingung weiterhin richtig, die absurde Aussage geschlossen, dass nichtkonstante meromorphe Funktionen außer 0 und ∞ keinen defekten Wert besitzen können. Eine explizite Konstruktion geschieht in [L/R]: example 2.2: Man wähle z_ν positiv und reell, $z_1>1$ und $z_{\nu+1}>4z_\nu$, $\nu\ge 1$. Dann ist $g(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z_\nu}{z}\right)$ von der Ordnung $\lambda(g)=0$, und es gelingt die Entwicklung

$$\frac{1}{g}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{g'(z_\nu)}\frac{1}{z-z_\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1}{g'(z_\nu)}\right| < \infty.$$

Man vergleiche hierfür auch Bemerkung 3.5.1.1.

3.7 Ein Existenzsatz für Nullstellen von Ableitungen

Wir geben als Anwendung der Sätze 3.4 und 3.7 ein Kriterium an für die Existenz von kritischen Punkten bei Vorgabe einer Folge von Null- und Polstellen, die von endlicher Ordnung ist. Wir benutzen die Bezeichnungen von Beispiel 3.6.2 und Abschnitt 1.7.1.
Zuvor eine Bemerkung: Ist F meromorph von der Ordnung $\lambda\notin\mathbb{N}$, so hat F höchstens einen Borleschen Ausnahmewert. Sind (z_ν) die Nullstellen und (w_ν) die Polstellen, so ist der Konvergenzexponent von wenigstens einer Folge gleich λ. Man vergleiche die Argumentation von Beispiel 3.6.3. Wir nehmen im foglenden an, dass dies für (z_ν) der Fall sei.

Satz 3.14. *Sei F meromorph von der Ordnung $\lambda\notin\mathbb{N}$, mit Nullstellen (z_ν) und Polstellen (w_ν), die in den Winkelräumen von Korollar 2.2 liegen mögen. Weiter sei für (z_ν) die Vielfachheit der Pole beschränkt. Dann hat F' unendlich viele Nullstellen.*

Beweis. Wegen $\lambda\notin\mathbb{N}$ und der Vielfachheitsvoraussetzung hat f aus (3.19) die Ordnung λ. Aufgrund der Verteilungsvoraussetzung von (z_ν) und (w_ν) folgt jetzt nach Satz 3.7, dass f unendlich viele Nullstellen besitzt. Aus $f(z)=0$ folgt offenbar $F'(z)=0$. □

Mit $\delta_P(r)$, δ_P bzw. $\delta_N(r)$, δ_N bezeichnen wir die Verteilungsgrößen (1.21) für (w_ν) bzw. (z_ν).

Satz 3.15. *Es sei F von der Ordnung $\lambda = \lambda(F) \in \mathbb{N}$. Weiter seien (z_ν), (w_ν) vom Geschlecht $p = \lambda$, sowie Mitteltyp und $\delta_N = \infty$, $\delta_P < \infty$. Außerdem seien die Vielfachheiten von mindestens einer Folge (z_ν) oder (w_ν) beschränkt. Dann hat F unendlich viele kritische Punkte.*

Beweis. Die Polstellenfolge von f aus (3.19) hat dann erneut die Ordnung λ und ist vom Normaltyp. Wir setzen $\delta(r) = \delta_P(r) + \delta_N(r)$. Dann gilt $\delta = \infty$ und f hat nach Satz 3.4 unendlich viele Nullstellen. $\square$

Kapitel 4

Funktionen mit logarithmischen Potenzialen

In diesem Kapitel betrachten wir Funktionen der Form (3.1), schränken aber die Residuen (a_ν) auf $a_\nu > 0$ ein. Dies ermöglicht Hilfsmittel der Potenzialtheorie in die Argumentationen miteinzubeziehen. Als Referenz dienen [H/K] und [H2].

4.1 Das diskrete logarithmische Potenzial

Wir betrachten erneut eine Folge (z_ν) ohne endlichen Häufungspunkt mit $0 < |z_1| \leq \dots$ und eine Folge positiver Zahlen (a_ν) mit der Eigenschaft, dass $\sum_{\nu \geq 1} \frac{a_\nu}{|z_\nu|} < \infty$ bleibt. Aufgrund dieser Voraussetzung konvergiert

$$u(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \log \left| 1 - \frac{z}{z_\nu} \right| \tag{4.1}$$

lokal gleichmäßig in $\mathbb{C}$ und stellt dort eine subharmonische Funktion dar. Der Zusammenhang mit f aus (3.1) ist durch

$$\operatorname{grad} u = (\operatorname{Re} f, -\operatorname{Im} f)$$

gegeben. Kritische Punkte von u entsprechen daher Nullstellen von f.
Neben der Anzahlfunktion $n(r)$ von (z_ν) benötigen wir noch die Größe

$$n_1(r) = \sum_{|z_\nu| \leq r} a_\nu. \tag{4.2}$$

Dabei reiht sich $n_1(r)$ in folgenden zu besprechenden Zusammenhang ein.

4.1.1 Riesz'scher Darstellungssatz für subharmonische Funktionen

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $u : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ subharmonisch und $u \not\equiv -\infty$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Borel- Maß μ in G, so dass für jedes kompakte $K \subset G$ sich u

zerlegt in

$$u(z) = \int_K \log|z-\zeta| d\mu(e_\zeta) + h(z), \quad z \in \overset{\circ}{E}.$$

Dabei ist h in $\overset{\circ}{E}$ harmonisch.

In der Situation (4.1) ist für eine Borel- Menge $e \subset \mathbb{C}$ das oben erwähnte, sogenannte Riesz- Maß μ gegeben durch

$$\mu(e) = \sum_{z_\nu \in e} a_\nu.$$

Es ist also $\mu(\overline{B_r(0)}) = n_1(r)$.

4.1.2 Wachstumsordnung von u

Wir setzen, wie üblich, $B(r,u) = \sup_{|z|=r} u(z)$ und erklären die Ordnung $\lambda(u)$ nach dem Vorbild von Abschnitt 1.1 durch $S(r) := \log B(r,u)$. Unser nächstes Ziel ist der Nachweis, dass $B(r,u)$ und $n_1(r)$ gut miteinander verglichen werden können. Wegen $\sum_{\nu=1}^\infty \frac{a_\nu}{|z_\nu|} < \infty$ kommt mit dem üblichen Trick:

$$\frac{n_1(r)}{r} \le \frac{1}{r} \sum_{|z_\nu| \le r} a_\nu \le \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{|z_\nu| \le \sqrt{r}} \frac{a_\nu}{\sqrt{r}} + \sum_{\sqrt{r} \le |z_\nu| \le r} \frac{a_\nu}{|z_\nu|} = o(1),$$

also

$$\sum_{\nu=1}^\infty \frac{a_\nu}{|z_\nu|} = \int_0^\infty \frac{dn_1(t)}{t} = \frac{n_1(t)}{t}\Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty n_1(t) d\frac{1}{t} = \int_0^\infty \frac{n_1(t)}{t^2} dt.$$

Damit erweist sich das rechts stehende Integral als konvergent. Unter Verwendung dieser Tatsache folgt für $|z| \le r$ nunmehr die Ungleichung

$$\begin{aligned} u(z) \le \int_0^\infty \log\left(1+\frac{r}{t}\right) dn_1(t) &= \log\left(1+\frac{r}{t}\right) n_1(t)\Big|_{t=0}^{t=\infty} + r\int_0^\infty \frac{n_1(t)}{t(t+r)} dt \\ \le \int_0^r \frac{n_1(t)}{t} dt + r\int_r^\infty \frac{n_1(t)}{t^2} dt &\le n_1(r)\log r + o(r) = o(r\log r). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Zur Abschätzung von $B(r,u)$ nach unten verwenden wir, mit den Bezeichnungen von Abschnitt 4.1.1, die Jensen- Formel für subharmonische Funktionen. Dabei ist für $r > 0$:

$$0 = u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\phi}) d\phi - \int_{B_r(0)} \log\left|\frac{r}{\zeta}\right| d\mu(e_\zeta),$$

und wegen

$$\int_{B_r(0)} \log\left|\frac{r}{\zeta}\right| d\mu(e_\zeta) = \int_0^r \frac{n_1(t)}{t} dt$$

im Hinblick auf (1.4):

$$n_1(r)\log 2 \le \int_0^{2r} \frac{n_1(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(2re^{i\phi}) d\phi \le B(2r,u).$$

Fassen wir zusammen:

Proposition 4.1. *Es sei u durch (4.1) gegeben. Dann gilt $\lambda(u) \le 1$ und u ist bei $\lambda(u) = 1$ höchstens vom Minimaltypus. Weiter sind $B(r,u)$ und $n_1(r)$ von derselben Ordnung und vom selben Typus.*

4.1.3 Vergleich der Ordnungen von u und f

Während Ordnung und Typus von f aus (3.1) nach Lemma 3.1 nur von (z_ν) abhängt, ist $\lambda(u)$ nach der Proposition 4.1 empfindlich an (a_ν) gekoppelt. Trotz der Konvergenzbedingung von $\sum_{\nu \geq 1} \frac{a_\nu}{|z_\nu|}$, in der beide Folgen in Relation stehen, existiert generell kein Zusammenhang zwischen $\lambda(f)$ und $\lambda(u)$. Dies wird durch die folgende Tabelle verdeutlicht:

Nr.	(z_ν)	(a_ν)	$\lambda(f)$	$\lambda(u)$
1	e^ν	$e^{\alpha\nu}$	0	$\alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1$
2	e^ν	$\frac{e^\nu}{\nu(\log\nu)^2}$	0	1
3	$\nu^{\frac{1}{\lambda}}$	$\frac{1}{\nu^{1-\frac{\alpha}{\lambda}}}$	λ	$\alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1$
4	$\nu^{\frac{1}{\lambda}}$	$\frac{1}{\nu^{1-\frac{1}{\lambda}}(\log\nu)^2}$	λ	1
5	$\log\nu$	$\frac{1}{\nu(\log\nu)^{1-\alpha}}$	∞	$\alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1$
6	$\log\nu$	$\frac{1}{\nu(\log\log\nu)^2}$	∞	1

Wir berechnen exemplarisch den Wert aus Nr. 5 für $\alpha > 0$. Dabei ist wegen $\sum_{\nu \geq 1} \left|\frac{1}{\log\nu}\right|^\beta = \infty$ für alle $\beta > 0$ klarerweise: $\lambda(f) = \infty$. Zur Berechnung von $\lambda(u)$ benutzen wir Proposition 4.1:

$$n_1(r) = \sum_{\nu < e^r} a_\nu \backsim \int^{e^r} \frac{dt}{t(\log t)^{1-\alpha}} \backsim \int^r \frac{du}{u^{1-\alpha}} \backsim \frac{1}{\alpha} r^\alpha.$$

4.2 Potenziale der Ordnung $\leq \frac{1}{2}$ und Minimaltypus

Wir zeigen nach [Cl/E/R]: Theorem 2.10 den

Satz 4.2. *Hat u die Form* (4.1) *und ist $\lambda(u) \leq \frac{1}{2}$ sowie höchstens vom Minimaltypus, so hat f aus* (3.1) *unendlich viele Nullstellen.*

Wir notieren das

Korollar 4.3. *Ist $a_\nu > 0$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < \infty$, so hat f aus* (3.1) *unendlich viele Nullstellen.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $n_1(\zeta) \leq K$, für $\zeta \geq 0$, also wegen (4.3) für $|z| \leq r$:

$$u(z) \leq K \log r + O(1) = O(\log r)$$

und daher $\lambda(u) = 0$. Der Satz 4.2 liefert die Behauptung. □

Der Beweis des Satzes verwendet das wichtige Faktum, dass subharmonische Funktionen der Ordnung höchstens $\frac{1}{2}$ und Minimaltyp eine unbeschränkte Minimalfunktion haben. Wir schreiben

$$A(r, u) := \inf_{|z|=r} u(z)$$

und benutzen das $\cos\pi\lambda$- Theorem, [H2]: Theorem 6.7.

Satz 4.4. *Sei $u \not\equiv const.$ subharmonisch in $\mathbb{C}$ und $0 < \lambda < 1$. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:*

(a) $\limsup\limits_{r\to\infty}\left\{A(r,u) - B(r,u)\cos\pi\lambda\right\} = +\infty.$

(b) $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{B(r,u)}{r^\lambda} = \alpha$, *mit* $0 < \alpha \leq +\infty$.

Zum *Beweis* von Satz 4.2 bemerken wir zunächst, dass aufgrund der Wachstumsbedingung an u nach dem $\cos\pi\lambda$- Theorem eine Folge $r_m \to \infty$ existiert, so dass $A(r_m, u) \to +\infty$ gilt.
Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig und r_0 so groß, dass in $B_{r_0}(0)$ mindestens N Singularitäten z_ν liegen. Nun wählen wir $r_1 > r_0$ so groß, dass $A(r_1, u) > B(r_0, u)$ ist. Für $-\infty < t \leq B(r_0, u)$ betrachten wir die offenen Mengen

$$L(t) := \{z \in \mathbb{C} \quad \big| \quad u(z) < t\}.$$

Offenbar ist $L(t)$ bei wachsendem t ebenfalls bzgl. Inklusion wachsend. Da u nirgends lokal identisch $-\infty$ und $\lim\limits_{z\to z_\nu} = -\infty$ ist, ist für hinreichend kleines t_0 die Menge $L(t) \cap B_{r_0}(0)$ genau N-fach zusammenhängend. Die Ränder sind dabei stückweise analytische und einfach geschlossene Kurven, wobei Doppelpunkte und Spitzen nur bei kritischen Punkten von u vorliegen können. Andererseits muss nach dem Maximumprinzip und der Wahl von r_1 für eine Zusammenhangskomponente L_0 von $L(B(r_0, u))$ gelten:

$$B_{r_0}(0) \subset L_0 \subset B_{r_1}(0).$$

Bei wachsendem t: $t_0 \leq t \leq B(r_0, u)$ müssen daher die Ränder der N Zusammenhangskomponenten von $L(t)$ sich mit Berücksichtigung der Vielfachheit an mindestens $N - 1$ Punkten in $B_{r_1}(0)$ schneiden. Dies bedeutet $N - 1$ kritische Punkte für u in $B_{r_1}(0)$ mit Berücksichtigung der Vielfachheiten. Da N beliebig war folgt nun die Behauptung. □

4.3 Potenziale der Ordnung $\geq \frac{1}{2}$

Möchte man kritische Punkte bei Potenzialen höherer Ordnung gewährleisten, so sind bisher nur Ergebnisse bekannt, wenn die Ordnung von f entweder stark eingeschränkt ist oder die (z_ν) in sehr schmale Winkelräume gepackt sind. Wir wollen zeigen:

Satz 4.5. *Es sei f von der Form (3.1) und endlicher Ordnung. Ist u das zugehörige Potential und gilt $\lambda(u) + \rho(f) < 2$, so hat f unendlich viele Nullstellen. Eine entsprechende Aussage gilt bei $\lambda(u) + \rho(f) = 2$, falls beide Funktionen vom Minimaltypus sind.*

Auch hier notieren wir vorweg ein

Korollar 4.6. *Gilt $a_\nu \geq a > 0$, so hat f aus (3.1) unendlich viele Nullstellen.*

Beweis. Unter diesen Voraussetzungen ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|z_\nu|} < \infty$ und damit $T(r, f) = o(r)$ nach Lemma 3.1. Da $\lambda(u) \leq 1$ und höchstens vom Minimaltypus ist, ist Satz 4.5 anwendbar. □

Die Beweisidee beruht nun darauf, dass unter der Annahme, f habe nur endlich viele Nullstellen, eine „breite“ unbeschränkte Komponente konstruiert werden kann, auf der u beschränkt bleibt. Die Ordnung von u bedingt dann ebenfalls eine so breite Komponente, in der u nicht beschränkt ist, woraus ein Widerspruch abgeleitet werden kann. Satz 4.5 ist eine leichte Verallgemeinerung eines Ergebnisses aus [E/L/R]. Sämtliche Beweisideen sind bereits dort anzutreffen.

4.3.1 Anwendung einer Ungleichung von Tsuji

Die Abschätzung des harmonischen Maßes von Tsuji erlaubt weitgehende Verallgemeinerungen von Sätzen des Typs Phrágmen- Lindelöf. Wir orientieren uns bei der Darstellung der für uns wichtigsten Konsequenz an die von [L]. Für weitere Informationen konsultiere man auch [Ts] oder [H2].

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein unbeschränktes Gebiet. Dann besteht für $0 < t < \infty$ die Menge $G \cap \partial B_t(0)$ aus höchstens abzählbar vielen offenen Bögen: $G \cap \partial B_t(0) = \cup_{m=1}^{\infty} \gamma_{m,t}$. Wir erklären $\theta_G^*(t)$ durch

$$\theta_G^*(t) := \begin{cases} \infty & , \partial B_t(0) \subset G \\ \\ \sup\limits_{m=1}^{\infty} \operatorname{meas}_1 \gamma_{m,t} & , sonst. \end{cases}.$$

Dabei ist $\theta_G^*(t)$ von unten halbstetig und damit integrierbar. Weiter heißt $G \subset \mathbb{C}$ semi regulär, falls jedes $\zeta \in \partial G$, bis auf höchstens endlich Ausnahmen, eine Barriere besitzt. Dies ist beispielsweise dann gegeben, falls für $\zeta \in \partial G$ ein stetiger, stückweise analytischer Weg $\gamma : [a, b] \to \partial G$ mit $\zeta \in \gamma([a, b])$ existiert.

Satz 4.7. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein unbeschränktes, semi reguläres Gebiet, $u : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ subharmonisch mit $\limsup\limits_{z \to \zeta, \zeta \in \partial G} u(z) \leq 0$. Gilt für ein $z_0 \in G$: $u(z_0) > 0$, dann existiert ein $R_0 \geq 1$, so dass für $r \geq R_0$ stets*

$$\pi \int_{R_0}^{r} \frac{dt}{t\theta_G^*(t)} \leq \log B(2r, u) + O(1)$$

bleibt.

4.3.2 Längen- Flächen- Prinzip und eine Idee von Weitsman

Es sei g meromorph und nicht konstant. Für $R > 0$ bezeichnen wir mit

$$L(r, R, g) := \operatorname{meas}_1 \{z \in B_r(0) \quad \big| \quad |g(z)| = R\}$$

das eindimensionale Maß des R- Niveaus von $|g|$ in $B_r(0)$ und mit

$$p(r, R, g) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n\left(r, \frac{1}{g - Re^{i\phi}}\right) d\phi$$

den Mittelwert der R- Werte von $|g|$ in $B_r(0)$. Das Längen- Flächen- Prinzip, vgl. [H3][1]: S.29ff, besagt in dieser Situation

$$\int_0^{\infty} \frac{L^2(r, R, g)}{Rp(r, R, g)} dR \leq 2\pi^2 r^2. \tag{4.4}$$

Mit diesem Prinzip zeigen wir, dass bei Funktionen endlicher Ordnung für gewisse R-Werte die Länge des R- Niveaus in $B_r(0)$ durch eine Potenz von r abgeschätzt werden kann. Das folgende Lemma findet sich bei [L/S].

[1]Die Formulierung bezieht sich nur auf holomorphe Funktionen. Indes ist das Prinzip auch für meromorphe Funktionen gültig, vgl. auch [W].

Lemma 4.8. *Sei g meromorph der endlichen Ordnung $\lambda = \lambda(g)$. Dann existieren überabzählbar viele R', so dass für alle $r \geq r_1$ bei festem R' gilt:*

$$L(r, R', g) \leq cr^{\frac{4+\lambda}{2}},$$

wobei $c > 0$ nicht von r abhängt.

Beweis. Es sei zunächst $R \geq 1$, $0 \leq \phi < 2\pi$ und $r \geq 1$. Dann folgt aus (1.4) und dem ersten Hauptsatz 1.8:

$$\begin{aligned} n\left(r, \frac{1}{g - Re^{i\phi}}\right) \log 2 &\leq N\left(2r, \frac{1}{g - Re^{i\phi}}\right) \leq T\left(2r, \frac{1}{g - Re^{i\phi}}\right) \\ &\leq T(2r, g - Re^{i\phi}) + \overset{+}{\log} R + \log 2 + \log |c_{p(Re^{i\phi})}| \\ &\leq T(2r, g) + 2\overset{+}{\log} R + 2\log 2 + \log |c_{p(Re^{i\phi})}|. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Wir wählen $R_0 > 2$, so dass für $R \geq R_0$ gilt: $1 \leq |g(0) - Re^{i\phi}| \leq \infty$, woraus $|c_{p(Re^{i\phi})}| \leq 1$ folgt. Falls $g(0) = \infty$ ist 4.5 trivial. Damit lässt sich (4.5) vervollständigen zu

$$n\left(r, \frac{1}{g - Re^{i\phi}}\right) \log 2 \leq T(2r, g) + 4\overset{+}{\log} R,$$

und nach Integration folgt weiter

$$p(r, R, g) \leq \frac{1}{\log 2}(T(2r, g) + 4\overset{+}{\log} R). \tag{4.6}$$

Ist R_0 wie oben gewählt, so gilt nach (4.4) weiter

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{L^2(r, R, g)}{Rp(r, R, g)} dR \leq 2\pi^2 r^2.$$

Es existieren also überabzählbar viele $R' \geq R_0$ mit

$$\frac{L^2(r, R', g)}{R'p(r, R', g)} \leq 2\pi^2 r^2.$$

Ist R' fest, so folgt für $r \geq r_0$ aus (4.6) und der Ordnungsvoraussetzung an g:

$$p(r, R', g) \leq (2r)^{\lambda+1}$$

und für $r \geq r_1 := \max(R', r_0)$:

$$L^2(r, R', g) \leq 2\pi^2 r^3 p(r, R', g) \leq cr^{4+\lambda}.$$

□.

4.3.3 Beweis von Satz 4.5

Wir nehmen an, dass f nur endlich viele Nullstellen besitzt und schreiben mit $N > 4 + \lambda(f)$ dann

$$f(z) = \frac{1}{z^N g(z)},$$

wobei g meromorph ist und nur endlich viele Pole hat. Offenbar stimmen Ordnung und untere Ordnung von f und g überein. Es sei $r_0 > 1$ so groß, dass in $B_{r_0}(0)$ sämtliche

Pole von g liegen mögen. Wir setzen $M := \max_{|z|=r_0} |g(z)|$ und bestimmen mit Lemma 4.8 ein $R' > M$, so dass für alle z mit $|g(z)| = R'$ stets $g'(z) \neq 0$ ist und $L(r, R', g) \leq cr^{\frac{4+\lambda}{2}}$ gilt. (Da es überabzählbar viele R' gibt ist dies stets möglich.) Wir betrachten nun

$$E_{R'} = \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad |g(z)| > R'\}$$

und das zugehörige R'- Niveau von g, welches offenbar mit $\partial E_{R'}$ übereinstimmt. Nach Wahl von R' besteht $\partial E_{R'}$ aus analytischen, paarweise disjunkten Kurven, die entweder einfach geschlossen sind oder in beide Richtungen nach ∞ verlaufen. Da g nicht konstant ist, existiert eine unbeschränkte Wegzusammenhangskomponente U von $E_{R'}$. Nach Wahl von R' ist $U \cap B_{r_0}(0) = \varnothing$.

Lemma 4.9. *In U ist das Potential u von f durch eine Konstante $K > 0$ beschränkt.*

Beweis. Wir zeigen in einem ersten Schritt, dass für eine Konstante $K_1 > 0$ gilt

$$\int_{\partial U} |f(z)||dz| \leq K_1. \tag{4.7}$$

Ist $z \in \partial U$, so gilt $|f(z)| = \frac{1}{R'|z|^N}$, also unter Verwendung von Lemma 4.8:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial U} |f(z)||dz| &= R'^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\partial U \cap \{z| \quad 2^m r_0 \leq |z| \leq 2^{m+1} r_0\}} |z|^{-N} |dz| \\
&\leq R'^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} r_0^{-N} 2^{-mN} L(2^{m+1} r_0, R', g) \\
&\leq cR'^{-1} r_0^{-\frac{N}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{\frac{(-m+1)N}{2}} \\
&= cR'^{-1} 2^{\frac{N}{2}} r_0^{-\frac{N}{2}} (1 - 2^{-\frac{N}{2}})^{-1} =: K_1. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Zum Beweis des Lemmas fixieren wir jetzt ein $z_0 \in U$ und wählen $z \in U$ beliebig. Die Verbindungsstrecke $\overline{z_0 z} = \{z_0 + (z - z_0)t \quad | \quad 0 \leq t \leq 1\}$ schneidet ∂U höchstens endlich oft, etwa in den Punkten w_ν, $\nu = 1, \ldots, 2k$, $k \geq 0$, wobei $\overline{w_{2\nu-1} w_{2\nu}} \notin U$ sei. Dabei liegen $w_{2\nu-1}$, $w_{2\nu}$ in einer gemeinsamen Bogenkomponente von ∂U, die wir mit ∂U_ν bezeichnen. Wir setzen noch $z_0 =: w_0$, $z =: w_{2k+1}$ und konstruieren eine Kurve von w_0 nach w_{2k+1}, die in $U \cup \partial U$ liegt:

$$\sigma_{z_0,z} := \bigcup_{\nu=1}^{k} \partial U_\nu \cup \bigcup_{\nu=0}^{k} \overline{w_{2\nu} w_{2\nu+1}}.$$

Wegen $|z_0| > 1$, $N > 4$ und (4.7) gewinnen wir die Abschätzung

$$\int_{\sigma_{z_0,z}} |f(z)||dz| \leq \frac{1}{R'} \int_{\overline{z_0,z}} |z|^{-N} |dz| + \int_{\partial U} |f(z)||dz| \leq K_2.$$

Die Konstante K_2 ist dabei unabhängig von z. Da nun gilt:

$$K_2 \geq \int_{\sigma_{z_0,z}} |f(z)||dz| \geq \left| \int_{\sigma_{z_0,z}} \text{grad } u \; dz \right| \geq \big| |u(z)| - |u(z_0)| \big|$$

folgt jetzt die Beschränktheit von u in U. $\square$.

Wir setzen jetzt:

$$v_1(z) := \max\left(u(z) - K, 0\right), \quad v_2(z) := \begin{cases} \log|g(z)| - \log R' & , z \in U \\ 0 & , sonst. \end{cases} .$$

Beide Funktionen sind subharmonisch, vgl. [H/K]: Theorem 4.11, und es ist $\lambda(v_1) \leq \lambda(u)$, $\lambda(v_2) \leq \lambda(g)$. Es sei $W \subset \mathbb{C}\backslash U$ eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\{z \mid v_1(z) > 0\}$ – eine solche existiert, denn $v_1 \not\equiv const.$ und [H/K]: Theorem 2.14 implizieren dies. Wir wenden Satz 4.7 auf v_1 und W, sowie v_2 und U an. Da $W \cap U = \varnothing$ und beide Komponenten unbeschränkt sind, ist für $r \geq R_0 \geq r_0$: $\theta_U^*(t), \theta_W^*(t) \neq \infty$, sowie $\theta_U^*(t) + \theta_W^*(t) \leq 2\pi$. Nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel folgt

$$\frac{1}{\theta_U^*(t)} + \frac{1}{\theta_W^*(t)} \geq \frac{2}{\pi},$$

also

$$\pi \int_{R_0}^{r} \frac{dt}{t\theta_U^*(t)} \geq 2\log r - \pi \int_{R_0}^{r} \frac{dt}{t\theta_W^*(t)} + O(1). \tag{4.9}$$

Ist $\lambda(u) + \rho(g) < 2$, so wählen wir $\lambda_1 > \lambda$, $\rho_1 > \rho(g)$ mit $\lambda_1 + \rho_1 < 2$. Damit gilt für eine Folge $r_m \to \infty$ nach Satz 4.7:

$$\lambda_1 \log r_m - \pi \int_{R_0}^{r_m} \frac{dt}{t\theta_W^*(t)} \to +\infty, \quad \rho_1 \log r_m - \pi \int_{R_0}^{r_m} \frac{dt}{t\theta_U^*(t)} \to +\infty. \tag{4.10}$$

Aus (4.9) erhalten wir den Widerspruch

$$O(1) \geq 2\log r_m - \pi \int_{R_0}^{r_m} \frac{dt}{t\theta_W^*(t)} - \pi \int_{R_0}^{r_m} \frac{dt}{t\theta_U^*(t)} \to +\infty.$$

Sind bei $\lambda(u) + \rho(g) = 2$ beide Funktionenen vom Minimaltypus, so bleiben die asymptotischen Beziehungen aus (4.10) bestehen. Der Widerspruch ergibt sich dann ganz entsprechend. □

Literaturverzeichnis

[B/V] Brosch, G. ; Volkmann, L. : *Anwendung einer Methode von Goldberg und Fuchs in der Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen* . Complex Variables 7 (1987). 257-264

[C] Cartwright. M. L. : *Integral functions.* Cambridge at the university press (1962).

[Cl/E/R] Clunie, J. ; Eremenko, A. ; Rossi, J. : *On equilibrium points of logarithmic and Newtonian potentials.* J. London Math. Soc. (2) 47 (1993). 309-320

[E/F] Edrei, A. ; Fuchs, W. H. J. : *Bounds for the number of deficient values of certain classes of meromorphic functions.* Proc. London Math. Soc. (3) 12 (1962). 315-344

[E/L/R] Eremenko, A. ; Langley, J. L. ; Rossi, J. : *On the zeros of meromorphic functions of the form* $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z-z_k}$. J. d' Analyse Math., 62 (1994). 271-286

[F1] Fuchs, W. H. J. : *On the growth of meromorphic functions on rays.* Studies in Pure Mathematics, Birkhäuser Verlag (1983). 219-229

[F2] Fuchs, W. H. J. : *A theorem on the Nevanlinna deficiencies of meromorphic functions of finite order.* Ann. of Math. (2) 68 (1958). 203-209

[G] Goldberg, A. A. : *Growth of an entire function along a half-line.* Dokl. Akad. Nauk UzSSR 152 (1963). 1049-1050

[G/O] Goldberg, A. A. ; Ostrovskij, I. V. : *The distribution of values of meromorphic functions.* [Russisch]. Moscow: Izdat. Nauka (1970).

[H1] Hayman, W. K. : *Meromorphic functions.* Oxford University Press (1964).

[H2] Hayman, W. K. : *Subharmonic functions. Vol.2.* Academic press limited (1989).

[H3] Hayman, W. K. : *Multivalent functions.* second ed. . Cambridge university press (1994).

[H/K] Hayman, W. K. ; Kennedy, P. B. : *Subharmonic functions.* Academic press inc. London (1976).

[J/V] Jank, G. ; Volkmann, L. : *Einführung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen.* Birkhäuser Verlag Basel (1985).

[L] Langley, J. K. : *Postgraduate notes on complex analysis.* online available: `http://www.maths.nott.ac.uk/personal/jkl/pg1.pdf`

[L/R] Langley, J. K. ; Rossi, J. : *Meromorphic functions of the form* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/(z-z_n)$. Rev. Mat. Iberoamericana 20 (2004). 285-314

[L/R2] Langley, J. K. ; Rossi, J. : *Critical points of certain discrete potentials* . Complex Variables Vol.49, No. 7-9 (2004). 621-637

[L/S] Langley, J. K. ; Shea, D. F. : *On multiple points of meromorphic functions.* J. London Math. Soc. (2) 57 (1998). 371-384

[Le] Lewin, B.J. : *Nullstellenverteilung ganzer Funktionen.* Akademie Verlag Berlin (1962).

[O] Ostrovskij, I. V. : *The connection between the growth of a meromorphic function an the distribution of the arguments of its values.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat 25 (1961). 277-328

[P/S] Pólya, G. ; Szegö, G. : *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, zweiter Band.* Dritte Auflage. Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York (1964).

[Sm] Smirnov, V. : *Sur les valeurs limites des fonctions réguliéres à l interieur d'un cercle.* Journal Leningr. Fiz. Mat. 2 (1928). 22-37

[T] Titchmarsh, E. C. : *The theory of functions.* second ed. . Oxford university press (1939).

[Ts] Tsuji, M. : *Potential theory in modern function theory.* Maruzen Co., Ltd. Tokyo (1959).

[W] Weitsman, A. : *A theorem on Nevanlinna deficiencies.* Acta Math. 128 (1972). 41-52

Zusammenfassung

Es sei

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z - z_\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{a_\nu}{z_\nu} \right| < \infty$$

eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$ endlicher Ordnung. Wir geben Winkelräume für die Verteilung der Polstellen (z_ν) an, so dass bei beliebiger Wahl der Residuen (a_ν) die Funktion f stets unendlich viele Nullstellen besitzt. Wir diskutieren die Fälle, dass die Ordnung ganzzahlig oder nichtganzzahlig ist, getrennt. Für letzteres beweisen wir als Hilfsmittel, mit Ideen von W. H. J. Fuchs, G. Brosch und L. Volkmann eine Abschätzung, mit der sich das radiale Verhalten ganzer Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen kontrollieren lässt. Anhand einiger Beispiele weisen wir nach, dass die Winkelräume bei gewissen Ordnungen nicht vergrößert werden können.
Weiter diskutieren wir die Frage, wann sich reziproke ganze Funktionen der Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ in obiger Form entwickeln lassen. Dies gelingt etwa dann, wenn die Verteilung der Polstellen bestimmten Regularitätsbedingungen genügt. Schließlich zeigen wir, dass zu jeder endlichen Ordnung Funktionen f der obigen Form existieren, die keine Nullstellen besitzen.
Abschließend schränken wir die Residuen auf $a_\nu > 0$ ein. Ist u das zu f gehörige subharmonische Potenzial, so geben wir eine von den Ordnungen von u und f abhängige Relation an, so dass die Funktion f stets unendlich viele Nullstellen besitzt. Diese Relation stellt eine Verallgemeinerung eines älteren Resultates von A. Eremenko, J. Langley und J. Rossi dar.