

Algorithmische Methoden der konformen Abbildungen auf fraktale Gebiete

vorgelegt von
Diplom-Mathematiker
Philipp Kraetzer

Vom Fachbereich 3 - Mathematik
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften
- Dr. rer. nat. -
genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr. A. Bobenko

Berichter: Prof. Dr. G. Frank

Berichter: Prof. Dr. Ch. Pommerenke

Berichter: Prof. Dr. H. Stahl

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 28. Januar 2000

Berlin 2000

D 83

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
Zusammenfassung	4
Kapitel 1. Integralmittelspektrum und komplexe Dynamik	7
1. Das Integralmittelspektrum schlichter Funktionen	7
2. Verlauf von $B(p)$ und Vermutungen	8
3. Ein Beispiel aus der komplexen Dynamik	9
4. Numerische Näherung des Integralmittelspektrums	17
5. Brennans Vermutung in der Mandelbrotmenge	18
Kapitel 2. Die Schneeflocke	23
1. Geometrische Selbstähnlichkeit und hyperbolische Länge	23
2. Konstruktion der Kurven für die Schneeflocke	24
3. Eine weitere von Koch - Kurve	28
Kapitel 3. Lückenreihen	33
1. Lückenreihen und Blochfunktionen	33
2. Lückenreihen und schlichte Funktionen	35
3. Berechnung des Bildgebietes	37
Kapitel 4. Quadratische Differentiale	41
1. Definition und Eigenschaften von quadratischen Differentialen	41
2. Lokales Verhalten der Trajektorien	43

3. Globales Verhalten der Trajektorien	45
4. Numerische Bestimmung der Trajektorien mittels Regularisierung	46
5. Quadratische Differentiale mit geschlossenen Trajektorien	51
6. Extremalgebiete und quadratische Differentiale	54
Literaturverzeichnis	57
Lebenslauf	59

Vorwort

Eine analytische Funktion heißt schlicht oder konform, wenn sie im Definitionsbereich injektiv ist. Häufig wird als Definitionsgebiet das Innere oder Äußere des Einheitskreises genommen, welches man mit \mathbb{D} beziehungsweise mit \mathbb{D}^* bezeichnet. In jeder kompakten Teilmenge ist die Ableitung der Funktion beschränkt, aber zum Rand hin kann die Verzerrung des Bildgebiets beliebig groß werden.

Man untersucht die mittlere Verzerrung von Kreisen in \mathbb{D} mit Radien nahe bei eins. Eine wichtige Größe ist das Integralmittelspektrum einer schlichten Funktion. Bisher sind keine scharfen oberen Schranken hierfür bekannt.

Im ersten Kapitel werden Beispiele betrachtet, die aus der komplexen Dynamik kommen. Mittels mathematischer Algorithmen erhält man Werte für das Integralmittelspektrum, die einen Anhaltspunkt für eine beste obere Schranke liefern.

Im zweiten Kapitel werden die klassische Schneeflocke und andere selbstähnliche Gebiete untersucht, deren Abbildungsfunktionen im Mittel stark verzerren und deren Integralmittel sich gut abschätzen lassen.

Ein weiteres Beispiel bieten die Lückenreihen, die im dritten Kapitel untersucht werden. Wieder werden mittels eines Computerprogramms experimentelle Werte für möglichst große Werte der Integralmittelspektren bestimmt.

Einen anderen Schwerpunkt hat das letzte Kapitel. Im Mittelpunkt stehen die Trajektorien quadratischer Differentiale. Die Theorie gibt präzise Auskunft über deren lokales Verhalten, jedoch ist die globale Untersuchung wiederum nur mit Hilfe von Computern und eines mathematischen Algorithmus möglich, der erläutert und deren Implementierung anhand von Beispielen vorgestellt wird.

Ich möchte mich vor allen bei meinem Betreuer Prof. Dr. Ch. Pommerenke bedanken. Seine fachliche und motivierende Unterstützung hat diese Arbeit ermöglicht. Desweiteren bedanke ich mich für die anregenden Diskussionen in den letzten Jahren bei Prof. Dr. H. Stahl sowie bei allen gegenwärtigen und ehemaligen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Funktionentheorie an der TU Berlin.

Zusammenfassung

Diese Dissertationsarbeit lässt sich in zwei thematische Teile gliedern. Der Schwerpunkt der ersten drei Kapitel ist das Integralmittelspektrum einer konformen Abbildung f der Einheitskreisscheibe auf ein beschränktes Gebiet in der komplexen Ebene. Das Integralmittelspektrum von f ist durch

$$\beta_f(p) = \limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\log \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})|^p d\varphi}{\log 1/(1-r)}$$

definiert und misst das mittlere Wachstum der Ableitung von f zum Rand hin.

Der Verlauf des universellen Integralmittelspektrums

$$B(p) = \sup\{\beta_f(p) : f \text{ schlichte, beschränkte Abbildung}\}$$

ist nicht vollständig bekannt. Eine Vermutung des Autors in [Complex Variables 31 (1996)] besagt, dass $B(p) = p^2/4$ für $|p| \leq 2$ gilt.

In den ersten drei Kapiteln werden Beispiele aus der komplexen Dynamik und der Theorie von Lückenreihen sowie geometrische Fraktale wie die Schneeflocke untersucht, um Funktionen mit großem Integralmittelspektrum zu konstruieren. Es zeigt sich, dass die Funktionen, deren Bildgebiet durch Juliamengen quadratischer Polynome berandet sind, die aussichtsreichsten Kandidaten sind, gute untere Schranken für den vermuteten Verlauf von $B(p)$ zu liefern.

Im vierten Kapitel wird ein anderes Thema behandelt, nämlich die Trajektorien quadratischer Differentiale. Nach der Darstellung einiger klassischer Ergebnisse über das lokale Verhalten der Trajektorien wird ein Algorithmus entwickelt, der es erlaubt mit einem Computer sehr präzise Berechnungen der Trajektorien im Großen vorzunehmen. Eine Schlüsselrolle spielen die Regularisierungen des quadratischen Differentials in der Nähe von Polen oder Nullstellen der Funktion. Die Ergebnisse des Computerprogramms werden anhand einiger Spezialfälle graphisch dargestellt. Zum Schluss wird eine funktionentheoretische Anwendung der quadratischen Differentiale bei der Untersuchung gewisser Extremalgebiete genannt.

Abstract

This doctoral thesis consists of two parts. The main subject of the first three chapters is the integral means spectrum of a conformal function f mapping the unit disc onto any bounded domain of the complex plane. The integral means spectrum of f is defined by

$$\beta_f(p) = \limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\log \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})|^p d\varphi}{\log 1/(1-r)}.$$

It measures the average growth of the derivative of f approaching the boundary.

The course of the universal integral means spectrum

$$B(p) = \sup\{\beta_f(p) : f \text{ bounded univalent function}\}$$

is not entirely known. The author conjectured in [Complex Variables 31 (1996)] that $B(p) = p^2/4$ for $|p| \leq 2$.

The first three chapters introduce conformal maps constructed by using complex dynamics, the theory of lacunary series as well as geometric fractals as given by the snowflake. These functions are considered to have fast growing integral means. Numerical results are presented.

The objective is to obtain lower bounds for the conjectured course of the universal integral means spectrum. Best results are achieved with functions having an image domain bounded by the Julia set of a quadratic polynomial.

The fourth chapter deals with an other issue. We consider the trajectories of quadratic differentials and first give some well known results of their local behaviour. After that we develop an algorithm to compute precisely the trajectories for rational quadratic differentials.

The regularisation of a quadratic differential near poles and zeroes of the function plays a key role in the algorithm. We consider some special cases related to function theoretic applications concerning extremal domains and present the graphic results of computer calculations.

Integralmittelspektrum und komplexe Dynamik

1. Das Integralmittelspektrum schlichter Funktionen

Eine interessante Größe bei der Untersuchung des Randverhaltens schlichter Funktionen ist das Wachstum der Integralmittel der Ableitung zum Rand des Definitionsbereiches hin.

Es sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ eine im Einheitskreis schlichte Funktion. Dann ist das p -te Integralmittel von f' durch

$$(1.1) \quad \mathcal{I}_p(f', r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} |f'(r\zeta)|^p |d\zeta|$$

definiert. Gesucht ist der asymptotische Wachstumsexponent von $\mathcal{I}_p(f', r)$ und man betrachtet

$$(1.2) \quad \beta_f(p) = \limsup_{r \nearrow 1} \frac{\log \mathcal{I}_p(f', r)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

für $p \in \mathbb{R}$. Man nennt die Funktion $\beta_f(p)$ das Integralmittelspektrum von f . Trivialerweise gilt immer $\beta_f(0) = 0$. Mittels der Hölderschen Ungleichung zeigt man leicht, dass β_f stetig und konvex ist.

Für große Exponenten p wird das Wachstum der Integralmittel überwiegend durch die Ausdehnung des Bildgebietes bestimmt. Wenn p klein oder negativ ist, dann entscheidet die Struktur des Randes des Bildgebiets über das Wachstumsverhalten.

Von nun an sollen nur noch beschränkte Funktionen untersucht werden, so dass der erste Effekt keine Rolle mehr spielt. Sei S_0 die Menge der schlichten Funktionen $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, welche die Null auf sich abbilden. Lediglich die "Kompliziertheit" des Randes bestimmt die Größe von β_f für $f \in S_0$.

Eine Anwendung der Koebeschen Verzerrungssätze zeigt

$$(1.3) \quad \beta_f(p + q) \leq p + |q|$$

für alle $p, q \in \mathbb{R}$.

Entwickelt man f als Potenzreihe um Null mit den Koeffizienten a_n , dann folgt aus der Anwendung der Cauchy-Formel und der Dreiecksungleichung

$$(1.4) \quad |a_n| \leq \frac{1}{n} \mathcal{I}_1(f', 1 - \frac{1}{n}).$$

Es ist also $a_n = O(n^{\beta_f(1)-1+\epsilon})$ mit beliebig kleinem $\epsilon > 0$. Carleson und Jones haben gezeigt [CaJo92], dass man bei Anwendung der Dreiecksungleichung in der Klasse S_0 nichts Wesentliches verliert.

Nach [Ma99] definieren wir

$$(1.5) \quad B(t) = \sup\{\beta_f(t) : f \in S_0\}$$

als das universelle Integralmittelspektrum der beschränkten schlichten Funktionen.

Der Satz von Carleson und Jones impliziert

$$(1.6) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup \left\{ \frac{\log |a_n|}{\log n} : f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n ; f \in S_0 \right\} = B(1) - 1.$$

Die Frage nach dem asymptotischen Wachstum der Koeffizienten in der Klasse der beschränkten, schlichten Funktionen ist also äquivalent zu der Bestimmung des universellen Integralmittelspektrums an der Stelle $p = 1$.

2. Verlauf von $B(p)$ und Vermutungen

Über den Verlauf von $B(p)$ gibt es viele Einzelergebnisse, aber die Funktion ist nicht vollständig bekannt. Aus den Eigenschaften von $\beta_f(p)$ ergibt sich, dass $B(p)$ stetig und konvex ist. Weiter sieht man, dass

$$(1.7) \quad B(p) = p - 1 \quad \text{für } p \geq 2$$

ist. Die untere Abschätzung kommt von der Koebe-Funktion $k(z) = z(1-z)^{-2}$, für die $\beta_k(p) = |p| - 1$ für $|p| \geq 2$ ist. Die obere Abschätzung folgt aus dem Flächensatz für $p = 2$ und der Ungleichung (1.3) für $p > 2$. Jones und Makarow zeigten das wesentlich tiefere Resultat [JoMa95]

$$(1.8) \quad B(p) = p - 1 + O((p - 2)^2) \quad \text{für } p \nearrow 2.$$

Dies impliziert, dass die Ableitung $B'(2)$ existiert.

Für kleine $|p|$ hat man die Abschätzungen

$$(1.9) \quad 0.117p^2 \leq B(p) \leq p - \frac{1}{2} + \sqrt{4p^2 - p + \frac{1}{4}} \leq 3p^2 + 7|p|^3.$$

Die obere Abschätzung stammt von Pommenrenke [CIPo67, Po85], die untere von Makarov [Ma86].

An der Stelle $p = 1$, die für das Koeffizientenproblem wichtig ist, weiß man

$$(1.10) \quad 0.17 \leq B(1) \leq 0.4886 .$$

Die untere Abschätzung gelang durch die Konstruktion eines Beispiels [Po67]. Die obere Abschätzung ist aus [MaPo97], wo (1.9) mit Ergebnissen von Carleson und Jones [CaJo92] sowie von Makarov [Ma99] kombiniert wird.

Brennan vermutete [Br78], dass $B(-2) = 1$ und damit $B(p) = |p| - 1$ auch für $p \leq -2$ ist. Diese Vermutung ist unbewiesen; Carleson und Makarov konnten zeigen [CaMa94], dass es ein $p_0 \leq -2$ gibt, für das

$$(1.11) \quad B(p) = |p| - 1 \text{ für alle } p \leq p_0$$

gilt. Bertilson bewies $B(-2) \leq 1.547$ [Ber98]. Sein Beweis benutzt eine Methode, die ähnlich derjenigen ist, mit der de Brange in [deBr85] die Bieberbachsche Vermutung beweisen konnte. In [Ber99] zeigt Bertilson weiterhin, dass innerhalb der beschränkten, schlichten Funktionen die Koebe Funktion $k(z) = z(1 - z)^2$ in gewisser Hinsicht ein lokales Maximum für den Wert $\beta_f(-2)$ gibt.

Die Definition der Integralmittel in (1.1) kann auch auf komplexe Exponenten erweitert werden. In [Bi97] zeigt Binder, dass viele der Eigenschaften des Integralmittelspektrums für das von ihm analog zu (1.2) mit imaginären Exponenten definierte Rotationsspektrum gelten.

Äquivalent zur Untersuchung des Integralmittelspektrums von Funktionen aus der Klasse S_0 kann man die Klasse Σ aller schlichten Funktionen untersuchen, die im Äußeren der Einheitskreises definiert und durch $f(\infty) = \infty$ sowie $f'(\infty) = 1$ normiert sind. Es gilt der Satz von [CaJo92] (siehe auch [Kr96a])

$$(1.12) \quad B(p) = \sup \{ \beta_f(p) : f \in \Sigma \}$$

für alle $p \in \mathbb{R}$.

3. Ein Beispiel aus der komplexen Dynamik

In diesem Abschnitt sollen die Integralmittel bestimmter konformer Abbildungen betrachtet werden. Um möglichst große Wachstumsexponenten für die Integralmittel zu erreichen, sollen die Ränder der Bildgebiete einen komplizierten Rand haben. Trotzdem soll die Struktur des Randes so sein, dass er mit analytischen Methoden einfach zu erfassen ist und insbesondere Berechnungen der

Abbildungsfunktion in der Nähe des Randes zuläßt. Genau solche Beispiele liefert die komplexe Dynamik.

Wir betrachten ein Polynom P vom Grad $d \geq 2$ mit der speziellen Form

$$(1.13) \quad P(z) = z^d + c$$

mit einem festen Parameter $c \in \mathbb{C}$. P hat nur einen kritischen Punkt in \mathbb{C} , der Ursprung liegt. Außerdem soll P^n die n -te Iterierte von P bezeichnen. Betrachtet man die Folge $(P^n(z))_{n \in \mathbb{N}}$, dann kommt man zur Definition der Fatoumenge \mathcal{F}_c als der größten offenen Menge, in der die Familie der Iterierten von P normal ist. Die Juliamenge \mathcal{J}_c ist das Komplement von \mathcal{F}_c . Man bezeichnet die Menge der Parameter $c \in \mathbb{C}$, für welche die Juliamenge zusammenhängend ist mit \mathcal{M} (diese hängt natürlich vom Grad d des Polynoms ab). Für ein festes $c \in \mathcal{M}$ soll \mathcal{F}_∞ diejenige Komponente der Fatoumenge \mathcal{F}_c bezeichnen, die ∞ enthält. Da \mathcal{J}_c zusammenhängend sein soll, ist \mathcal{F}_∞ einfach zusammenhängend und enthält nicht den kritischen Punkt Null [Be91, Theo. 9.5.1]. Definitionen und Eigenschaften von Fatou- und Juliamenge findet man beispielsweise in [Be91] oder [CaGa93].

Wir betrachten die Riemannsche Abbildung

$$(1.14) \quad f : \mathbb{D}^* \mapsto \mathcal{F}_\infty$$

so normiert, dass

$$(1.15) \quad f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

also $f \in \Sigma$ ist. Die Abbildung f konjugiert das Polynom P zu $T(z) = z^d$, das heißt

$$(1.16) \quad f \circ T = P \circ f .$$

Diese Gleichung gilt allgemein für jedes Polynom P vom Grad $d = \deg P$, falls nur die Juliamenge von P zusammenhängend ist.

Durch Differenzieren auf beiden Seiten von (1.16) erhält man

$$(1.17) \quad (f' \circ T) \cdot T' = (P' \circ f) \cdot f' .$$

Durch Umstellen und n -fache Iteration der Gleichung ergibt sich

$$(1.18) \quad \begin{aligned} f'(z) &= \frac{T'(z)}{P'(f(z))} \cdot f'(T(z)) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{T'(T^k z)}{P'(f(T^k z))} \cdot f'(T^n(z)) . \end{aligned}$$

für $z \in \mathbb{D}^*$. Man definiert die Abbildung $\varphi : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$(1.19) \quad \varphi(z) = -\log \left| \frac{P'(f(z))}{T'(z)} \right| = -(d-1) \log \left| \frac{f(z)}{z} \right|$$

und erhält aus (1.18) damit

$$(1.20) \quad |f'(z)| = \exp \left[\sum_{k=0}^{n-1} (\varphi \circ T^k)(z) \right] \cdot |f'(z_0)|$$

für alle $z \in \mathbb{D}^*$, die $T^n z = z_0$ bei einem festen $z_0 \in \mathbb{D}^*$ erfüllen.

3.1. Existenz des Limes der logarithmierten Integralmittel. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass der Grenzwert in der Definition des Integralmittelspektrums unter bestimmten Voraussetzungen existiert, das heißt der Limes superior kann durch einen echten Limes ersetzt werden.

Dafür nehmen wir die Voraussetzung dazu, dass φ α -Hölderstetig mit einem $\alpha \in (0, 1)$ ist. Wir geben zunächst eine Bedingung an das dynamische System, die hinreichend für die Hölderstetigkeit von φ ist.

Ein dynamisches System heißt expandierend, wenn es ein $c_0 > 0$ und eine Expansionskonstante $1 < \lambda \leq d$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(1.21) \quad |(P^n)'(z)| \geq c_0 \lambda^n$$

für alle $z \in \mathcal{J}$ gilt. Da es keinen kritischen Punkt von P in \mathcal{F}_∞ gibt (andernfalls wäre \mathcal{J} nicht zusammenhängend), gilt (1.21) auch für alle $z \in \mathcal{F}_\infty$.

Im Fall eines quadratischen Polynoms impliziert die Bedingung (1.21), dass \mathcal{J} ein Quasikreis ist [CaGa93]. Der folgende Beweis zeigt lediglich die Hölderstetigkeit der Riemannschen Abbildung auf \mathcal{F}_∞ ; er beinhaltet dafür explizit die Abhängigkeit der Konstanten von einander.

PROPOSITION 1. *Wenn das dynamische System (P, \mathcal{J}_c) expandierend ist, dann ist die Abbildung $\varphi : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C}$ hölderstetig.*

Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass $f : D^* \mapsto \mathcal{F}_\infty$ α -Hölderstetig mit einem $\alpha \in]0, 1[$ ist. Wähle für jedes $z \in \mathbb{D}^*$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$(1.22) \quad |z| = 1 + cd^{-n}$$

für ein $1 \leq c < d$ ist. Zudem setzen wir noch $M_1 > 1$ so, dass

$$(1.23) \quad \frac{1}{M_1} < |f'(\zeta)| < M_1 \quad \text{für alle } |\zeta| \geq 2$$

und eine weitere Konstante

$$(1.24) \quad M_2 = \exp\left(\frac{d^2}{d-1}\right) \geq \prod_{k=1}^{\infty} (1 + cd^{-k}).$$

Dann folgt aus (1.18) und (1.21)

$$(1.25) \quad \begin{aligned} |f'(z)| &\leq M_1 \left| \frac{(T^n)'(z)}{(P^n)'(f(z))} \right| \\ &\leq \frac{M_1 M_2}{c_0} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^n \leq \frac{M_1 M_2}{c_0} \left(\frac{\lambda}{d}\right)^{\frac{\log(|z|-1)}{\log d}} \\ &= \frac{M_1 M_2}{c_0} (|z| - 1)^{\frac{\lambda}{d} - 1}. \end{aligned}$$

Daher ist f h"olderstetig [Du70, Theo. 5.1] mit dem H"olderexponenten $\alpha = \frac{\log \lambda}{\log d}$, das hei"t

$$(1.26) \quad |f(z_1) - f(z_2)| \leq C_1 |z_1 - z_2|^\alpha \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}^*).$$

Dabei ist $C_1 = \frac{M_1 M_2}{c_0}$ eine weitere Konstante. Daraus und mit (1.21) erh"alt man

$$(1.27) \quad \left| \frac{f(z_2)}{f(z_1)} - 1 \right| \leq \frac{C_1}{c_0} |z_1 - z_2|^\alpha \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}^*)$$

und sch"atzt f"ur $z_1, z_2 \in \mathbb{D}^*$ ab

$$(1.28) \quad \begin{aligned} |\varphi(z_2) - \varphi(z_1)| &= (d-1) \left| \log \left| \frac{f(z_2)}{z_2} / \frac{f(z_1)}{z_1} \right| \right| \\ &\leq (d-1) \left| \log \left| \frac{f(z_2)}{f(z_1)} \right| \right| + \left| \log \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \right| \\ &\leq (d-1) \left(\left| \frac{f(z_2)}{f(z_1)} - 1 \right| + \left| \frac{z_1}{z_2} - 1 \right| \right) \\ &\leq (d-1) \left(\frac{C_1}{c_0} |z_2 - z_1|^\alpha + |z_2 - z_1| \right) \\ &\leq (d-1) \left(\frac{C_1}{c_0} + |z_2 - z_1|^{1-\alpha} \right) |z_2 - z_1|^\alpha \leq C_2 |z_2 - z_1|^\alpha \end{aligned}$$

Dabei ist die Konstante $C_2 = (d-1)(1 + C_1/c_0)$. Die Funktion φ ist also mit demselben Exponenten α h"olderstetig wie die konforme Abbildung f . \square

Wir wollen die (1.1) definierten Integralmittel von f' f"ur $r > 1$ betrachten.

Um das Integral auch numerisch effizient und hinreichend pr"azise bestimmen zu k"onnen, w"ahlt man d -adische Punkte. Wir nehmen einige Bezeichnungen vor,

welche die Rechnungen vereinfachen sollen. Es sei ein $r_0 \gg 1$ vorgegeben und $r_n = r_0^{d^{-n}}$ für jede natürliche Zahl n . Sei weiter für $0 \leq k < d^n$

$$(1.29) \quad \varphi_{n,k} = 2\pi k d^{-n}$$

$$(1.30) \quad z_{n,k} = r_n e^{i\varphi_{n,k}} .$$

Um die Dynamik des Systems berücksichtigen zu können, schreibt man auch

$$(1.31) \quad [x_1 \dots x_n] = z_{n,k} ,$$

wobei $x_j \in \{0, \dots, d-1\}$ so gewählt wird, dass

$$(1.32) \quad \sum_{j=1}^n x_j d^{-j+n} = k$$

ergibt. Dann ist

$$(1.33) \quad T[x_1 x_2 \dots x_n] = [x_2 \dots x_n] .$$

Man teilt das Äußere des Kreises geeignet auf, indem man

$$(1.34) \quad A(z_{n,k}) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq r_n, |\arg(z) - \varphi_{n,k}| \leq \pi d^{-n}\}$$

setzt.

Aus Proposition 1 ergibt sich für alle $z_1, z_2 \in A(z_{n,k})$

$$(1.35) \quad |\varphi(z_2) - \varphi(z_1)| < C_1 \cdot d^{-n\alpha}$$

mit einer Konstante $C_1 > 0$, die sich aus dem Beweis von Proposition 1 und der Wahl von r_0 ergibt.

PROPOSITION 2. *Seien $z_j^1, z_j^2 \in A([x_j \dots x_n])$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist*

$$(1.36) \quad C_2^{-1} < \exp\left(\sum_{j=1}^n \varphi(z_j^1)\right) / \exp\left(\sum_{j=1}^n \varphi(z_j^2)\right) < C_2$$

mit der Konstanten $C_2 = \exp(C_1 \cdot \frac{1}{d^{\alpha-1}})$. Insbesondere gibt es eine Konstante $C_3 > 1$, so dass

$$(1.37) \quad C_3^{-1} \cdot \mathcal{I}_p(f', r_n) < r_n \cdot d^{-n} \sum_{[x_1 \dots x_n]} \exp\left(p \sum_{j=1}^n \varphi(z_j)\right) < C_3 \cdot \mathcal{I}_p(f', r_n) ,$$

wobei z_j beliebig aus $A([x_j \dots x_n])$ gewählt werden kann.

Beweis

Die doppelte Ungleichung (1.36) folgt aus (1.35) und der Summenformel für die

geometrische Reihe. Um (1.37) zu zeigen, zerlegt man das Integral und nutzt (1.20).

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_p(f', r_n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\{|z|=r_n\}} |f'(z)|^p |dz| \\
 (1.38) \quad &= \frac{1}{2\pi} \sum_{[x_0 \dots x_n]} \int_{\{|z|=r_n\} \cap A([x_0 \dots x_n])} \exp \left[p \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j z) \right] |f'(T^n z)|^p |dz| \\
 &\leq C_2 |f'(z_{0,0})|^p r_n d^{-n} \sum_{[x_0 \dots x_n]} \exp \left[p \cdot \sum_{j=1}^n \varphi(z_j) \right] |dz|
 \end{aligned}$$

mit einem beliebigen $z_j \in A([x_j \dots x_n])$. In der letzten Ungleichung wurde die Abschätzung (1.36) benutzt. Die zweite Ungleichung zeigt man genauso. \square

Nun kann man die Existenz des Grenzwertes der logarithmierten Integralmittel zeigen und eine obere Schranke für die Güte der Konvergenz angeben. Diese Schranke ist für die Verwendung bei Computereperimenten deutlich zu schwach. Zusammen mit den sehr stabilen Ergebnissen bei konkret durchgeführten Berechnungen (siehe [Kr96a]) sind sie jedoch ein weiteres Indiz für die Verwendbarkeit dieser Computereperimente.

SATZ 1. *Mit den obigen Bezeichnungen und unter der Bedingung, dass $f : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathcal{F}_\infty$ hölderstetig ist, existiert der Grenzwert*

$$(1.39) \quad \beta_f(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mathcal{I}_p(f', r_n)}{n}.$$

Mit einer Konstanten $C > 0$ gilt die Abschätzung

$$(1.40) \quad \left| \frac{\log \mathcal{I}_p(f', r_n)}{n} - \beta_f(p) \right| \leq C \cdot \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis

Da die Funktion φ für festes $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ in $A(z_{n,k})$ nur um eine Konstante variiert, genügt es das Supremum zu betrachten:

$$(1.41) \quad \hat{\varphi}(z_{n,k}) = \sup\{\varphi(z) : z \in A(z_{n,k})\}$$

Der Einfachheit halber schreiben wir noch

$$(1.42) \quad I_n = r_n d^{-n} \sum_{[x_1 \dots x_n]} \exp \left(p \cdot \sum_{j=1}^n \hat{\varphi}([x_j \dots x_n]) \right)$$

Nach Proposition 2 ist

$$(1.43) \quad \left| \frac{\log I_n}{n} - \frac{\log \mathcal{I}_p(f', r_n)}{n} \right| \leq \frac{C_4}{n}$$

mit der entsprechenden Konstante $C_4 = \log C_3$.

Es genügt daher die Abschätzung (1.40) für die diskrete Form der Integralmittel in (1.42) zu beweisen.

Wir zeigen zunächst, dass $C_2^{-1} I_n \cdot I_m \leq I_{n+m} \leq I_n \cdot I_m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt. Dazu schreibt man $[x_1 \dots x_{n+m}] = [x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m]$ und zerlegt die Summe aus (1.42). Es ist

$$(1.44) \quad r_{n+m}^{-1} d^{n+m} \cdot I_{n+m} = \sum_{[x_1 \dots x_{n+m}]} \exp \left(p \cdot \sum_{j=1}^{n+m} \hat{\varphi}([x_j \dots x_{n+m}]) \right) \\ = \sum_{[x_1 \dots x_n]} \sum_{[y_1 \dots y_m]} \exp \left(p \cdot \sum_{j=1}^n \hat{\varphi}([x_j \dots x_n y_1 \dots y_m]) + p \cdot \sum_{j=1}^m \hat{\varphi}([y_j \dots y_m]) \right).$$

Wegen

$$(1.45) \quad A([x_j \dots x_n y_1 \dots y_m]) \subseteq A([x_j \dots x_n])$$

gilt die Ungleichung

$$(1.46) \quad \hat{\varphi}([x_j \dots x_n y_1 \dots y_m]) \leq \hat{\varphi}([x_j \dots x_n]).$$

Vertauscht man in (1.44) die Reihenfolge der Summation und setzt (1.46) ein, erhält man

$$(1.47) \quad r_{n+m}^{-1} d^{n+m} \cdot I_{n+m} \\ = \sum_{[y_1 \dots y_m]} \left[\exp \left(p \cdot \sum_{j=1}^m \hat{\varphi}([y_j \dots y_m]) \right) \cdot \sum_{[x_1 \dots x_n]} \exp \left(p \cdot \sum_{j=1}^n \hat{\varphi}([x_j \dots x_n y_1 \dots y_m]) \right) \right] \\ \leq \sum_{[x_1 \dots x_n]} \exp \left(p \cdot \sum_{j=1}^n \hat{\varphi}([x_j \dots x_n]) \right) \cdot \sum_{[y_1 \dots y_m]} \exp \left(p \cdot \sum_{j=1}^m \hat{\varphi}([y_j \dots y_m]) \right) \\ \leq r_{n+m}^{-1} d^{n+m} \cdot I_n \cdot I_m.$$

Wegen Proposition 2 gilt auch die umgekehrte Ungleichung mit einem Faktor C_2^{-1} in den beiden letzten Termen von (1.47).

Zusammen erhält man

$$(1.48) \quad \log I_n + \log I_m - \log C_2 \leq \log I_{n+m} \leq \log I_n + \log I_m.$$

Der Satz 1 ergibt sich aus dem folgenden Lemma, das eine allgemeine Aussage über Folgen positiver reeller Zahlen macht. \square

LEMMA 1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller, positiver Zahlen mit der Eigenschaft

$$(1.49) \quad a_{n+m} \leq a_n + a_m$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Dann existiert der Grenzwert

$$(1.50) \quad A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} .$$

Wenn zusätzlich noch

$$(1.51) \quad a_n + a_m - C \leq a_{n+m}$$

mit einer Konstanten $C > 0$ gilt, erhält man die Abschätzung

$$(1.52) \quad \left| \frac{a_n}{n} - A \right| \leq C \frac{1}{n} .$$

Einen Beweis für die Existenz des Limes findet man bei [Wa81]. Wir geben ihn der Vollständigkeit halber an.

Beweis:

Sei ein $\epsilon > 0$ gegeben. Man setzt $A = \inf\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\} \geq 0$ und wählt $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|\frac{a_{n_0}}{n_0} - A| < \frac{\epsilon}{2}$ ist. Ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ zerlegt man in $n = k \cdot n_0 + p$ mit passenden $k \in \mathbb{N}$ und $p \in \{0, \dots, n_0 - 1\}$. Mit (1.49) gilt dann

$$(1.53) \quad \begin{aligned} 0 \leq \frac{a_n}{n} - A &= \frac{a_{kn_0+p}}{k \cdot n_0 + p} - A \\ &\leq \frac{k \cdot a_{n_0}}{k \cdot n_0} + \frac{a_p}{k \cdot n_0 + p} - A \\ &\leq \frac{a_p}{k \cdot n_0 + p} + \frac{\epsilon}{2} . \end{aligned}$$

Man zeigt nun (1.50), indem man $k \geq \frac{2 \max\{a_p : p=0, \dots, n_0\}}{\epsilon \cdot n_0}$ setzt.

Um (1.52) für ein $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen, betrachte man die Teilfolge $(\frac{a_{2^k n}}{2^k n})_{k \in \mathbb{N}}$. Wegen (1.51) gilt

$$(1.54) \quad \frac{a_{2^k n}}{2^k n} \geq \frac{a_{2^{k-1} n} + a_{2^{k-1} n} - C}{2^k n} = \frac{a_{2^{k-1} n}}{2^{k-1} n} - \frac{C}{2^k n} .$$

Die k-fache Anwendung der Ungleichung ergibt

$$(1.55) \quad \frac{a_{2^k n}}{2^k n} \geq \frac{a_n}{n} - \frac{C}{n} \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l} \geq \frac{a_n}{n} - \frac{C}{n} .$$

Da der Grenzwert existiert und $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, erhält man für $k \rightarrow \infty$ die Ungleichung (1.52). \square

p	-1.0	-0.6	-0.2	+0.2	+0.4	+0.6	+1.0	+1.2
$\beta_f(p)$	0.231	0.085	0.0095	0.0094	0.0378	0.086	0.242	0.346
$\frac{1}{4}p^2$	0.25	0.09	0.01	0.01	0.04	0.09	0.25	0.36

TABELLE 1. Maximale experimentelle Werte für das Integralmittelspektrum verschiedener schlichter Funktionen

4. Numerische Näherung des Integralmittelspektrums

Wählt man $r_0 \gg 1$, kann man sukzessiv $|f'(z_{n,k})|$ für $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ und vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ bestimmen, indem man die Gleichungen (1.16) und (1.17) verwendet. Der Rechenaufwand für ein quadratisches Polynom verhält sich dabei wie $O(2^n)$, so dass man mit der Fehlerabschätzung aus (1.40) noch keine präzisen Ergebnisse garantieren kann, wenn der kritische Punkt von P_c in der Nähe der Julia-Menge J_c liegt. Dennoch haben Computer Experimente bei den meisten Parametern $c \in \mathcal{M}$ eine hohe Stabilität gezeigt [Kr96a]. Die größten auf diese Weise bestimmten Werte [Kr96b] für $\beta_f(p)$ sind in Tabelle 1 und Abbildung 1 zusammengestellt.

Sie motivierten ein Vermutung [Kr96b] über den Verlauf des universellen Integralmittelspektrums. Die Vermutung lautet:

$$(1.56) \quad B(p) = \frac{1}{4}p^2 \quad \text{für } |p| \leq 2.$$

Sie beinhaltet sowohl die Vermutungen von Brennan wie die von Carleson und Jones.

Die Werte für das Integralmittelspektrum aus Tabelle 1 wurden mit unterschiedlichen Parametern $c \in \mathcal{M}$ berechnet. Die Frage, ob es eine schlichte Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, deren Integralmittel für alle $p \in \mathbb{R}$ oder zumindest für alle p aus einem Intervall maximal in Σ sind, bleibt offen.

Eine weitere interessante Frage ist es, ob

$$(1.57) \quad \limsup_{r \rightarrow 1} \left\{ \frac{\log \mathcal{I}_p(f', r)}{\log \frac{1}{1-r}} : f \in \Sigma \right\} = B(p)$$

für $p \in \mathbb{R}$ gilt. Darf man also Grenzwert- und Supremumbildung vertauschen?

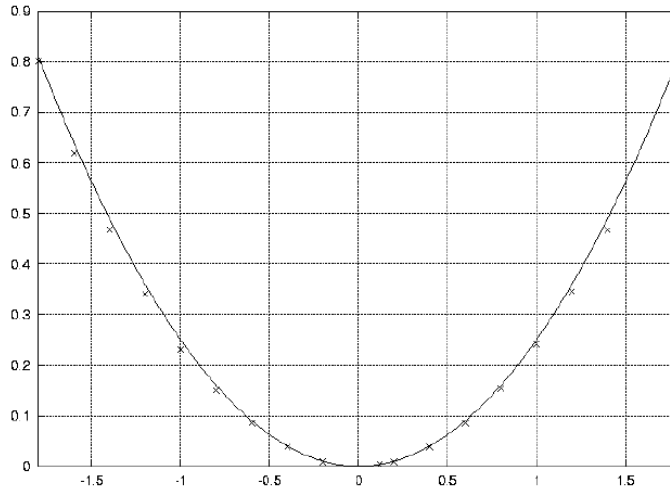


ABBILDUNG 1. Der vermutete Graph von $B(p)$ und die Werte der Computorexperimente

5. Brennans Vermutung in der Mandelbrotmenge

In einem wichtigen Spezialfall gelang es Baranski, Volberg und Zdunik [BaVoZd98], die Brennan Vermutung zu beweisen.

SATZ 2. Sei $c \in \mathcal{M}$ und $f : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathcal{F}_c^\infty$ eine konforme Abbildung vom Äußeren des Einheitskreises auf die Außenkomponente des Fatougebiets zum Polynom $P_c(z) = z^2 + c$. Dann ist

$$(1.58) \quad \beta_f(-2) \leq 1 .$$

Für $c = -2$ gilt die Gleichheit.

Wir formulieren zunächst ein Lemma, das im Wesentlichen schon im letzten Abschnitt bewiesen wurde. Wir bezeichnen für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ wieder

$$(1.59) \quad z_{n,k} = r_n e^{2\pi i k 2^{-n}} \quad , \quad w_{n,k} = f(z_{n,k})$$

Zunächst sei $p \in \mathbb{R}$ beliebig und

$$(1.60) \quad s_n^p = \sum_{k=0}^{2^n-1} |(P^n)'(w_{n,k})|^{-p} .$$

Dabei soll $r_n = r_0^{2^{-n}} \approx 1 + (r_0 - 1)2^{-n}$ mit einem $r_0 \gg 1$ sein.

LEMMA 2. *Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$(1.61) \quad C^{-1} \cdot 2^{n(p-1)} s_n^p \leq \int_{\partial\mathbb{D}} |f'(r_n \zeta)|^p |d\zeta| \leq C \cdot 2^{n(p-1)} s_n^p$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Mit Gleichung (1.18) erhält man durch Rechnung

$$(1.62) \quad |f'(z_{n,k})| = \left| \frac{2^n z_{n,k}^{2^n - 1}}{(P^n)'(w_{n,k})} \right| \cdot |f'(z_{n,k}^{2^n})| = c \cdot \frac{2^n}{|(P^n)'(w_{n,k})|},$$

wobei $c > 0$ eine von n unabhängige Konstante ist. Zusammen mit Proposition 2 folgt das Lemma. \square

Es genügt nun das Wachstum von s_n^p abzuschätzen. Der Trick von Volberg und Zdunik besteht darin, je vier Summanden aus (1.60) zusammenzufassen und deren Wachstum durch eine Konstante abzuschätzen.

Es sei für $n \in \mathbb{N}$

$$(1.63) \quad K_n(c, p) = \sup\{|w_{n,k} + c|^{-p/2} + |w_{n,k} - c|^{-p/2} : k = 0, \dots, 2^n - 1\}.$$

LEMMA 3. *Für die Summe aus (1.60) gilt*

$$(1.64) \quad s_{n+1}^p \leq K_n(c, p) \cdot 2^{-p} \cdot s_n^p.$$

Beweis:

Für $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ gilt $w_{n+1,k} = -w_{n+1,k+2^n}$ und daher

$$(1.65) \quad (P^n)'(w_{n+1,k}) = -(P^n)'(w_{n+1,k+2^n})$$

$$(1.66) \quad P(w_{n+1,k}) = w_{n,k} = P(w_{n+1,k+2^n}).$$

Aus (1.65) und (1.66) ergibt sich

$$(1.67) \quad |(P^{n+1})'(w_{n+1,k})| = |(P^n)'(w_{n,k})| |P'(w_{n+1,k})| = |(P^{n+1})'(w_{n+1,k+2^n})|.$$

Andererseits ist

$$(1.68) \quad w_{n+1,k} = P^{-1}(w_{n,k}) = \sqrt{w_{n,k} - c}$$

und weiter

$$(1.69) \quad |P'(w_{n+1,k})| = 2 \cdot \sqrt{|w_{n,k} - c|}.$$

Aus (1.67) und (1.69) erhält man

$$\begin{aligned}
 (1.70) \quad s_{n+1}^p &= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} |(P^{n+1})'(w_{n+1,k})|^{-p} \\
 &= 2^{1-p} \sum_{k=0}^{2^n-1} |(P^n)'(w_{n,k})|^{-p} |w_{n,k} - c|^{-p/2} .
 \end{aligned}$$

Jetzt nutzt man die Tatsache, dass

$$\begin{aligned}
 &|(P^n)'(w_{n,k})|^{-p} |w_{n,k} - c|^{-p/2} + |(P^n)'(w_{n,k+2^{n-1}})|^{-p} |w_{n,k+2^{n-1}} - c|^{-p/2} \\
 &= |(P^n)'(w_{n,k})|^{-p} (|w_{n,k} - c|^{-p/2} + |w_{n,k} + c|^{-p/2})
 \end{aligned}$$

für $k \in \{0, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ gilt, und es ergibt sich aus (1.70)

$$\begin{aligned}
 (1.71) \quad s_{n+1}^p &= 2^{-p} \sum_{k=0}^{2^n-1} (|(P^n)'(w_{n,k})|^{-p} (|w_{n,k} - c|^{-p/2} + |w_{n,k} + c|^{-p/2})) \\
 &\leq 2^{-p} K_n(c, p) \cdot s_n^p .
 \end{aligned}$$

□

Für eine Konstante $c > 0$ gilt nach Lemma 3

$$(1.72) \quad s_n^p \leq c \cdot 2^{-np} \cdot \prod_{\nu=0}^n K_\nu(c, p) .$$

Da der Abstand der Punkte $w_{n,k}$ von der Juliamenge \mathcal{J}_c beliebig klein wird, genügt es, das Supremum von Punkten auf der Juliamenge zu betrachten, um $K_n(c, p)$ abzuschätzen. Wir definieren

$$(1.73) \quad K(c, p) = \sup\{|w_{n,k} + c|^{-p/2} + |w_{n,k} - c|^{-p/2} : w \in \mathcal{J}_c\} .$$

und erhalten $\limsup_{n \rightarrow \infty} K_n(c, p) \leq K(c, p)$.

Mit Lemma 2 folgt

$$\begin{aligned}
 (1.74) \quad \beta_f(p) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \int_{\partial \mathbb{D}} |f'(r\zeta)|^p |d\zeta|}{\log \frac{1}{r_n-1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(p-1) \cdot \log 2 + \log s_n^p}{n \log 2 + \text{const.}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log s_n^p}{n \log 2} + p - 1 \\
 &\leq -p + \frac{\log K(c, p)}{\log 2} + p - 1 = \frac{\log K(c, p)}{\log 2} - 1 .
 \end{aligned}$$

Wir beenden den Beweis von Satz 2 mit einem Lemma für den Fall $p = -2$.

LEMMA 4. Für alle $c \in \mathcal{M}$ gilt

$$(1.75) \quad K(c, -2) \leq 4.$$

Die Gleichheit gilt nur im Fall $c = -2$.

Der Beweis des Lemmas zergliedert sich in zwei weitere Aussagen.

LEMMA 5. Für alle $c \in \mathcal{M} \setminus \{-2\}$ gilt

$$(1.76) \quad |c|^2 + |c^2 + 2c| < 4.$$

In [BaVoZd98] geben die Autoren einen Beweis für diese Aussage über die Mandelbrotmenge, indem sie durch einige Rechnungen zeigen, dass die zu (1.76) gehörige Kurve die Mandelbrotmenge nur in -2 schneidet. Wir begnügen uns hier mit Abbildung 2, in der die Mandelbrotmenge und die zu (1.76) gehörige Kurve dargestellt sind.

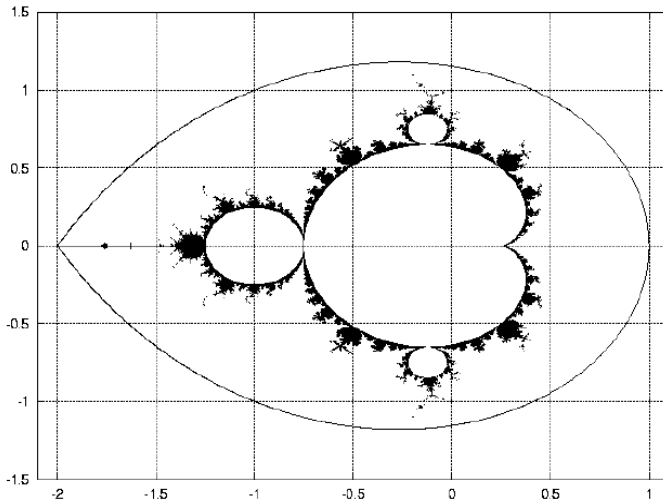


ABBILDUNG 2. Die Kurve berührt die Menge \mathcal{M} nur in -2

LEMMA 6. Sei $E_c = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - c| + |\zeta + c| > 4\}$ das Äußere einer Ellipse mit den Brennpunkten $+c$ und $-c$. Dann liegen die Bilder von $\overline{E_c} \setminus \{-2\}$ unter der Abbildung P in E_c , das heißt $P(\overline{E_c} \setminus \{-2\}) \subseteq E_c$.

Beweis:

Sei $w \in \overline{E_c}$, dann ist

$$\begin{aligned}
 (1.77) \quad & 4 \leq |w - c| + |w + c| \\
 & \Leftrightarrow 16 \leq |w - c|^2 + |w + c|^2 + 2|w^2 - c^2| \\
 & = 2|w|^2 + 2|c|^2 + 2|w^2 - c^2| \\
 & \Leftrightarrow 8 - |w|^2 \leq |c|^2 + |w^2 - c^2|.
 \end{aligned}$$

Aus Lemma 5 und der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$(1.78) \quad 4 > |c|^2 + |c^2 + 2c| \geq |c|^2 + |c^2 - w^2| - |w^2 + 2c|$$

und wegen (1.77) folgt daraus

$$(1.79) \quad |w|^2 + |w^2 + 2c| > 4$$

beziehungsweise

$$(1.80) \quad |P(w) - c| + |P(w) + c| > 4.$$

Das bedeutet $\overline{E_c}$ wird in E_c abgebildet. \square

Es folgt nun der noch fehlende Teil des Beweises von Lemma 4. Angenommen $J_c \cap \overline{E_c} \neq \emptyset$ für ein $c \in \mathcal{M} \setminus \{-2\}$, dann ist wegen Lemma 6 auch $J_c \cap E_c$ nicht leer. Da E_c offen ist, müsste $\bigcup_{n \geq 1} P^n(E_c)$ für ein genügend großes $n \in \mathbb{N}$ die ganze Ebene bis auf eventuell einen Punkt überdecken [Be91, Theo. 4.2.5] im Widerspruch zu Lemma 6. Also liegt kein Punkt von J_c in E_c und die Ungleichung (1.75) ist bewiesen

Im Fall $c = -2$ ist $J_{-2} = [-2; 2]$ und es gilt die Gleichheit in (1.75). \square

KAPITEL 2

Die Schneeflocke

1. Geometrische Selbstähnlichkeit und hyperbolische Länge

Wir betrachten in diesem Kapitel geometrisch selbstähnliche Gebiete und untersuchen die Integralmittel der Ableitung der konformen Abbildung von der Einheitskreisscheibe auf das Gebiet. Ein Gebiet soll geometrisch selbstähnlich heißen, wenn sein Rand oder ein Teil davon strikt selbstähnlich ist, das heißt er ist die Vereinigung von kleineren, ähnlichen Kopien von sich selbst. Für eine präzisere Definition sei auf [Fa93] verwiesen. Das klassische Beispiel eines geometrisch selbstähnlichen Gebiets ist die Schneeflocke, deren Rand eine von Koch-Kurve ist.

Sei zunächst G ein Gebiet und $f : \mathbb{D} \rightarrow G$ die Riemannsche Abbildung, welche die Null auf sich abbildet. Wir nehmen an, dass Γ eine rektifizierbare Jordankurve in G sei, deren euklidische Länge $\text{length}(\Gamma)$ bekannt ist. Man bestimmt nun ein $r = r(\Gamma)$ mit $0 < r < 1$ so, dass

$$(2.1) \quad \Gamma \subseteq \{ f(z) : |z| \leq r \}$$

gilt. Die Konstruktion soll so geschehen, dass für alle Kurven $\tilde{\Gamma} \subseteq G$, die Γ umschließen,

$$(2.2) \quad \text{length}(\tilde{\Gamma}) \geq c \cdot \text{length}(\Gamma)$$

mit einer Konstanten $c > 0$ gilt. Um zu einer Kurve Γ eine obere Schranke für $r(\Gamma)$ zu bestimmen, benutzen wir den hyperbolischen Abstand [Ahl73]. Wenn $w = f(z)$ ist, dann ist der hyperbolische Abstand in G zwischen 0 und w durch

$$(2.3) \quad \lambda_G(0, w) = \lambda_{\mathbb{D}}(0, z) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

gegeben. Daher hat man

$$(2.4) \quad |z| = \frac{e^{2\lambda_G(0, w)} - 1}{e^{2\lambda_G(0, w)} + 1}.$$

Zu der Kurve $\Gamma \subseteq G$ bestimmt man

$$(2.5) \quad \lambda(\Gamma) = \sup\{\lambda_G(0, w) : w \in \Gamma\} .$$

Dann ist

$$(2.6) \quad r(\Gamma) = \frac{e^{2\lambda(\Gamma)} - 1}{e^{2\lambda(\Gamma)} + 1}$$

das kleinste r mit dem (2.1) erfüllt ist. Zu einer gegebenen Kurve Γ ist also eine obere Schranke für den hyperbolischen Abstand der Kurvenpunkte zum Nullpunkt gesucht.

Für die euklidische Länge der Bildkurve des Kreises mit Radius $r(\Gamma)$ gilt wegen (2.1) und (2.2)

$$(2.7) \quad \int_{|z|=r(\Gamma)} |f'(z)||dz| \geq c \cdot \text{length}(\Gamma) .$$

Mit (2.6) und (2.7) schätzt man ab

$$(2.8) \quad \frac{\log \int_{|z|=r(\Gamma)} |f'(z)||dz|}{\log \frac{1}{1-r(\Gamma)}} \geq \frac{\log \text{length}(\Gamma) - c}{\log(e^{2\lambda(\Gamma)} + 1)}$$

mit einer neuen Konstanten $c > 0$. Wählt man nun eine Folge von Kurven $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, für die $r_n \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) ist, dann erhält man

$$(2.9) \quad \beta_f(1) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{length}(\Gamma_n)}{2\lambda(\Gamma_n)} .$$

Der Grenzwert wird in den folgenden Beispielen immer existieren.

2. Konstruktion der Kurven für die Schneeflocke

Das betrachtete Bildgebiet G soll nun die klassische Schneeflocke sein. Für $n \in \mathbb{N}$ soll $G_n \subseteq G$ die Schneeflocke in der n -ten Iterationsstufe sein. Dabei ist G_0 das gleichseitige Dreieck mit der Kantenlänge a . Zur Vereinfachung schreiben wir $a_n = 3^{-n}a$; dies ist die Länge einer Kante der n -ten Iterierten. Für den hyperbolischen Abstand gilt $\lambda_{G_n} \leq \lambda_G$ [Ahl73, Theo. 1-10].

Dann sei Γ_n ein Kantenzug in G_n mit Strecken der Länge $2a_n/3$, die parallel zu ∂G_n im Abstand von $a_n/3$ liegen. Die Endpunkte der Kanten bezeichnen wir als Eckpunkte von Γ_n , auch wenn der Winkel zur nächsten Strecke π ist. Die zwei Kantentypen der Kurve sind in Abbildung 2 dargestellt. Man erkennt leicht, dass

Γ_n eine Jordankurve ist. Die Länge der Kurve wird in Proposition 3 bestimmt werden. Für jede Jordankurve $\tilde{\Gamma}$ in G , die Γ_n umschließt, gilt

$$(2.10) \quad \text{length}(\tilde{\Gamma}) \geq \frac{7}{8} \text{length}(\Gamma_n),$$

wie man aus einfachen geometrischen Betrachtungen erkennt.

Es bleibt der hyperbolische Abstand der Punkte auf Γ_n von 0 abzuschätzen. Zu jedem Punkt $w \in \Gamma_n$ wählt man eine Punktfolge folgendermaßen: Es soll w_n der zu w nächstgelegene Eckpunkt von Γ_n sein. Für $k \in \{1, \dots, n-1\}$ soll w_k der zu w_{k+1} nächste Eckpunkt auf Γ_k sein, so wie es in Abbildung 1 angedeutet ist. Der Punkt $w_0 = 0$ ist der Mittelpunkt von G

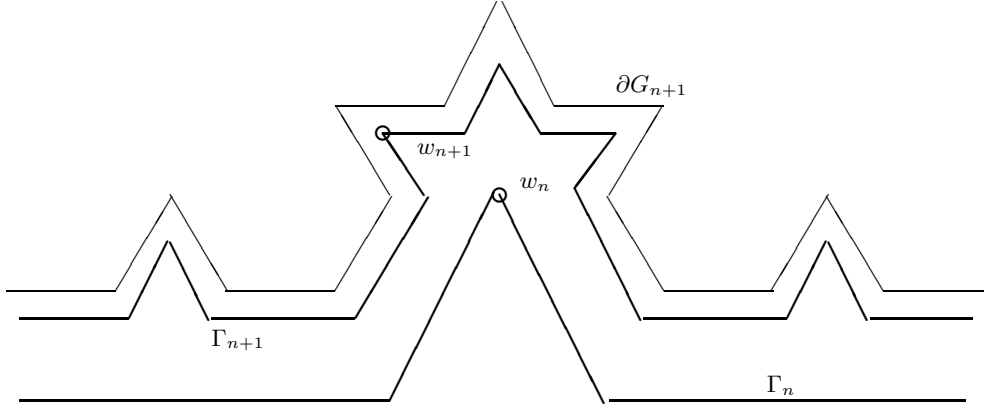


ABBILDUNG 1. Die Lage der Punktfolge (w_n)

Mittels der Dreiecksungleichung schätzt man die hyperbolische Länge ab

$$(2.11) \quad \lambda(0, w) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(w_{k+1}, w_k) + \lambda(w_n, w).$$

Den letzten Summanden schätzt man mit einer Konstanten $c > 0$ ab. Zur Bestimmung von $\lambda(w_{k+1}, w_k)$ für ein $k \in \{1, \dots, n-1\}$ werden zwei Fälle unterschieden. Wenn w_{k+1} auf einer Ecke von Γ_{k+1} mit einem Innenwinkel von $4\pi/3$ liegt, dann soll Δ ein zu G_1 ähnliches Gebiet mit der Kantenlänge $\sqrt{3}a_k/3$ und dem Mittelpunkt w_k sein. Das sternförmige Gebiet Δ soll wie in Abbildung 3 so ausgerichtet sein, dass w_{k+1} auf einer der langen Symmetrieachsen des Gebiets liegt.

Im anderen Fall, wenn der Innenwinkel von Γ_k bei w_k die Größe $\pi/3$ hat, soll Δ dieselben Bedingungen erfüllen, aber die Kantenlänge a_k haben. In beiden Fällen sieht man, dass $\Delta \subseteq G_{k+1}$ ist. Der Punkt w_{k+1} liegt in Δ und teilt dessen Symmetrieachse im Verhältnis 1:5.

Es sei $g : \Delta \rightarrow \mathbb{D}$ die Riemannsche Abbildung, für welche $g(w_k) = 0$ und $g(w_{k+1}) \geq 0$ ist. Wir setzen noch

$$(2.12) \quad \tau = \frac{1 + g(w_{k+1})}{1 - g(w_{k+1})}$$

und erhalten

$$(2.13) \quad \lambda_{G_{k+1}}(w_k, w_{k+1}) \leq \lambda_{\Delta}(w_k, w_{k+1}) = \lambda_{\mathbb{D}}(0, g(w_{k+1})) = \frac{1}{2} \log \tau .$$

Mit Gleichung (2.11) folgt

$$(2.14) \quad \lambda_G(0, w) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{G_{k+1}}(w_{k+1}, w_k) + c \leq \frac{1}{2} n \cdot \log \tau + c .$$

Setzt man nun noch die Länge der Kurve aus Proposition 3 und (2.14) in (2.9) ein, ergibt sich

$$(2.15) \quad \beta_f(1) \geq \frac{\log 4/3}{\log \tau} .$$

PROPOSITION 3. *Die Länge der oben definierten Kurve Γ_n beträgt*

$$(2.16) \quad \text{length}(\Gamma_n) = 4(4^n - 1) \cdot \frac{2}{3} a_n \quad (n \geq 1)$$

Dabei ist $a_n = 3^{-n} a$ die Kantenlänge der Schneeflocke n -ter Stufe.

Beweis: Wir teilen den Streckenzug Γ_n in Strecken der Länge $2a_n/3$ und beweisen mittels vollständiger Induktion über n , dass die Anzahl der Kanten $4(4^n - 1)$ ist. Dazu unterscheiden wir die $A(n)$ Kanten vom Typ 1, deren beide Nachbarkanten mit einem Innenwinkel von $2\pi/3$ und $4\pi/3$ anschließen, und den $B(n)$ Kanten vom Typ 2, die mit den benachbarten Kanten einen Winkel von 0 und $4\pi/3$ bilden (siehe Abbildung 2).

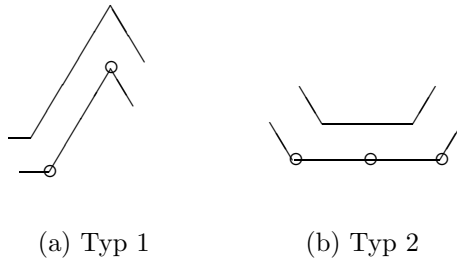


ABBILDUNG 2. Die zwei Kantentypen von Γ_n

Im ersten Schritt gibt nur Kanten vom ersten Typ, also

$$(2.17) \quad A(1) = 4 \cdot 3 \quad \text{und} \quad B(1) = 0 .$$

Aus jeder Kante vom Typ 1 werden im nächsten Schritt 3 Kanten vom Typ 1 und zwei Kanten vom Typ 2. Aus einer Kante vom Typ 2 werden 1 Kante vom Typ 1 und 2 Kanten vom Typ 2. Zusammen hat man

$$(2.18) \quad A(n+1) = 3A(n) + 1B(n)$$

$$(2.19) \quad B(n+1) = 2A(n) + 2B(n) .$$

Die rekursive Definition von $A(n)$ und $B(n)$ zusammen mit (2.17) führt zu

$$(2.20) \quad A(n) = \frac{4^n + 2}{6} \cdot A(1) = 2 \cdot 4^n + 4$$

$$(2.21) \quad B(n) = 2(4^n - 4) = 2 \cdot 4^n - 8 .$$

Addiert man (2.20) und (2.21) erhält man die Behauptung.

PROPOSITION 4. *Sei Δ ein zu dem oben definierten Gebiet G_1 ähnliches Gebiet mit der Kantenlänge $1/3$ und dem Mittelpunkt im Ursprung. Weiter sei $w = 2\sqrt{3}/9 \in \Delta$. Wenn $g : \Delta \rightarrow \mathbb{D}$ das Sterngebiet Δ konform auf den Einheitskreis abbildet und $g(0) = 0$ sowie $g(w) \geq 0$ gilt, dann ist näherungsweise*

$$(2.22) \quad g(w) = 0.934 .$$

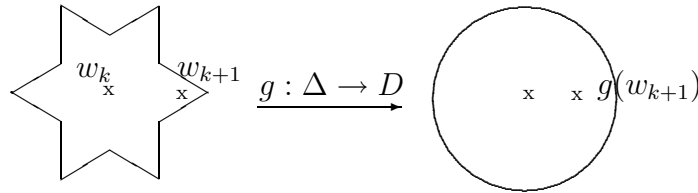


ABBILDUNG 3. Riemannsche Abbildung von Δ auf \mathbb{D}

Die Berechnung erfolgte mittels der Schwarz-Christoffel Formel und einer numerischen Näherung. Sie wurde mit der SC-Toolbox [Dr98] unter Matlab durchgeführt.

SATZ 3. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ die Schneeflocke und $f : \mathbb{D} \rightarrow G$ die konforme Abbildung, für die $f(0) = 0$ gilt, dann ist*

$$(2.23) \quad \beta_f(1) \geq \frac{\log(4/3)}{\log 1.69} \approx 0.085 .$$

Beweis:

Die Aussage ergibt sich sofort, wenn man (2.22) in (2.15) einsetzt.

3. Eine weitere von Koch - Kurve

Als zweites Beispiel wird die von Koch - Kurve untersucht, die durch den Generator in Abbildung 4 erzeugt wird.

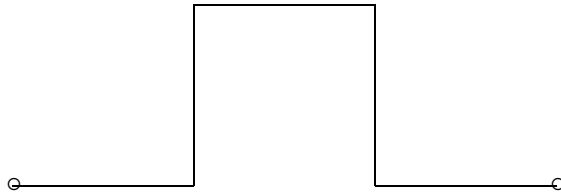


ABBILDUNG 4. Der Generator dieser von Koch Kurve ist die Ersetzung einer Strecke durch 5 Strecken mit drittel Länge

Im nullten Schritt ist das Gebiet G_0 ein Quadrat der Kantenlänge a . In jedem Schritt werden alle Kanten der Figur durch eine entsprechend verkleinerte Kopie des Generators ersetzt. So erhält man eine Folge von einfach zusammenhängenden Gebieten G_n ($n \in \mathbb{N}$), die gegen ein Gebiet G konvergieren, das wir als Bildgebiet nehmen wollen. Wieder bezeichne $a_n = 3^{-n}a$ die Länge einer Kante des Randes von G_n .

Analog zur Schneeflocke konstruiert man $\Gamma_n \subseteq G_n$, als den Streckenzug, dessen Kanten im Abstand von $a_n/3$ parallel zum Rand von G_n laufen (siehe Abbildung 5).

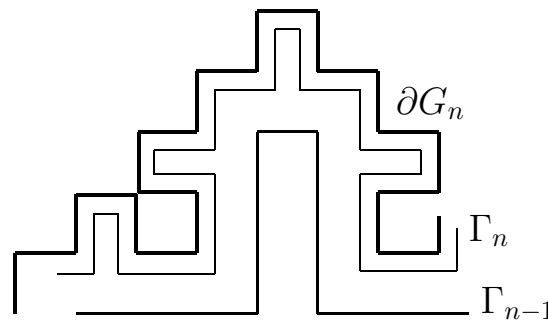


ABBILDUNG 5. Ausschnitt des Randes von G_n sowie der Kurven Γ_{n-1} und Γ_n

PROPOSITION 5. Die Länge von Γ_n für $n \in \mathbb{N}$ beträgt

$$(2.24) \quad \text{length}(\Gamma_n) = (12 \cdot 5^n - 8) \cdot a_{n+1} .$$

Für große n ergibt sich $\text{length}(\Gamma_n) \approx 4 \cdot (5/3)^n$.

Beweis:

Man unterteilt den Kantenzug Γ_n in 'lange', 'normale' und 'kurze' Kanten, die durch die Symbole l , n und k bezeichnet werden. Für ihre Länge gilt

$$(2.25) \quad \text{length}(l) = 5a_{n+1}, \text{length}(n) = 3a_{n+1}, \text{length}(k) = a_{n+1} .$$

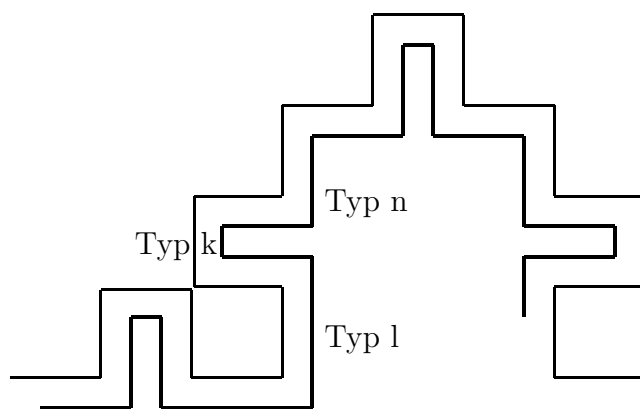


ABBILDUNG 6. Die drei Kantentypen von Γ_n unterschiedlicher Länge

Die Anzahl der Kanten vom jeweiligen Typ wird mit den entsprechenden Großbuchstaben bezeichnet. Im ersten Schritt gilt

$$(2.26) \quad L(1) = 0, N(1) = 16, K(1) = 4 .$$

Beim Schritt von einer Stufe zur nächsten werden symbolisch dargestellt

$$(2.27) \quad \begin{aligned} l &\longrightarrow 2l + 2n + 1k \\ n &\longrightarrow 1l + 3n + 1k \\ k &\longrightarrow 0l + 4n + 1k . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$(2.28) \quad \begin{aligned} L(n+1) &= 2L(n) + 1N(n) \\ N(n+1) &= 2L(n) + 3N(n) + 4K(n) \\ K(n+1) &= 1L(n) + 1N(n) + 1K(n) . \end{aligned}$$

Aus der rekursiven Definition (2.28) zusammen mit (2.26) erhält man

$$(2.29) \quad \begin{aligned} L(n) &= 4 \cdot 5^{n-1} - 4 \\ N(n) &= 12 \cdot 5^{n-1} + 4 \\ K(n) &= 4 \cdot 5^{n-1} . \end{aligned}$$

Die Länge von Γ_n berechnet sich nun mit (2.25) und (2.29) zu

$$(2.30) \quad \begin{aligned} \text{length}(\Gamma_n) &= (5(4 \cdot 5^{n-1} - 4) + (12 \cdot 5^{n-1} + 4) + 4 \cdot 5^{n-1}) a_{n+1} \\ &= (12 \cdot 5^n - 8) a_{n+1} . \end{aligned}$$

□

Es bleibt nun, den hyperbolischen Abstand der Kurvenpunkte vom Nullpunkt abzuschätzen. Für einen beliebigen Punkt $w \in \Gamma_n$ wählt man als ersten Hilfspunkt w_n , den nächstliegenden Mittelpunkt einer zu G_1 ähnlichen Figur mit der Seitenlänge a_n . Von dort geht man jeweils über Mittelpunkte von ähnlichen Gebieten der Seitenlänge a_k ($k \in \{1, \dots, n-1\}$) zurück bis w_0 , dem Mittelpunkt von G_0 . Den hyperbolischen Abstand schätzt man ab

$$(2.31) \quad \lambda_G(0, w) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_G(w_k, w_{k+1}) + \lambda_G(w_n, w) .$$

Der letzte Summand kann durch eine Konstante $c > 0$ abgeschätzt werden. Für ein festes $k \in \{0, \dots, n-1\}$ betrachte die Riemannsche Abbildung g von einem zu G_1 ähnlichen Gebiet mit der Kantenlänge a_k und dem Mittelpunkt w_k auf \mathbb{D} . Das Gebiet soll bezüglich w_{k+1} wie in Abbildung 7 ausgerichtet sein.

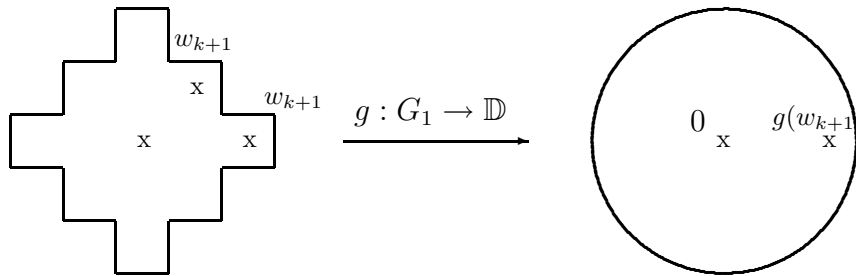


ABBILDUNG 7. Die Riemannsche Abbildung g von G_1 auf den Einheitskreis

Für eine obere Abschätzung des hyperbolischen Abstands genügt es zwei Fälle zu betrachten: Es ist $w_{k+1} = w_k + 2a_k$ oder $w_{k+1} = w_k + a_k(1 + i)$. In beiden Fällen ist w_{k+1} im Definitionsbereich von g und es gilt die folgende Aussage.

PROPOSITION 6. Sei $g : G_1 \rightarrow \mathbb{D}$ die konforme Abbildung, welche 0 auf w_k abbildet und für die $f'(0) > 0$ gilt. Dann ist

$$(2.32) \quad |g(w_{k+1})| \leq 0.96$$

in beiden Fällen, für das oben definierte w_{k+1} .

Das Ergebnis wurde wiederum mit der SC-Toolbox [Dr98] unter Matlab bestimmt.

Wie bei der klassischen Schneeflocke erhält man eine obere Abschätzung für das Integralmittelspektrum der Abbildungsfunktion.

SATZ 4. Sei $G \subset \mathbb{C}$ das oben definierte Gebiet und $f : \mathbb{D} \rightarrow G$ die konforme Abbildung, für die $f(0) = 0$ gilt, dann ist

$$(2.33) \quad \beta_f(1) \geq \frac{\log(5/3)}{\log 49} \approx 0.13 .$$

Mit ähnlichen Methoden ist es auch möglich obere Abschätzungen für das Integralmittelspektrum geometrisch selbstähnlicher Gebiete anzugeben. Vermutlich kann man für andere, kompliziertere Beispiele selbstähnlicher Gebiete als den beiden hier betrachteten noch größere Werte für $\beta_f(1)$ erhalten.

KAPITEL 3

Lückenreihen

In den bisherigen Beispielen wurde jeweils ein einfach zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{C} konstruiert und die entsprechende konforme Abbildung betrachtet, welche den Einheitskreis auf dieses abbildet. Das Problem besteht dann darin, numerische Abschätzungen für die Integralmittel der Ableitung dieser Funktion zu finden.

Wir betrachten nun den Fall einer Familie von in \mathbb{D} analytischen Funktionen, deren Integralmittelspektrum sich im Falle der Schlichtheit abschätzen lässt, für die jedoch zunächst keine globale Injektivität garantiert ist.

1. Lückenreihen und Blochfunktionen

Man nennt eine analytische Funktion $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Lückenreihe (Lacunary series), wenn ihre Potenzreihenentwicklung von der Form

$$(3.1) \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}$$

ist, wobei die Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ große Lücken hat. Das bedeutet, es gibt ein $\lambda > 1$ mit

$$(3.2) \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Ein einfaches Beispiel einer Lückenreihe ist die Funktion

$$(3.3) \quad g_b(z) = b \cdot \sum_{k=0}^{\infty} z^{\lambda^k}$$

mit einem festen $\lambda \in \{2, 3, \dots\}$ und $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Lückenreihen wie in (3.1) sind Blochfunktionen, wenn die Folge $|a_{n_k}|$ beschränkt bleibt [Po92, Propo. 8.6]. Allgemein heißt eine in \mathbb{D} analytische Abbildung g Blochfunktion, wenn sie

$$(3.4) \quad \|g\|_B := \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |g'(z)| < \infty$$

erfüllt. Die Klasse der Blochfunktionen steht in enger Beziehung zur Klasse der schlichten Abbildungen. Ist $f \in S$ und $g(z) = \log f'(z)$, dann gilt nach dem Koebeschen Verzerrungssatz $\|g\|_B \leq 6$ und g ist eine Blochfunktion. In der umgekehrten Richtung zeigt das Becker Schlichtheitskriterium [Po92, Theo. 1.11], dass es zu jeder Blochfunktion g mit $\|g\|_B \leq 1$ eine schlichte Funktion $f \in S$ gibt, so dass

$$(3.5) \quad \log f'(z) = g(z)$$

für $z \in \mathbb{D}$ ist.

Man kann das Integralmittelspektrum einer schlichten Funktion f durch die Blochnorm von $\log f'$ abschätzen.

SATZ 5. Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ eine schlichte Funktion, dann ist

$$(3.6) \quad \beta_f(p) \leq \frac{1}{4} \|\log f'\|_B^2 \cdot p^2$$

für alle $p \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Für $p \neq 0$ sei $g(z) = p \log f'(z)$. Es soll $c > 0$ eine jeweils passende Konstante bezeichnen. Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion und die Anwendung der Dreiecksungleichung zeigen

$$(3.7) \quad \mathcal{I}_p(f', r) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{g^n(r\zeta)}{n!} \right| |d\zeta| .$$

Vertauscht man Summation und Integration und sortiert die Summanden nach geraden und ungeraden Exponenten, bekommt man

$$(3.8) \quad \mathcal{I}_p(f', r) \leq c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\int_{\partial\mathbb{D}} |g(r\zeta)|^{2n} |d\zeta| + \int_{\partial\mathbb{D}} |g(r\zeta)|^{2n+1} |d\zeta| \right) .$$

Das Integral über die geraden Potenzen der Blochfunktion g kann man nach [Ma85] (siehe auch [Po92, Theorem 8.9]) abschätzen. Es gilt für eine beliebige Blochfunktion g und $n \in \mathbb{N}$

$$(3.9) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} |g(r\zeta)|^{2n} |d\zeta| \leq n! \left(\log \frac{1}{1-r} \right)^n \|g\|_B^{2n} .$$

Den Fall ungerader Exponenten führt man mit der Schwarzschen Ungleichung auf (3.9) zurück. Wir schreiben $2n+1 = n + (n+1)$ und erhalten

$$(3.10) \quad \int_{\partial\mathbb{D}} |g(r\zeta)|^{2n+1} |d\zeta| \leq \left(\int_{\partial\mathbb{D}} |g(r\zeta)|^{2n} |d\zeta| \right)^{1/2} \left(\int_{\partial\mathbb{D}} |g(r\zeta)|^{2n+2} |d\zeta| \right)^{1/2} .$$

Zusammen mit (3.9) hat man

$$(3.11) \quad \int_{\partial\mathbb{D}} |g(r\zeta)|^{2n+1} |d\zeta| \leq \|g\| (n+2) \log \frac{1}{1-r} n! \left(\log \frac{1}{1-r} \right)^n \|g\|^{2n}.$$

Die Stirlingsche Formel zeigt

$$(3.12) \quad \frac{(n!)^2}{(2n)!} \leq c \cdot 4^{-n} \sqrt{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Setzt man (3.9), (3.11) und (3.12) in (3.8) ein und schätzt weiter ab, ergibt sich

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \mathcal{I}_p(f', r) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + c \cdot n^2 \log \frac{1}{1-r} \right) \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{4} \|g\|_B^2 \log \frac{1}{1-r^2} \right)^n \\ &\leq c \cdot \left(\log \frac{1}{1-r} \right)^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{4} \|g\|_B^2 \log \frac{1}{1-r} \right)^n \\ &= c \cdot \left(\log \frac{1}{1-r} \right)^3 \cdot \exp \left(\frac{1}{4} \|g\|_B^2 \log \frac{1}{1-r} \right). \end{aligned}$$

Nun logarithmiert man beide Seiten und dividiert durch $\log \frac{1}{1-r}$. Der Grenzübergang für $r \rightarrow 1$ zeigt die Behauptung. \square

2. Lückenreihen und schlichte Funktionen

Nun sei g wie in (3.3) definiert mit einem $b \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \{2, 3, \dots\}$. Wir betrachten

$$(3.14) \quad f(z) = \int_0^z \exp(g(\zeta)) d\zeta$$

für $z \in \mathbb{D}$. Die Funktion ist lokal injektiv und für $b \leq b(\lambda)$ bildet f die Einheitskreisscheibe schlicht auf einen Quasikreis ab. Dass für jedes $\lambda \in \{2, 3, \dots\}$ ein solches $b(\lambda) > 0$ existiert, sieht man mit dem Becker Schlichtheitskriterium ([Po92, Propo. 8.14]). Es scheint plausibel, dass $b(\lambda)$ so gewählt werden kann, dass f für $b < b(\lambda)$ injektiv und für alle $b > b(\lambda)$ nicht mehr injektiv ist.

Man erhält eine untere Abschätzung der Integralmittel von f' ([Roh89], siehe auch [Po92, Seite 191]). Es sei

$$(3.15) \quad I_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^{2\nu} \frac{1}{\nu!^2}$$

PROPOSITION 7. Sei f wie in (3.14) definiert eine schlichte Funktion, das heißt mit einem $b \leq b(\lambda)$. Sei $p \in \mathbb{R}$, dann gilt für $0 < r < 1$

$$(3.16) \quad \int_{\partial\mathbb{D}} |f'(r\zeta)|^p |d\zeta| \geq c(1-r)^{-a}$$

mit einer Konstanten $c > 0$ und

$$(3.17) \quad a = \frac{\log I_0(b \cdot p)}{\log \lambda}$$

In der Tabelle 1 sind die gerundeten Werte für den Ausdruck in (3.17) mit $\lambda = 2$ in Abhängigkeit von p und $b \in \mathbb{R}$ angegeben. In dieser Tabelle wurde nicht auf die Schlichtheit von f für alle angegebenen Werte von b geachtet.

$b /$ p	0.4	0.8	1.0	1.4	1.8	2.0
0.34	0.0067	0.0266	0.0414	0.0807	0.1323	0.1626
0.50	0.0144	0.0572	0.0889	0.1721	0.2796	0.3418
0.60	0.0207	0.0821	0.1273	0.2449	0.3953	0.4813
0.65	0.0243	0.0961	0.1489	0.2856	0.4592	0.5579
0.70	0.0282	0.1112	0.1721	0.3290	0.5267	0.6385
0.75	0.0323	0.1273	0.1968	0.3749	0.5977	0.7228
0.80	0.0367	0.1445	0.2229	0.4232	0.6718	0.8105
0.85	0.0414	0.1626	0.2506	0.4739	0.7488	0.9011
0.90	0.0464	0.1818	0.2796	0.5267	0.8284	0.9944
0.95	0.0517	0.2019	0.3101	0.5816	0.9103	1.0900

TABELLE 1. Gerundete Werte für (3.17) mit $\lambda = 2$ in Abhängigkeit von b und p . Für $b \leq b(2)$ sind dies untere Schranken für $\beta_f(p)$.

Man vergleiche die Werte der einzelnen Zeilen von Tabelle 1 auch mit der Vermutung für das universelle Integralmittelspektrum $B(p) = p^2/4$. Der Wert $b(2) = 0.95$ scheidet als obere Schranke aus, da in diesem Fall $B(2) > 1$ wäre, was im Widerspruch zu (1.7) stehen würde. Dagegen wäre ein Wert von $b(2) \approx 0.8$ theoretisch möglich und die entsprechenden Werte von $\beta_f(p)$ lägen nahe an der vermuteten kleinsten oberen Schranke.

Um die Schlichtheit von f zu garantieren, benötigt man eine untere Abschätzung von $b(\lambda)$. Wir zitieren ein Ergebnis aus [Po92, Prop. 8.14].

SATZ 6. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

$$(3.18) \quad b(\lambda) \geq \frac{1}{2} \left(\max_{0 \leq x \leq 1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \lambda^{\nu+x} \exp(-\lambda^{\nu+x}) \right)^{-1}$$

Numerisch erhält man

λ	2	3	4	10	15	30	80
$b(\lambda) \geq$	0.3458	0.5467	0.6842	1.0310	1.1298	1.2385	1.3122

Wählt man $\lambda = 15$ und $b = 1.129 < b(\lambda)$, dann ist die in (3.14) definierte Funktion f schlicht und man erhält die Abschätzung $\beta_f(-1) \geq 0.109$ [Po92, Theo. 8.6].

Die unteren Abschätzungen für $b(\lambda)$ aus Satz 6 sind nicht scharf. Im folgenden soll nun auf graphischem Wege eine bessere untere Abschätzung für den Fall $\lambda = 2$ gewonnen werden. Diese Abschätzungen sind kein Beweis, sondern rein experimentell. Sie sollen lediglich einen Anhaltspunkt für die Größe von $b(2)$ geben und einen Eindruck von der Geometrie der Bildgebiete vermitteln.

3. Berechnung des Bildgebietes

Wir betrachten den Fall $\lambda = 2$. Aus der Definition von g in (3.3) erhält man

$$(3.19) \quad g_b(z) = g_b(z^{2^n}) + b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} z^{2^{k+1}}$$

und nach (3.5) ist

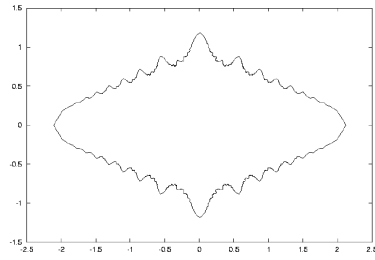
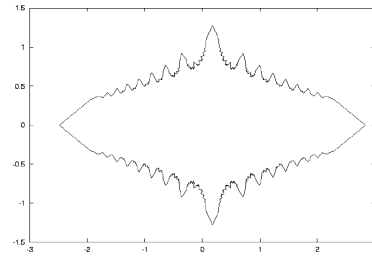
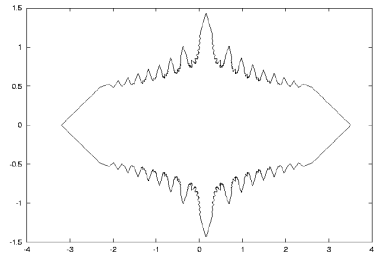
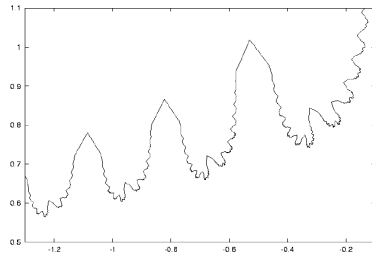
$$(3.20) \quad f'(z) = \exp(g_b(z))$$

sowie

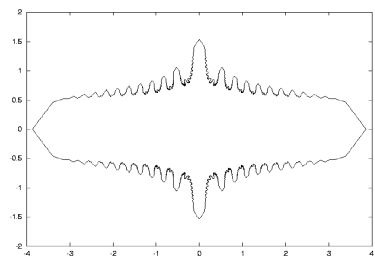
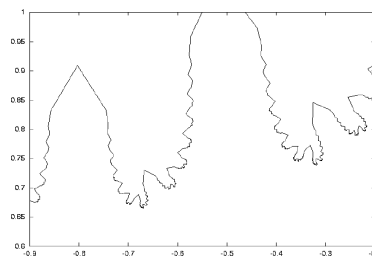
$$(3.21) \quad f(z) = f(z_0) + \int_{z_0}^z f'(\zeta) d\zeta$$

Für die dyadischen Punkte $z_{n,k} = r_0^{2^{-n}} \cdot e^{i2\pi k 2^{-n}}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ und einem festen $0 < r_0 \ll 1$ gilt

$$(3.22) \quad \begin{aligned} f(z_{n,k}) - f(z_{n,k-1}) &= \int_{z_{n,k-1}}^{z_{n,k}} f'(\zeta) d\zeta \\ &\approx f'(z_{n,k-1}) \cdot (z_{n,k} - z_{n,k-1}) \\ &\approx 2^{-n} \exp[2\pi i(2^{-n}k + 1/2)] \cdot f'(z_{n,k-1}) \\ &= -2^{-n} \exp(2\pi i 2^{-n}k) \cdot f'(z_{n,k-1}) \end{aligned}$$

(a) $b = 0.55$ (b) $b = 0.60$ (c) $b = 0.65$ 

(d) Ausschnittsvergrößerung von (c)

(e) $b = 0.68$ 

(f) Ausschnittsvergrößerung von (e)

ABBILDUNG 1. Bildkurven von Kreisen mit Radius nahe bei 1 unter der Abbildung g aus (3.14)

Setzt man (3.19) und (3.20) in (3.23) ein, erhält man mit

$$(3.23) \quad f(z_{n,k}) = f(z_{n,k-1}) - 2^{-n} \exp(2\pi i 2^{-n} k) \cdot \exp(g(z_{0,0})) \cdot \exp\left(b \sum_{k=0}^{n-1} z^{2^{k+1}}\right)$$

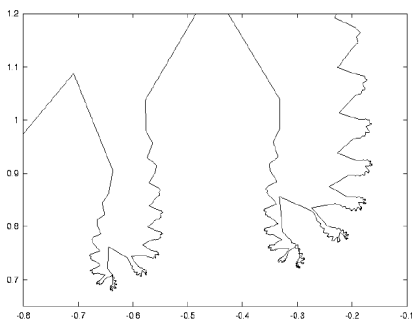
eine Formel, um sukzessiv 2^n Punkte des Bildes der Kurve $\{|z| = r_n\}$ unter f zu bestimmen, wobei $r_n^{2^n} = |z_{0,0}| = r_0$ ist.

Wenn der Polygonzug $\{[f(z_{n,k-1}), f(z_{n,k})] : k = 1, \dots, 2^n - 1\}$ keine Doppelpunkte enthält, kann man erwarten, dass auch $\{f(z) : |z| = r_n\}$ keine Doppelpunkte enthält. Die Funktion f ist dann zumindest in $\{|z| \leq r_n\}$ injektiv. Umgekehrt können wir davon ausgehen, dass f nicht mehr injektiv ist, sobald der Polygonzug einen Doppelpunkt enthält.

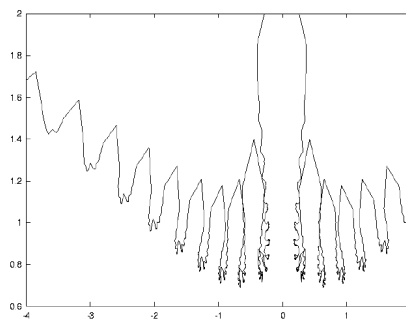
Es soll $r = r_n$ dicht bei 1 gewählt werden, das heißt bei festem $r_0 \ll 1$, muss man

$$(3.24) \quad n \geq -\log \left(\frac{\log r}{\log r_0} \right) \cdot \frac{1}{\log 2}$$

wählen.



(a) Ausschnitt mit $b = 0.78$



(b) Ausschnitt mit $b = 0.83$

ABBILDUNG 2. Bildkurven mit sichtbaren Doppelpunkten

Die Bildkurve $f(\{|z| = r\})$ lässt sich nun näherungsweise mit einem Computer bestimmen und graphisch darstellen. Im Bild lassen sich Doppelpunkte der Kurve, bzw. des Polygonzugs leicht feststellen. Einige Kurven sieht man in den Abbildungen 1 und 2. Während die Bildkurven in Abbildung 1 keine sichtbaren Doppelpunkte haben und damit Kandidaten für injektive Funktionen bleiben, erkennt man in den Ausschnitten der Kurven in Abbildung 2 Überschneidungen, so dass man diese Werte für $b(2)$ nach den Computerbildern ausschließen kann.

Die experimentellen Untersuchungen lassen vermuten, dass

$$(3.25) \quad 0.65 \leq b(2) \leq 0.75$$

gilt. Mit Proposition 7 folgt, dass die besten unteren Abschätzungen für das universelle Integralmittelspektrum $B(p)$, die mit Funktionen von der Form (3.3) mit $\lambda = 2$ erreichbar sind, an der Stelle $p = 1$ einen Wert von $B(1) \geq 0.16$ liefern.

Es ergibt sich also weder eine Verbesserung der von Pommerenke analytisch bewiesenen Abschätzung (1.10), und erst recht nicht der experimentellen Abschätzungen aus Tabelle 1 im ersten Kapitel. Es scheint, dass die Klasse der schlichten Funktionen, die sich als Lückenreihe darstellen lassen, das Integralmittelspektrum innerhalb aller beschränkten, schlichten Funktionen nicht maximieren.

KAPITEL 4

Quadratische Differentiale

In diesem Kapitel soll ein Algorithmus zur Berechnung der Trajektorien von quadratischen Differentialen vorgestellt werden sowie einige Anwendungen in der Funktionentheorie genannt werden. Zunächst werden die quadratischen Differentiale definiert und grundlegende Eigenschaften erwähnt. Diese kurze Einführung beruht auf den ausführlichen Erörterungen über quadratische Differentiale von Strebel [Str84] und Jensen [Je75].

1. Definition und Eigenschaften von quadratischen Differentialen

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $Q : G \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Dann heißt

$$(4.1) \quad Q(z)dz^2$$

ein quadratisches Differential mit dem Parameter z .

Wenn $G_1 \subset \mathbb{C}$ und $G_2 \subset \mathbb{C}$ Gebiete sind sowie $Q_1 : G_1 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ und $Q_2 : G_2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ meromorphe Funktionen, dann heißen die quadratischen Differentiale $Q_1(z)dz^2$ und $Q_2(w)dw^2$ gleich, wenn es eine konforme Abbildung $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ gibt, so dass

$$(4.2) \quad Q_1(z) = Q_2(\varphi(z))\varphi'(z)^2$$

$$(4.3) \quad Q_2(w) = Q_1(\varphi^{-1}(w))(\varphi^{-1})'(w)^2$$

gelten.

Mit dieser Transformationsregel kann man quadratische Differentiale auch für Gebiete definieren, die ∞ enthalten, In einer Umgebung von $w = \infty$ wendet man $\varphi(w) = \frac{1}{w}$ an und erhält

$$(4.4) \quad Q_2(w) = Q_1(1/w) \cdot 1/w^4 .$$

Betrachtet man beispielsweise $Q(z) = 1$ in $\hat{\mathbb{C}}$, so hat das zugehörige quadratische Differential in ∞ einen vierfachen Pol. Man kann quadratische Differentiale auf

beliebigen Riemannschen Flächen definieren, indem man lokale Funktionselemente (Q_k) betrachtet, die in gemeinsamen Punkten den Transformationsregeln (4.2) und (4.3) genügen.

Der Wert eines quadratischen Differentials in einem Punkt hängt von der jeweiligen Parameterdarstellung ab. Allerdings sind die Null- und Polstellen mit ihrer Vielfachheit unabhängig von der Parametrisierung. Dies sieht man folgendermaßen. Es sei n die Ordnung der Nullstelle beziehungsweise als negative Zahl die Ordnung der Polstelle. Weiter seien

$$(4.5) \quad Q_1(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots = z^n (a_n + a_{n+1} z + \dots)$$

und

$$(4.6) \quad z = \varphi(w) = c_1 w + c_2 w^2 + \dots,$$

wobei zur Vereinfachung der Rechnung $\varphi(0) = 0$ gesetzt wurde. Transformiert man nun das quadratische Differential $Q_1(z)dz^2$, dann erhält man

$$(4.7) \quad \begin{aligned} Q_2(w) &= Q_1(\varphi(w)) \cdot \varphi'(w)^2 = \varphi(w)^n (a_n + a_{n+1} \varphi(w) + \dots) \varphi'(w)^2 \\ &= (c_1 w + \dots)^n \cdot [a_n + a_{n+1} (c_1 w + \dots) + \dots] (c_1 + \dots)^2 \\ &= c_1^{n+2} a_n w^n + \dots \\ &= b_n w^n + b_{n+1} w^{n+1} + \dots \end{aligned}$$

Dabei ist $b_n = c_1^{n+2} \cdot a_n \neq 0$. Man sieht, dass die Vielfachheit einer Null- oder Polstelle unter beliebigen Parametertransformationen erhalten bleibt. In dem speziellen Fall $n = -2$ ist zudem noch $a_n = b_n$ für jede Transformation.

Man nennt die Null- und Polstellen eines quadratischen Differentials die kritischen Punkte, alle anderen Punkte heißen regulär. Man nennt einen kritischen Punkt endlich, wenn es sich um einen Pol erster Ordnung oder um eine Nullstelle handelt. Ein Pol von zweiter oder höherer Ordnung heißt unendlicher kritischer Punkt.

Es sei ein quadratisches Differential durch $Q(z)dz^2$ in $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ gegeben und $I \in \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Dann heißt eine glatte Kurve $z : I \rightarrow G$ Trajektorienbogen von $Q(z)dz^2$, wenn

$$(4.8) \quad Q(z(t)) \cdot \dot{z}(t)^2 < 0$$

für jedes $t \in I$ gilt. Eine Trajektorie ist ein maximaler Trajektorienbogen, das heißt es gibt keine echte Obermenge einer Trajektorie, die auch noch ein Trajektorienbogen ist. Wegen (4.8) können kritische Punkte nie auf einer Trajektorie liegen.

Häufig werden die durch (4.8) definierten Kurven als *orthogonale* Trajektorien bezeichnet. Die Trajektorien selbst werden in diesem Fall mit einem umgekehrten Relationszeichen in (4.8) erklärt. In jedem regulären Punkt stehen Trajektorie und orthogonale Trajektorie senkrecht aufeinander.

Beispiele:

1. Die Trajektorien des quadratischen Differentials zu $Q(z) = 1$ sind horizontale Geraden.
2. Das Trajektorienfeld zu $Q(z) = z$ ist in Abbildung 1a dargestellt. Der Punkt Null ist ein endlicher kritischer Punkt. Er liegt im Abschluss von drei Trajektorien, diese heißen kritische Trajektorien.
3. Sei $Q(z) = (z^2 - 1)^{-1}$. Das quadratische Differential hat kritische Punkte der Ordnung -1 in $z = -i$ und $z = +i$ sowie nach (4.4) in Unendlich einen kritischen Punkt der Ordnung -2 mit negativem Koeffizienten. Eine kritische Trajektorie verbindet die beiden einfachen Pole. Alle übrigen Trajektorien sind Jordankurven, in deren Innengebiet die beiden Pole liegen (Abbildung 1b).

Das Verhalten der Trajektorien wird durch Art und Lage der kritischen Punkte bestimmt.

2. Lokales Verhalten der Trajektorien

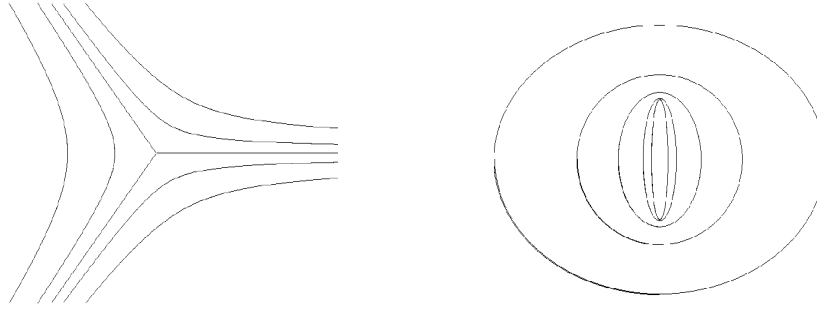
Das lokale Verhalten der Trajektorien untersucht man durch Einführung von lokalen Parametern. Sei $Q(z)dz^2$ ein quadratisches Differential und $a \in \mathbb{C}$ ein regulärer Punkt. Dann ist $Q(z) \neq 0, \infty$ in einer Umgebung von a und man kann einen Zweig von $\sqrt{Q(z)}$ auswählen. Setzt man nun

$$(4.9) \quad w = \varphi(z) = \int_a^z \sqrt{Q(\zeta)} d\zeta ,$$

dann ist φ in einer Umgebung von a eine konforme Abbildung, die a nach Null abbildet. Weiterhin gilt

$$(4.10) \quad dw^2 = Q(z)dz^2 .$$

In dem Parameter w ausgedrückt schreibt sich das quadratische Differential also durch $\tilde{Q}(w)dw^2$ mit $\tilde{Q}(w) \equiv 1$. Die Funktion φ^{-1} bildet nun die Trajektorien der w -Ebene (horizontale Geraden) in die z -Ebene ab. Da φ konform ist, sind die Trajektorien in der z -Ebene lokal wieder parallele Geraden.



(a) Nullstelle erster Ordnung

(b) Zwei Pole erster Ordnung

ABBILDUNG 1. Lokale Struktur der Trajektorien eines quadratischen Differential

Das Verhalten der Trajektorien in der Nähe eines kritischen Punktes ist komplizierter. Sei a eine n -fache Nullstelle von Q , dann hat man die Darstellung $Q(z) = (z - a)^n \cdot \tilde{Q}(z)$, wobei $\tilde{Q}(z)$ keinen kritischen Punkt in der Nähe von a hat. Wir betrachten

$$(4.11) \quad \varphi(z) = \frac{2}{n+2}(z-a)^{\frac{n+2}{2}}.$$

Die Abbildung φ ist konform in einem Sektor mit dem Winkel $\frac{2\pi}{n+2}$ in einem kleinen Kreis um a und bildet diesen in die obere oder untere Halbebene ab.

Für die Umkehrabbildung gilt

$$(4.12) \quad \varphi^{-1}(w) = \left(\frac{n+2}{2}w\right)^{\frac{2}{n+2}} + a$$

und

$$(4.13) \quad \frac{d}{dw}\varphi^{-1}(w) = \left(\frac{n+2}{2}w\right)^{\frac{-n}{n+2}}.$$

Der Faktor in (4.11) ist so gewählt, dass sich

$$(4.14) \quad Q(z)dz^2 = (z-a)^n \cdot \tilde{Q}(z)dz^2 = \tilde{Q}(\varphi^{-1}(w))dw^2$$

ergibt.

Da $\tilde{Q} \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(a)$ keinen kritischen Punkt hat, sind die Trajektorien in der w -Halbebene lokal parallele Geraden. Die (mehrdeutige) Abbildung φ^{-1} bildet diese Trajektorien auf $n+2$ Sektoren um a ab.

Ordnung von a	Bezeichnung des kritischen Punkt	Konformes Bild der Trajektorien in einer Umgebung von a
$n = 0$	a ist ein regulärer Punkt.	Die Trajektorien sind parallele Geraden.
$n \geq 1$ oder $n = -1$	a ist ein endlicher kritischer Punkt.	Es laufen $n+2$ kritische Trajektorien nach a . Diese bilden Sektoren mit gleichem Winkel, in denen die weiteren Trajektorien liegen.
$n = -2$	a ist ein nicht-endlicher kritischer Punkt	Sei $c = (z - a)^{-1}Q(z) _{z=a}$. Wenn $c < 0$ ist, dann laufen die Trajektorien radial nach a . Wenn $c > 0$ ist, sind die Trajektorien Kreise mit dem Mittelpunkt in a . Falls $\text{Im}(c) \neq 0$ ist, dann laufen die Trajektorien als logarithmische Spiralen nach a .
$n \leq -3$	a ist ein nicht-endlicher kritischer Punkt	Jede Trajektorie in einer Umgebung von a läuft unter einem von $2 - n$ Winkeln nach a .

TABELLE 1. Lokales Verhalten der Trajektorien eines quadratischen Differentials in der Umgebung von $a \in \mathbb{C}$.

Die lokale Struktur der Trajektorien an einem kritischen Punkt ist durch die Ordnung und im Fall, dass die Ordnung $n = -2$ ist, durch den Koeffizienten a_{-2} vollständig bestimmt. Wir lassen die weiteren Herleitungen hier aus und geben nur eine Übersicht in Tabelle 1. Die vollständige Herleitung und weitere Informationen findet man bei [Str84] oder [Je75].

Wie im Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen sind die lokalen Eigenschaften der quadratischen Differentiale vollständig verstanden.

3. Globales Verhalten der Trajektorien

Von nun ab sollen nur noch rationale Funktionen untersucht werden, das heißt es gilt $G = \hat{\mathbb{C}}$. Eine Trajektorie eines quadratischen Differentials $Q(z)dz^2$ heißt kritische Trajektorie, wenn einer ihrer Endpunkte ein endlicher kritischer Punkt ist. Da es nur endlich viele kritische Punkte gibt und zu jedem endlichen kritischen Punkt der Ordnung $n \geq -1$ genau $n + 2$ kritische Trajektorien gehören, gibt es nur endlich viele kritische Trajektorien Γ_i . Die kritischen Punkte seien mit a_i

bezeichnet. Sei G eine Komponente der offenen Menge $\hat{\mathbb{C}} \setminus (\bigcup_i \Gamma_i \cup \{a_i\})$. Es zeigt sich [Str84], dass genau einer der folgenden Fälle zutrifft.

(i) G ist ein Endgebiet

Es gibt genau einen kritischen Punkt a der Ordnung $n \leq -2$ in ∂G . Der Abschluss jeder Trajektorie aus G ist eine geschlossene Kurve, welche a enthält.

(ii) G ist ein Streifengebiet

Im Rand von G liegen zwei Pole der Ordnung $n \leq -2$. Die Trajektorien in G verbinden diese Pole.

(iii) G ist ein Kreisgebiet

Eine Komponente von ∂G ist ein zweifacher Pol. Alle Trajektorien aus G sind geschlossene Kurven, die den Pol umlaufen.

(iv) G ist ein Ringgebiet

Alle kritischen Punkte in ∂G sind endlich. Die Trajektorien in G sind geschlossene Kurven.

(v) G ist ein Dichtegebiet

In G liegen keine geschlossenen Trajektorien. Damit ein Dichtegebiet vorkommen kann, muss Q mindestens vier paarweise verschiedene Pole haben. Dies besagt der Drei-Pole Satz; siehe [Je75].

In dem Fall, dass $Q(z)dz^2$ keine unendlichen kritischen Punkte hat, gibt es ausschließlich Ring- und Dichtegebiete.

4. Numerische Bestimmung der Trajektorien mittels Regularisierung

Wir nehmen an, dass Q eine rationale Funktion ist, die durch Lage und Ordnung ihrer Null- und Polstellen gegeben ist. Wie üblich werden Polstellen als Nullstellen mit negativer Ordnung gekennzeichnet.

Das Programm *qdiff* soll die endlichen kritischen Trajektorien des quadratischen Differentials $Q(z)dz^2$ bestimmen und die durch einen regulären Punkt z_0 bestimmte Trajektorie berechnen können.

Wir betrachten zunächst den zweiten Fall und nehmen an, dass $z_0 \in \mathbb{C}$ ein regulärer Punkt von $Q(z)dz^2$ ist. Liegt kein kritischer Punkt des quadratischen Differentials in der Nähe von z_0 , kann man aus Gleichung (4.8) einen weiteren

Punkt der Trajektorie bestimmen. Aus (4.8) ergibt sich

$$(4.15) \quad \arg Q(z(t)) = -\arg \dot{z}(t)^2 .$$

Daraus erhält man zwei Lösungen

$$(4.16) \quad \dot{z}(t) = \pm |\dot{z}(t)| \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}i \arg Q(z(t))\right) .$$

Für kleine $\Delta z > 0$ kann man daher mit

$$(4.17) \quad z_1 = z_0 \pm \Delta z \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}i \arg Q(z_0)\right)$$

einen weiteren Punkt auf der Trajektorie näherungsweise bestimmen. Der fest gewählte Parameter Δz gibt dabei die Schrittweite an. Die Wahl des Vorzeichens bestimmt die Richtung, in der die Trajektorie durchlaufen werden soll. Liegt z_0 in der Nähe eines kritischen Punkt, wird dieses einfache Verfahren zu ungenau.

Wir werden daher eine Regularisierungsabbildung φ einführen, welche eine Umgebung des kritischen Punkts in die obere Halbebene abbildet und den kritischen Punkt auf Null wirft, derart dass das quadratische Differential $Q^*(w)dw^2$ mit $w = \varphi(z)$ in einer Umgebung von Null keinen kritischen Punkt hat und in einer Umgebung von z_0 gilt

$$(4.18) \quad Q^*(w)dw^2 = Q(z)dz^2 .$$

Nun bestimmt man analog zu (4.17) einen Punkt w_1 aus $w_0 = \varphi(z_0)$ der Trajektorie in der w -Ebene. Anschließend transformiert man diesen mit $z_1 = \varphi_k^{-1}(w_1)$ zurück in die z -Ebene. Dabei wählt man einen Zweig k der Umkehrabbildung φ^{-1} so, dass $z_0 = \varphi_k^{-1}(w_0)$ gilt.

4.1. Der Algorithmus zur Bestimmung regulärer Trajektorien. Betrachten wir nun den Algorithmus zur numerischen Bestimmung einer regulären Trajektorie etwas detaillierter. Es sei ein regulärer Punkt z_0 gegeben sowie dessen Vorgängerpunkt z_{-1} , um die Richtung der Trajektorie festzulegen.

1. Man ermittelt den zu z_0 nächstliegenden kritischen Punkt a von $Q(z)dz^2$ und seine Ordnung n . Dann wählt man gemäß (4.11) die Regularisierungsabbildung $\varphi(z)$ entsprechend der Ordnung von a sowie

$$(4.19) \quad Q^* = \left(\frac{Q}{(z-a)^n}\right) \circ \varphi^{-1} .$$

2. Man berechnet $w_{-1} = \varphi(z_{-1})$ und $w_0 = \varphi(z_0)$, so dass sie in der oberen Halbebene liegen.

3. Man nimmt eventuell eine weitere Unterteilung in N Schritte vor. Für n von 0 bis $N - 1$ bestimmt man

$$(4.20) \quad w_{n+1} = w_n \pm \Delta t \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}i \arg Q^*(w_n)\right).$$

Das Vorzeichen, welches die Richtung der Trajektorie angibt, bestimmt man so, dass $|w_{n+1} - w_{n-1}|$ groß wird. Wir gehen davon aus, dass auf diese Art und Weise, die Trajektorie immer in dieselbe Richtung verfolgt wird.

Die Anzahl N der Rechenschritte ergibt sich durch $N = \lceil \frac{\Delta w}{\Delta t} \rceil$ mit $\Delta w = \Delta z \cdot |\varphi'(z_n)|$. Es gehen also zwei Parameter ein. Die Schrittweite Δz der in der z -Ebene zu bestimmenden Punkte wird dem Programm mit der Option `-s` mitgeteilt. Die Schrittweite Δt wird für die Hilfspunkte in der w -Ebene benutzt. So kann man Trajektorien sehr genau berechnen, ohne dass alle Punkte auch in die z -Ebene rücktransformiert und ausgegeben werden müssen.

4. Man wählt einen Zweig der Umkehrabbildung φ_k^{-1} so, dass $z_0 = \varphi_k^{-1}(w_0)$ ist, und bestimmt $z_1 = \varphi_k^{-1}(w_1)$.

5. Nun wird z_1 zur Trajektorie hinzugefügt und man setzt $z_{-1} = z_0$ und $z_0 = z_1$. Der nächste Punkt wird bestimmt, indem man zu Schritt 1 zurückgeht und die Schleife erneut durchläuft.

In dem Programm *qdiff* wird in Wirklichkeit nicht (4.20) zur Bestimmung des nächsten Punktes benutzt sondern das effektivere Runge-Kutta Verfahren.

4.2. Abbruchkriterien bei der Berechnung einer Trajektorie. Es gibt vier Möglichkeiten, wann die Berechnung einer Trajektorie abgebrochen wird.

Die Trajektorien werden nur innerhalb eines vorgegeben Bildausschnitts weiterverfolgt. Sollte also $|z_0| > R$ sein, dann ist z_0 der letzte berechnete Punkt der Trajektorie. Die Konstante R wird dem Programm mit der Option `-r` vorgegeben.

Die Trajektorien werden nicht in einen kritischen Punkt hineinverfolgt. Wir gehen davon aus, dass eine Trajektorie, die einem kritischen Punkt zu nahe kommt, in diesem endet. Der minimale Abstand von einem kritischen Punkt wird durch die Konstante *MinCritDist* festgelegt. Die Berechnung wird abgebrochen, wenn $|z_0 - a| \leq \text{MinCritDist}$ für einen kritischen Punkt a gilt. Der Parameter *MinCritDist* wird mit der Option `-d` gesetzt.

Von jeder Trajektorie werden maximal *MaxPoint* Punkte bestimmt. Die Option `-p` legt den Wert der Konstanten fest.

Schließlich wird geprüft, wie oft sich eine Trajektorie um sich windet. Dafür wird die Summe der Winkeländerungen mit dem Wert der Konstanten *MaxWindung* (multipliziert mit 2π) verglichen und die Berechnung weiterer Punkte gegebenenfalls abgebrochen. Dieses Kriterium spielt bei den Dichtebereichen eine besondere Rolle. Den Wert von *MaxWindung* setzt man mit der Option -w.

4.3. Die Richtung einer Trajektorie. Die Trajektorien eines quadratischen Differential haben, anders als bei linearen Differentialen, keine ausgezeichnete Richtung. Zur Berechnung ein weiteren Trajektorienpunktes muß man folglich die beiden letzten Punkte vorgeben, um in dieselbe Richtung weiterrechnen zu können. Man wählt den Zweig der Wurzel in (4.20) so, dass $|z_1 - z_{-1}| > |2z_0 - z_1 - z_{-1}|$. Der Punkt $2z_0 - z_1$ entspricht dem anderen Wurzelzweig. Man geht also davon aus, dass sich in jedem Schritt die Richtung der Trajektorie um weniger als π ändert. Die Annahme ist ausserhalb der Umgebungen der kritischen Punkten richtig für genügend kleine Schrittweiten.

4.4. Die Wahl des Zweiges der Umkehrfunktion. Ein größeres algorithmisches Problem tritt bei der Rücktransformation durch φ^{-1} auf. Bis auf den Fall eines einfachen Pols ist die Umkehrfunktion von φ mehrdeutig. Sei ein regulärer Punkt z_0 in der z -Ebene, sein Bild $w_0 = \varphi(z_0)$ und $w_1 = w_0 + \Delta t \cdot \exp(-\frac{1}{2}i \arg Q^*(w_n))$ als Nachfolgepunkt von w_0 gegeben. Welchen Zweig der Umkehrfunktion soll man zur Bestimmung von $z_1 = \varphi^{-1}(w_1)$ nehmen? Natürlich ist es der durch die Gleichung $z_0 = \varphi^{-1}(w_0)$ gegebene Zweig. Für die numerische Bestimmung machen wir die Annahme, dass

$$(4.21) \quad |\arg(z_1 - a) - \arg(z_0 - a)| < |\arg(\zeta - a) - \arg(z_0 - a)|$$

für alle $\zeta \in \varphi^{-1}(\{w_1\})$, $\zeta \neq z_1$ gilt. Die Voraussetzung ist erfüllt, wenn die Ordnung des kritischen Punktes nicht zu groß ist und die Schrittweite klein ist im Vergleich mit dem Abstand von z_0 zum kritischen Punkt.

Trotz dieser Schwierigkeiten arbeitet der Algorithmus wesentlich effizienter, als dies ohne die lokalen Regularisierungen möglich wäre. Nur sehr dicht beieinander liegende kritische Punkte stellen ein Problem dar.

4.5. Die kritischen Trajektorien. Das Programm *qdiff* berechnet zunächst die kritischen Trajektorien der Ordnung $n \geq -1$. Als Startpunkt der $n + 2$ Kurven, die von einem kritischen Punkt a ausgehen, wählt man Punkte $z_0^{(j)}$ für

$j = 1, \dots, n + 2$, die von a den Abstand Δz haben und für deren Argument

$$(4.22) \quad \arg z_0^{(j)} = 2\pi \frac{j}{n} + \arg \left(\frac{Q(z)}{(z-a)^n} \right) \Bigg|_{z=a}$$

gilt. Der notwendige Vorgängerpunkt zur Festlegung der Richtung ist natürlich der kritische Punkt $z_{-1} = a$. Die weiteren Punkte können nun wie im Fall der regulären Trajektorien bestimmt werden.

Von den unendlichen kritischen Punkten ($n \leq -2$) gehen unendlich viele Trajektorien ab beziehungsweise keine im Fall, dass ein doppelter Pol mit imaginärem Residuum vorliegt. Diese Trajektorien werden daher nicht automatisch bestimmt.

4.6. Das Programm `qdiff`. Das Programm steht inklusive aller Quelltexte im WWW unter <http://www.math.tu-berlin.de/~kraetzer> zur Verfügung. Der einfache Aufruf des Programms geschieht durch

```
qdiff -f datei1 -o datei2
```

In *datei1* stehen zeilenweise Real- und Imaginärteil eines kritischen Punktes und seine Ordnung getrennt durch Leerzeichen. Die berechneten Punkte der kritischen Trajektorien werden in *datei2* geschrieben. Das Programm kann mit weiteren Optionen aufgerufen werden, mit denen man die Schrittweite und die Abbruchkriterien bei der Berechnung einer Trajektorie festlegen kann. Die einzelnen Kriterien sind im Abschnitt 4.2 erläutert worden. Mit dem Aufruf

```
qdiff -h
```

erhält man eine Liste aller Optionen.

Beispielsweise setzt der Aufruf

```
qdiff -s0.01 -p2000 -r10.0 -d0.02 -w2 -oausgabe.txt -feingabe.txt
```

die Schrittweite auf 0.01, die maximale Zahl von Punkten einer Trajektorie auf 2000, den Radius des Zeichenbereichs auf 10 sowie den Mindestabstand einer Trajektorie zu einem kritischen Punkt auf 0.02. Der nächste Parameter gibt an, dass eine Trajektorie eine Gesamtdrehung von maximal $2 \cdot 2\pi$ machen darf. In der Datei *eingabe.txt* stehen zeilenweise Realteil, Imaginärteil und Ordnung der kritischen Punkte jeweils durch Leerzeichen getrennt. Das Programm schreibt Real- und Imaginärteil jedes Punktes der kritischen Trajektorien in eine Zeile von *ausgabe.txt*. Zwischen den Punkten zweier Trajektorien stehen zwei Leerzeilen. Mit einem entsprechenden Programm wie *gnuplot* kann man die Daten graphisch darstellen.

Gibt man in der Datei *eingabe.txt* bei einigen Punkten in der dritten Spalte null an, so sind dies keine kritischen Punkte, es wird aber die reguläre, durch den Punkt verlaufende Trajektorie in beide Richtungen berechnet. Mit dem Schalter -c ist es auch möglich die Berechnung der kritischen Trajektorien ganz zu unterdrücken.

5. Quadratische Differentiale mit geschlossenen Trajektorien

Für viele Extremalprobleme in der Funktionentheorie sind quadratische Differentiale mit geschlossenen Trajektorien wichtig; vergleiche [Str84], [Je75] und [Sta97]. Das bedeutet, dass die Endpunkte jeder kritischen Trajektorie kritische Punkte sind und dass jede reguläre Trajektorie eine geschlossene Kurve ist.

Sei $Q(z)dz^2$ ein quadratisches Differential in $\hat{\mathbb{C}}$. Dann ist Q eine rationale Funktion. Wir schränken die Untersuchung auf den Fall ein, dass Q in Unendlich einen doppelten Pol mit positivem Residuum hat und ansonsten alle kritischen Punkte endlich sind, also Q in \mathbb{C} höchstens einfache Pole besitzt.

Wegen (4.4) hat Q mindestens zwei Pole in \mathbb{C} . Im Allgemeinen gibt es n mit Vielfachheit gezählte Nullstellen und $n + 2$ Polstellen ($n \in \mathbb{N}$). Mit geeigneten $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_{n+2} \in \mathbb{C}$ hat Q die Form

$$(4.23) \quad Q(z) = \frac{\prod_{k=1}^n (z - z_k)}{\prod_{k=1}^{n+2} (z - w_k)}.$$

Es sollen alle Pole von Q einfach sein, so dass es keine End- und Streifengebiete gibt und genau ein Kreisgebiet um Unendlich.

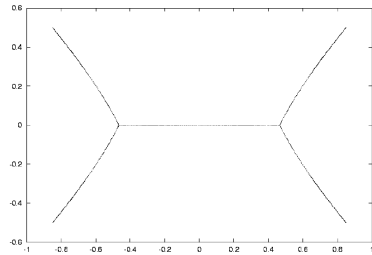
Die kritischen Trajektorien, die mindestens einen Pol von Q als Endpunkt haben, werden mit $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ bezeichnet, während alle übrigen kritischen Trajektorien $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \dots$ heißen sollen.

Die offene Menge $F = \hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_k \overline{\Gamma_k}$ wird durch $\bigcup_k \overline{\Gamma'_k}$ in mehrere zweifach zusammenhängende Gebiete zerlegt, welche Ringgebiete des quadratischen Differentials sind. Zwei reguläre Trajektorien von $Q(z)dz^2$ sind zueinander homotop bezüglich F genau dann, wenn sie in derselben Komponente von $F \setminus \bigcup_k \overline{\Gamma_k}$ liegen.

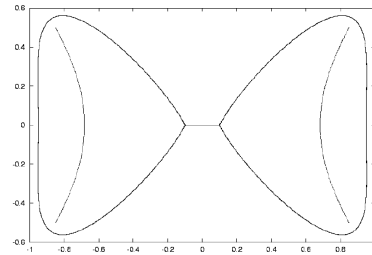
Beispiel 1:

Sei $n = 2$ und

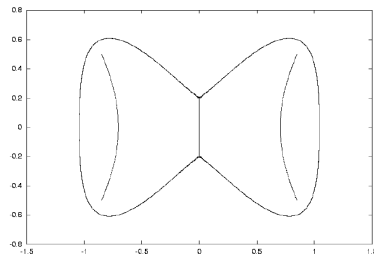
$$(4.24) \quad Q(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{\prod_{k=1}^4 (z - w_k)}$$



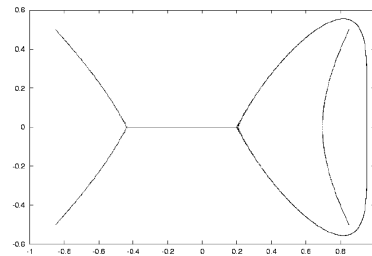
(a) Ein Ringgebiet um Unendlich



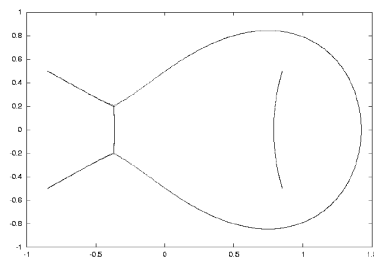
(b) Drei Ringgebiete



(c) Drei Ringgebiete



(d) Zwei Ringgebiete



(e) Zwei Ringgebiete

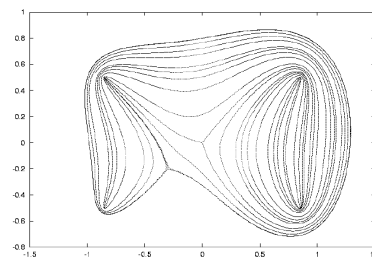
(f) Ein Ringgebiet und ein Dichteg-
biet

ABBILDUNG 2. Mögliche Strukturen der kritischen Trajektorien

mit $w_1 = -\overline{w_2} = -w_3 = \overline{w_4} = e^{i\varphi}$ und einem $\varphi \in (0, \pi/4]$.

Durch $\bigcup_k \overline{\Gamma'_k}$ wird die Ebene so geteilt, dass die Komponente, welche Unendlich enthält, ein Ringgebiet von Q ist. Das ergibt sich aus dem Satz über die lokale

Struktur der Trajektorien um einen doppelten Pol mit reellem Residuum; siehe in Tabelle 1. Die Struktur der weiteren Komponenten von $F \setminus \bigcup_k \overline{\Gamma}_k$ hängt von der Lage der Nullstellen z_1 und z_2 ab.

Falls z_1 und z_2 symmetrisch zur reellen oder imaginären Achse liegen, ergeben sich ausschließlich weitere Ringgebiete, ansonsten kann auch ein Dichtegebiet vorkommen, das keine geschlossenen Trajektorien enthält. Sei also $z_1^2 = \overline{z_2}^2$. Es ergeben sich im Wesentlichen die in den Abbildung 2 a) - e) dargestellten Möglichkeiten. Analog dazu gibt es weitere Fälle, wenn Q statt zwei einfachen eine doppelte Nullstelle hat.

Zum Vergleich ist in Abbildung 2 f) eine nicht symmetrische Anordnung der Nullstellen gegeben, so dass sich ein Dichtegebiet ergibt. Hier besteht F aus einer Komponente: einem Ringgebiet um Unendlich. Alle weiteren Punkte aus $\hat{\mathbb{C}}$ liegen im Abschluss der kritischen Trajektorien.

Beispiel 2:

Sei $n = 3$ und Q wie in (4.23) gegeben. Vier symmetrische Anordnungen sind in Abbildung 3 dargestellt. Was passiert aber, wenn die fünf gegebenen Polstellen kein Symmetrien haben?

Betrachten wir einmal den Fall, dass $z_2 = z_3$ in (4.23) ist, also Q eine einfache und eine doppelte Nullstelle hat. Es soll z_1 und z_2 so bestimmt werden, dass $Q(z)dz^2$ geschlossene Trajektorien hat. Ein allgemein verwendbares algorithmisches Verfahren für dieses Problem ist nicht bekannt.

Wir haben versucht, das Programm `qdiff` so zu erweitern, dass in dem Spezialfall von fünf einfachen Polen numerisch eine Lösung gefunden wird. Zum Testen des Algorithmus wählten wir die Polstellen $w_1 = 2.6 + 2.5i$, $w_2 = 3 + 0.5i$, $w_3 = 2 + i$, $w_4 = -2 + 0.3i$ und $w_5 = -2 - 0.3i$ sowie eine vorgegebene Nullstelle $z_1 = 2.5 + i$. Durch eine gezielte Suche sollte nun eine doppelte Nullstelle z_2 so bestimmt werden, dass die von z_2 ausgehenden kritischen Trajektorien wieder zu z_2 zurückkehren. In diesem Fall hat $Q(z)dz^2$ ausschließlich geschlossene Trajektorien.

Obwohl dieses Problem im hohen Maße numerisch instabil scheint, ermittelte das Programm Lösungen, die in den Abbildungen 4 und 5 graphisch dargestellt sind. Bei genauem Hinschauen erkennt man in den Abbildungen Ungenauigkeiten, die sich aufgrund der großen numerischen Instabilität kritischer Trajektorien nicht vollständig beseitigen ließen.

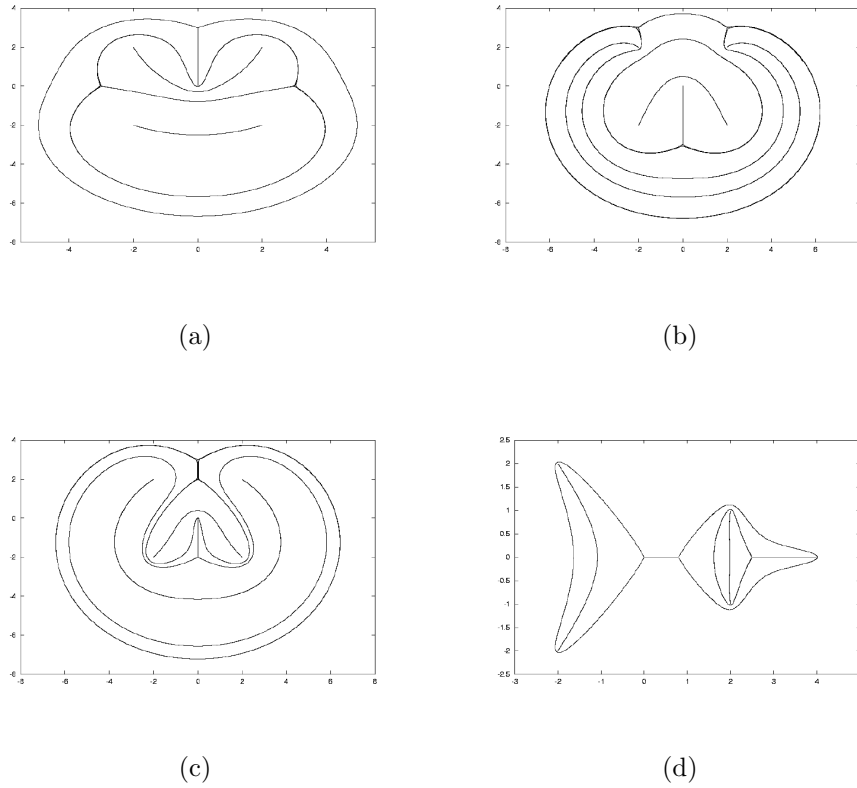


ABBILDUNG 3. Mögliche Strukturen der kritischen Trajektorien bei fünf symmetrischen Polen

6. Extremalgebiete und quadratische Differentiale

Sei $F \subset \hat{\mathbb{C}}$ mit $\infty \in F$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : F \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ analytisch. Es soll f analytisch fortgesetzt werden auf ein Gebiet, das in einem gewissen Sinne maximal ist. Dazu definiert man

$$(4.25) \quad \mathcal{D}(f, \infty) = \{D \subset \hat{\mathbb{C}} : F \subset D, f \text{ analytisch fortsetzbar in } D\}.$$

Dann gibt es ein Gebiet $D_0 \in \mathcal{D}(f, \infty)$, für das

$$(4.26) \quad \text{cap}(\hat{\mathbb{C}} \setminus D_0) = \inf\{\text{cap}(\hat{\mathbb{C}} \setminus D) : D \in \mathcal{D}(f, \infty)\}$$

ist [Sta85a, Theo. 1]. Dieses Gebiet ist eindeutig bis auf eine Menge der Kapazität Null [Sta85b, Theo. 2].

Wir bezeichnen $K_0 = \partial D_0$. Eine Beschreibung von K_0 durch die Trajektorien von quadratischen Differentialen im allgemeinen Fall wird in [Sta85c, Theo. 1]

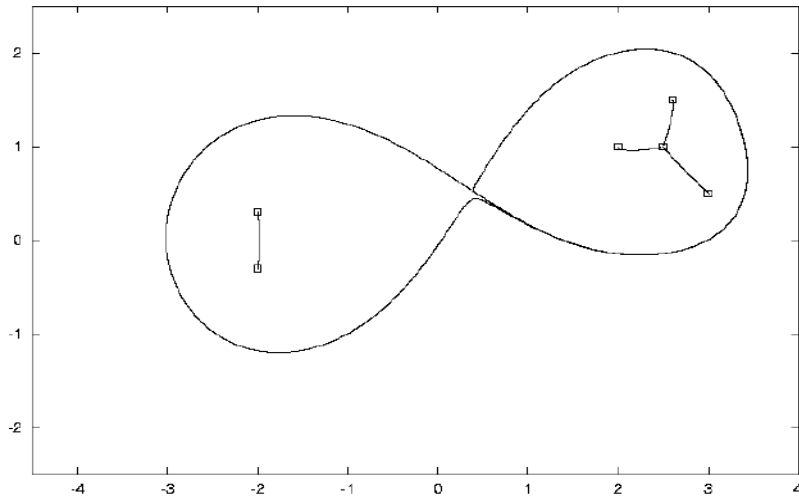


ABBILDUNG 4. Geschlossene Trajektorien bei nicht symmetrischer Lage der Polstellen

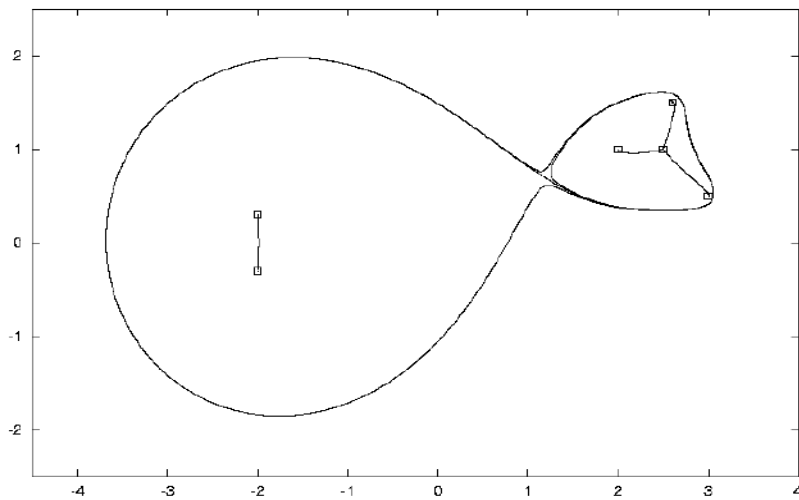


ABBILDUNG 5. Eine weitere Lösung für ein quadratisches Differential mit geschlossenen Trajektorien bei gegebener Lage der Polstellen

gegeben. Hier beschränken wir uns auf den Fall, dass f eine algebraische Funktion

ist, das heißt, es gibt ein Polynom $R(w, z)$, so dass f durch

$$(4.27) \quad R(f(z), z) = 0$$

definiert ist. Die Nullstellen von $\partial R(w, z)/\partial w$ sind die Verzweigungsstellen von f und seien mit w_j für $j = 1, \dots, n$ bezeichnet. Dann ist K_0 enthalten in $\{w_j : j = 1, \dots, n\}$ und den kritischen Trajektorien eines quadratischen Differentials $Q(z)dz^2$. Dabei ist Q eine rationale Funktion der Form

$$(4.28) \quad Q(z) = \frac{\prod_{j=1}^{n-2}(z - z_j)}{\prod_{j=1}^n(z - w_j)},$$

wobei die $n - 2$ Nullstellen z_j auch zusammenfallen können. Die Lage der Nullstellen ist nicht bekannt.

Es ist klar, dass die Komponente von $\hat{\mathbb{C}} \setminus K_0$, die unendlich enthält, ein Ringgebiet des quadratischen Differentials ist. Es ist eine notwendige Bedingung an die Lage der Nullstellen, dass $Q(z)dz^2$ geschlossene Trajektorien hat. Dies führt zu dem im letzten Abschnitt angesprochenen Problem zurück, bei gegebenen Polstellen die Nullstellen einer rationalen Funktion so zu bestimmen, dass das zugehörige quadratische Differential geschlossene Trajektorien hat.

Literaturverzeichnis

- [Ahl73] AHLFORS, L.V.: *Conformal Invariants* McGraw-Hill Book Co, New York 1973
- [BaVoZd98] BARANSKI, K., VOLBERG, A., ZDUNIK, A.: *Brennan's conjecture and the Mandelbrot set*; Int. Math. Res. Not. 1998, No. 12, 598 - 600
- [Be91] BEARDON, A.F.: *Iteration of rational functions*; Springer; New York 1991
- [Ber98] BERTILSON, D.: *Coefficient estimates for negative powers of the derivative of univalent functions*; Ark. Mat. **36** (1998), 255 - 273
- [Ber99] BERTILSON, D.: *On Brennan's conjecture in conformal mapping*; Doctoral Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm 1999
- [Bi97] BINDER, I.: *Rotation spectrum of planar domains* Thesis, California Institute of Technology, Pasadena 1997
- [Br78] BRENNAN, J.E.: *The integrability of the derivative in conformal mapping*; J. London Math. Soc. (2) **18** (1978), 261-272
- [CaGa93] CARLESON, L., GAMELIN, W. G.: *Complex dynamics*; Springer 1993
- [CaJo92] CARLESON, L., JONES, P.: *On coefficient problems for univalent functions and conformal dimensions*; Duke Math. J. **66** (1992), 169-206
- [CaMa94] CARLESON, L., MAKAROV, N.G.: *Some results connected with Brennan's conjecture*; Michigan Math. J. **14** (1994), 33-62
- [ClPo67] CLUNIE, J., POMMERENKE, CH.: *On the coefficients of univalent functions*; Michigan Math. J. **14** (1967), 71-78
- [deBr85] DEBRANGES, L.: *A proof of the Bieberbach conjecture*; Acta Math. **154** (1985), 137-152
- [Dr98] DRISCOLL, T.: *Schwarz-Christoffel toolbox for MATLAB 5*; <http://amath-www.colorado.edu:80/appm/faculty/tad/research/sc.html>
- [Du70] DUREN, P.L.: *Theory of H^p spaces*; Academic Press, New York 1970
- [Fa93] FALCONER, K.J.: *Fraktale Geometrie*; Spektrum Akademischer Verlag, 1993. Original: *Fractal Geometry* bei John Wiley & Sons, Chichester 1990
- [Je75] JENSEN, G.: *Quadratic Differentials*; Kapitel 8 in *Univalent Functions* von Ch. Pommerenke, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1975
- [JoMa95] JONES, P.W., MAKAROV, N.G.: *Density properties of harmonic measure*; Ann. Math. ,II. Ser. 142, No. 3 (1995), 427 - 455
- [Kr96a] KRAETZER, PH.: *Das universelle Integralmittelspektrum der beschränkten schlichten Funktionen*; Diplomarbeit, TU Berlin 1996
- [Kr96b] KRAETZER, PH.: *Experimental bounds for the integral means spectrum of conformal maps*; Complex Variables Theory Appl. **31** (1996), 305-309
- [Ma85] MAKAROV, N.G.: *On the distortion of boundary sets under conformal mappings*; Proc. London Math. Soc (3) **51** (1985), 369 - 384

- [Ma86] MAKAROV, N.G.: *Conformal mappings and Hausdorff measures*; Ark. Mat. **25** (1986), 41-89
- [Ma99] MAKAROV, N.G.: *Fine structure of harmonic measure*; St. Petersburg. Math. J. **10** No. 2 (1999), 217 - 268
- [MaPo97] MAKAROV, N.G., POMMERENKE, CH.: *On coefficients, boundary size and Hölder domains*; Ann. Acad. Sci. Fenn. **22** (1997), 305-312
- [Po67] POMMERENKE, CH.: *Relations between the coefficients of a univalent function*; Invent. Math. **3**, 1967, 1 - 15
- [Po75] POMMERENKE, CH.: *Univalent functions*; Vandenhoeck & Ruprecht; Göttingen 1975
- [Po85] POMMERENKE, CH.: *On the integral means of the derivative of a univalent function*; J. London Math. Soc. (2) **32**, 1985, 254 - 258
- [Po92] POMMERENKE, CH.: *Boundary Behaviour of Conformal Maps*; Springer 1992
- [Roh89] ROHDE, S.: *Hausdorffmaß und Randverhalten analytischer Funktionen*; Thesis TU Berlin 1989
- [Sta85a] STAHL, H.: *Extremal Domains Associated with an Analytic Function I*; Complex Variables **4** (1985), 311 - 324
- [Sta85b] STAHL, H.: *Extremal Domains Associated with an Analytic Function II*; Complex Variables **4** (1985), 325 - 338
- [Sta85c] STAHL, H.: *The Structure of Extremal Domains Associated with an Analytic Function*; Complex Variables **4** (1985), 339 - 354
- [Sta97] STAHL, H.: *The Convergence of Padé Approximants to Functions with Branch Points* J. Approximation Theory **91**, No. 2 (1997), 139 - 204
- [Str84] STREBEL, K.: *Quadratic Differentials*; Springer 1984
- [Wa81] WALTERS, P.: *An introduction to ergodic theory*; GTM Springer 1981

Lebenslauf

Philipp Kraetzer

2. Mai 1971	geboren in Berlin Eltern: Jakob und Eva-Maria Kraetzer
1981-1990	Canisius-Kolleg (Gymnasium)
Mai 1990	Abitur
Okt. 1990 - April 1996	Studium der Mathematik (Diplom) an der TU Berlin mit Nebenfach Informatik
April 1996	Diplom in Mathematik
Sommer 1996	Studienaufenthalt an der Universidad Catholica in Santiago de Chile
Nov. 1996 - Nov. 1999	Referendariat zur Vorbereitung auf das Amt des Studienrats in Berlin
Nov. 1999	2. Staatsexamen
Feb. 2000	Abschluss der Promotion an der TU Berlin