

Scherungsfreie Fluide in der Allgemeinen Relativitätstheorie

vorgelegt von
Diplom-Physiker Thoralf Chrobok
aus Berlin

von der Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuß:

Vorsitzender: Prof. Dr. E. Sedlmayr

Berichter: Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski

Berichter: Prof. Dr. W. Muschik

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 23. Februar 2004

Berlin 2004

D83

Zusammenfassung

Scherungsfreie Fluide in der Allgemeinen Relativitätstheorie

von Thoralf Chrobok

Die vorliegende Arbeit behandelt scherungsfreie Fluide in der Allgemeinen Relativitätstheorie. Dazu wird zunächst ein allgemeiner Fluidformalismus eingeführt. Dieser wird dann für Raumzeiten mit divergenzfreiem Weyltensor benutzt, um Modelle der linearen und erweiterten Thermodynamik zu untersuchen. Es zeigt sich, dass die verbleibenden möglichen Lösungsklassen sowohl eine einfache Quell- als auch eine einfache kinematischen Struktur besitzen. Es stellt sich heraus, dass die Aussagen der erweiterten Thermodynamik detaillierter als die der linearen Thermodynamik sind.

Im Folgenden werden Untersuchungen zur *shear-free fluid conjecture (SFC)* durchgeführt. Zunächst sind eine Reihe von Eigenschaften von rotierenden, expandierenden Raumzeiten mit nicht verschwindender Beschleunigung, deren Feldquelle eine ideale Flüssigkeit ist, abgeleitet. Dann werden zwei neue Spezialfälle der *SFC* bewiesen und eine Reihe weiterer Eigenschaften von nicht explizit bewiesenen Fällen bestimmt. Es wird gezeigt, dass die Evolution der Zwangsgleichungen mit den aus der Ricci-Identität folgenden Evolutionsgleichungen und den als Bedingung für die Divergenz des Weyltensors geschriebenen Bianchi-Identitäten im Widerspruch steht.

English summary

Shear-free fluids in general relativity

This work considers shear-free fluids in general relativity. The main reason for such an elaboration can be seen in cosmology, where strong limits on a possible shear of the galaxy flow exist, which can be obtained by observation of the highly isotropic microwave background radiation. Moreover also for the description of special phases of stellar evolution - especially the collapse - such considerations are of special interest.

After introducing a general fluid formalism, which besides Einstein's field equations uses the Ricci- and Bianchi-identity, a consideration of shear-free spacetimes with vanishing divergence of the Weyl-tensor for different thermodynamical models is performed. The main focus is here a comparison of linear and extended thermodynamics. This shows that the remaining possibilities for the spacetime configuration are mostly simple in the sense that rotation and acceleration in the kinematical level are suppressed as well as the heat-flow in the source terms of the dynamical equations. Therefore these spacetimes are highly homogeneous and isotropic. Moreover most of them are conformally flat. Some singular cases appear where kinematical vector fields are not suppressed but the equation of state has to be that of a cosmological constant, i.e. $\rho = -p$. Surprisingly the predictions of extended thermodynamics are stronger than the predictions of the linear thermodynamics.

Motivated by the above results these considerations are extended to spacetimes without any assumption on the Weyl-curvature, though with *a priori* more specialized source configuration. These considerations are aiming at perfect, shear-free fluids mainly with respect to the question of the shear-free fluid conjecture (*SFC*). This conjecture states that there are no solutions of Einstein's field equations with an ideal fluid as source, which are shear-free, while rotating and expanding. After summarizing the results published in the literature, a system of basic vector fields is constructed. With the help of this vector fields at first a number of general results on the structure of the spacetimes under consideration are re-derived. Then it is shown that a part of the divergence equations of the Weyl-tensor can be formulated as a set of covariant wave equations acting on the basic vector fields. Moreover it is proven that, using the results from the previous section, the equations of time development of the magnetic part of the Weyl-tensor is identically fulfilled independent of the form of the electric and magnetic part of the Weyl-tensor. On the other hand the time propagation equations of the electric part leads to a difficult set of differential equations. The analogy to Maxwell's equations is discussed. To make further considerations the propagation of the heat flow equation is considered and other reformulations are given.

In the following several new special cases of the *SFC* are proven. The strategy for the

proofs is to assume that one is able to construct solutions with non-vanishing expansion, rotation and acceleration and a perfect fluid with barotropic equation of state as a source. Hereupon using a propagation technique one can derive that these assumptions leads to a contradiction, and therefore the assumptions are incorrect and the *SFC* is confirmed.

With the help of the above derived tools and the described strategy it is proven that, for a vanishing gradient of the expansion, the *SFC* is correct. For the proof the time development of the constraint equations is considered, which leads to new constraint equations. These can be used to simplify the remaining part of the Maxwell-like field equations. By using again the propagation technique one is led to a set of differential equations for the equation of state, which finally excludes the possibility of a consistent solution.

Finally the case where the acceleration and the rotation field are perpendicular is considered. Here the time development of the constraint equation leads also to new constraints. However the statement of these constraint equations is unclear, because they include higher-order derivative terms, such that they are not solvable. Making an assumption about the representation of the gradient of the expansion it is possible to find some simplifications and predictions. Fixing the equation of state to $p = \alpha\rho$ with $\alpha = const$, a complicated case study is done, which rules out a number of models for special values of α . Thus a number of special cases which supports the *SFC* is found. Moreover it seems to be plausible that the gradient of expansion has to have only components in the time direction and only one special spatial direction. It is proven that this class of models must have a restricted Weyl-curvature and may allow the construction of solutions of Einstein's field equations which contradict the *SFC*. Also it is argued that the cases studied in this part are very similar to the general case.

The work concludes with summarizing remarks and some comments on the relation between thermodynamics and gravitational theory.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Grundlagen	9
2.1	Raumzeit und Krümmungsgrößen	9
2.2	Kinematische Invarianten	12
2.3	Feldgleichungen und daraus ableitbare Bedingungen	14
2.3.1	Feldgleichungen und Energie-Impuls-Bilanz	14
2.3.2	Feldgleichungen und Bianchi-Identität	15
2.3.3	Feldgleichungen und Ricci-Identität, Propagations- und Zwangsgleichungen	16
2.3.4	Maxwellartige Feldgleichungen für den Weyltensor	18
3	Raumzeiten mit divergenzfreiem Weyltensor	21
3.1	Lineare Thermodynamik	22
3.2	Der Fall der erweiterten Thermodynamik	27
3.3	Zusammenstellung der Ergebnisse	30
4	Ideales scherungsfreies Fluid	33
4.1	Einleitende Bemerkungen	33
4.2	Konstruktion eines Basissystems aus geeigneten Vektoren	39
4.3	Ausnutzung der Bilanz- und Zustandsgleichungen	40
4.4	Die Propagationsgleichung der Rotation	43
4.5	Ausnutzung der Identität des Weyltensors	45
4.6	Komponenten der anderen Propagations- und Zwangsgleichungen	48
4.7	Umformung der maxwellartigen Divergenzgleichungen für den magnetischen Anteil des Weyltensors	49

4.8	Umformung der Divergenzgleichung für den elektrischen Anteil des Weyltensors	51
4.9	Betrachtung der Gleichung für die zeitliche Entwicklung des magnetischen Anteils des Weyltensors	52
4.10	Umformung der Gleichung für die zeitliche Entwicklung des elektrischen Anteils des Weyltensors	53
4.11	Weitere Zerlegung und zeitliche Entwicklung der Wärmestromgleichung . .	56
4.12	Weitere Untersuchung der zeitlichen Entwicklung des elektrischen Anteils des Weyltensors	60
5	Der Fall der gradientenfreien Expansion	65
5.1	Folgerungen aus diesem Beweis	71
6	Rotation und Beschleunigung sind orthogonal	73
6.1	Die Zustandsgleichung $p = \alpha\rho$	80
6.2	Folgerungen aus diesen Betrachtungen	92
7	Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse	95
8	Anhang	103
8.1	Beweis einiger Identitäten	103
8.2	Die Umformung höherer kovarianter Ableitungen	105
8.3	Propagation des auf die Rotation angewandten Wellenoperators	107
8.4	Koeffizienten für den senkrechten Fall	109

Kapitel 1

Einleitung

Wie uns die Beobachtung physikalischer Phänomene lehrt, zeigt ein großer Teil dieser Phänomene die Eigenschaft der Rotation. Diese Beobachtung überdeckt einen weiten Bereich an Längenskalen. Mit gewissem Recht können wir bei kleinen Abständen von einer Eigenrotation (Drehimpuls) der Elementarteilchen sprechen und für große Längen zeigen mit Sicherheit Galaxien und Galaxienhaufen diese Eigenschaft. Im dazwischenliegenden Bereich finden wir unter anderem Sterne -insbesondere Weiße Zwerge und Neutronensterne- die mitunter immense Rotationsraten zeigen. Hier werden Systeme behandelt, die durch die Gravitation dominiert sind.

Vom theoretischen Standpunkt aus ergeben sich hieraus zunächst eine Anzahl von Konsequenzen. Deren wichtigste ist, die korrekte Modellierung dieser Phänomene im Rahmen bestehender Theorien zu erstreben. Darüber hinaus stellt sich in Anbetracht der obigen Beobachtungsbefunde die Frage, ob das größte physikalische System -der Kosmos- dieses Phänomen zeigt oder nicht. Dies schließt dann einerseits die Untersuchung von rotierenden Raumzeiten und den daraus resultierenden Beobachtungseigenschaften ein (siehe z.B. [16, 68]), was in weiten Teilen durch rein kinematische Betrachtungen getan werden kann. Andererseits heißt das, dass dynamische Realisierungen im Rahmen einer Gravitationstheorie -hier der Allgemeinen Relativitätstheorie- gefunden werden müssen, die im Einklang mit der Beschreibung der materiellen Quellen und deren thermodynamischen Eigenschaften sind. Die vorliegende Arbeit versucht, einen Beitrag dazu zu liefern, wie derartige Lösungen konstruiert werden können, aber vor allen Dingen auch nicht beschaffen sein können.

Die folgenden Betrachtungen sind auf die Kosmologie beschränkt, was nicht heißt, dass die Folgerungen nicht auch für bestimmte astrophysikalische Modellierungen, wie beispielsweise den Sternkollaps, zutreffend sind.

Seit der Ende der zwanziger Jahre des letzten Jahrhunderts durch Hubble gemachten revolutionären Beobachtung der Fluchtbewegung der Galaxien wissen wir, dass der Kosmos

expandiert. Ein beeindruckendes Nebenprodukt dieser Expansion ist die kosmologische Hintergrundstrahlung. Die Isotropie dieser Strahlung und die Annahme der Homogenität und Isotropie des Kosmos führen uns zur theoretischen Beschreibung dieser Fakten, die in hervorragender Approximation durch die Friedmann-Robertson-Walker Modelle (siehe z. B. [76, 58]) gelingt. Vom kinematischen Standpunkt gesehen ist die Expansion des kosmischen Fluids nur ein Beitrag, denn daneben besteht die Möglichkeit, eine Scherung, eine Rotation und eine Beschleunigung in die Beschreibung dieses Fluids mit einzubeziehen.

In dieser Arbeit werden scherungsfreie Modelle betrachtet. Das hat den mathematischen Vorteil, dass man fünf weitere Bedingungen an die zwölf Freiheitsgrade des Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes hat, welche genutzt werden können, um weitere Betrachtungen der in Frage kommenden Metriken anzustellen [69, 17]. Physikalisch kann dies dadurch motiviert werden, dass eine nicht verschwindende Scherung auf eine nicht isotrope Hintergrundstrahlung führt [27, 30]. Andersherum verlangt die Existenz einer isotropen kosmologischen Hintergrundstrahlung, dass die Raumzeit einen zeitartigen konformen Killingvektor besitzt [78]. Die Forderung der Existenz dieses Feldes führt dann direkt darauf, dass die Raumzeit scherungsfrei ist [18]. Es ist an dieser Stelle angebracht darauf hinzuweisen, dass ein Teil der heutigen Abschätzungen einer möglichen kosmischen Rotation [41, 22, 3, 8, 52] auf Modellen basieren, die Scherung und Rotation beinhalten, wobei beide Größen nicht unabhängig sind, d.h. für verschwindende Scherung ist auch die Rotation gleich Null. Es handelt sich somit um Obergrenzen für die Scherung. Dass die Rotation nicht die Isotropie der Hintergrundstrahlung beeinflussen muss, kann man auch klar der Arbeit [53] entnehmen, welche zeigt, dass es möglich ist, rotierende Modelle mit isotroper Hintergrundstrahlung zu konstruieren. Für einen Überblick über mögliche Beobachtungsbefunde und Beobachtungsmöglichkeiten siehe auch [16, 68, 64].

Historisch gesehen ist die Arbeit von Lanczos [56] aus dem Jahre 1924 zu erwähnen, in der „Grundtypen einer stationären rotationssymmetrischen Weltstruktur als Lösung der Einsteinschen Fundamentalgleichungen“ behandelt werden. In dieser Arbeit sind schon Hinweise auf mögliche Linienelemente rotierender Modelle gegeben, wobei das stationäre Verhalten natürlich nach der Entdeckung der Galaxienflucht, durch Hubble 1929, und deren Erklärung als kosmische Expansion aufgegeben werden muß. Abgeleitet wird auch ein Gesetz der Lichtausbreitung innerhalb der untersuchten Klasse von Metriken, das die Existenz geschlossener Lichtkurven sowie Verstärkungs- und Dämpfungseffekte des Lichtes zeigt.

Einen weiteren Anstoß zur Untersuchung der Rotation des Universums gab Gamov [34] 1946. Dort wird darauf hingewiesen, dass „mysteriöserweise“ alle Kondensationen der Materie rotieren. Dies ist zwar als Folge des Drehimpulses anzusehen, es ist jedoch der Hinweis

enthalten, dass anisotrope Lösungen der einsteinschen Feldgleichungen zur Erklärung des Phänomens beitragen könnten. Als Beobachtungshinweis werden Positionsverschiebungen der Galaxien (-haufen) untereinander genannt (Parallaxeneffekte).

Das erste kosmologische Modell mit Rotation, das die einsteinschen Feldgleichungen löst, stammt von Gödel [37] aus dem Jahre 1949. Das Modell ist stationär, besitzt ein kosmologisches Glied und als Materiemodell dient Staub. Auch enthält es zeitartig geschlossene Kurven. Entsprechende Beobachtungsmöglichkeiten wurden dann in erheblich späteren Arbeiten angegeben (bspw.[59]).

Die weitere Suche nach Lösungen der einsteinschen Feldgleichungen, die Rotation und Expansion verbinden, zeigte, dass die Wahl einfacher Materiemodelle meist nicht möglich ist. Die Wahl des Materiemodells ist bis zum heutigen Tag ein notorisches und schwieriges Problem. Dies führte zum einen zur Zuhilfenahme komplizierter Materiemodelle und zum anderen zu einer Reihe von Theoremen, die die Nichtexistenz von Lösungsklassen beweisen. Letzterer Punkt soll näher beleuchtet werden, ihm widmet sich ein Hauptteil der Arbeit. Im Jahre 1967 bewies Ellis [28], dass scherungsfreie Raumzeiten, deren Feldquelle durch Staub beschrieben wird, nicht gleichzeitig expandieren und rotieren können (Satz von Ellis). Anfang der 70'er Jahre konnten dann Treciokas und Ellis [79] im Rahmen der Betrachtung der relativistischen kinetischen Theorie zeigen, dass für ideale Fluide¹ mit allgemeineren Zustandsgleichungen dies ebenso zutrifft. Es stellte dies wohl den Ausgangspunkt der folgenden Vermutung dar:

Es gibt keine scherungsfreien idealen Fluide mit barotroper Zustandsgleichung $p = p(\rho)$ und $p + \rho \neq 0$, die Lösungen der einsteinschen Feldgleichungen sind und rotieren und expandieren.

Hierin bezeichnen p den Druck und ρ die Energiedichte. Besser bekannt ist diese Vermutung unter der englischen Bezeichnung *Shear-free fluid conjecture (SFC)*.

Diese Vermutung wurde im Laufe der Jahre unter Zuhilfenahme verschiedener Zusatzannahmen bewiesen, wobei einige interessante Spezialfälle gezeigt oder auch nicht bewiesen wurden (näheres Kapitel 4). Ebenso ist es interessant zu bemerken, dass jedoch große Klassen von expandierenden **oder** rotierenden Lösungen existieren. Prominente Vertreter sind gerade der Gödelkosmos als rotierendes, nicht expandierendes Modell und die Friedmann-Robertson-Walker Raumzeiten als expandierende, nicht rotierende Modelle. Insbesondere

¹Unter einem idealen Fluid wird eine Flüssigkeit verstanden, deren Energie-Impuls-Tensor T_{ab} durch eine Energiedichte ρ und einen isotropen Druck p vollständig beschrieben wird, d. h. $T_{ab} = \rho u_a u_b + p h_{ab}$. Wärmeströme und anisotrope Drücke werden dabei vernachlässigt.

heißt das, dass, wenn diese Vermutung richtig ist, es keine „generischen Übergänge“ zwischen diesen Lösungen gibt. Man kann nicht die Friedmann-Robertson-Walker Raumzeiten ein wenig rotieren lassen oder das Gödelmodell ein wenig mit Expansion versehen, um zu ähnlichen Lösungen zu gelangen. Der Übergang verläuft dann nur über die jeweiligen nicht-expandierenden und nichtrotierenden Grenzfälle und ist damit bedeutungslos.

Die Arbeit beginnt in Kapitel 2 mit der Rekapitulation von notwendigen und nützlichen Begriffen, Gleichungen und Erläuterungen dieser. Insbesondere werden „nachdifferenzierte“ Formen der Feldgleichungen abgeleitet und im späteren Verlauf verwendet, um eine möglichst große Ausnutzung der in der riemannschen Geometrie enthaltenen Aussagen zu gewinnen.

Das dritte Kapitel ist der Untersuchung von Raumzeiten mit divergenzfreiem Weyltensor gewidmet. Zusammen mit thermodynamischen Überlegungen zeigt sich, dass derartige Raumzeiten letztendlich auf wenige Lösungsklassen mit speziellen Eigenschaften eingegrenzt werden können. Im Zusammenhang mit dieser Arbeit ist es interessant zu zeigen, dass die Zuhilfenahme von Gleichungen, die die Divergenz des Weyltensors betreffen, nutzbringend bei der Ableitung darüber hinausgehender Eigenschaften sind.

Im vierten Kapitel werden, nach eingehender Einleitung zum Thema, dann die Grundgleichungen im Rahmen der *SFC* bereitgestellt und umgeformt. Es werden unter anderem die allgemeine Darstellung der zeitlichen Änderung der Rotation und der Beschleunigung (Selbstbeschleunigung) abgeleitet. Insbesondere wird bewiesen, dass bestimmte Anteile der Divergenzgleichung des Weyltensors mit den obigen Resultaten identisch erfüllt sind, andere jedoch nicht.

Mit Hilfe dieser Kenntnisse wird dann in Kapitel 5 ein Spezialfall der *SFC* bewiesen, welcher zeigt, dass rotierende Modelle nicht „ein wenig“ expandieren können.

Das sechste Kapitel versucht einen weiteren Spezialfall zu beweisen. Hier werden dann die Grenzen des Verfahrens zu Tage gefördert. In beiden Kapiteln werden dazu die zeitlichen Entwicklungen der Zwangsbedingungen (d.h. entlang des Geschwindigkeitsvektorfeldes) untersucht, wobei zu zeigen ist ob diese Gleichungen als neue Zwangsbedingungen auf das System wirken. Hinzu treten dann die maxwellartigen Feldgleichungen, die ebenfalls als Zwangsbedingungen aufgefasst werden und deren Konsistenz mit den anderen Zwangs- und Evolutionsgleichungen zu prüfen ist. Diese Konsistenz ist notwendig, damit das System involutiv ist und damit auch integrabel (Satz von Frobenius, siehe z.B. [54]). Die Aussagen erhält man dann über einen Widerspruchsbeweis. Man nimmt an, dass die *SFC* für die gesuchte Klasse verletzt ist, d.h. es existieren Raumzeiten mit Rotation, Expansion und Beschleunigung und barotroper Zustandsgleichung. So dann beweist man, dass das resultierende System nicht involutiv ist und somit eine der Voraussetzungen falsch ist,

womit dann die *SFC* bestätigt wurde.

Die Arbeit schließt mit einer Diskussion der Ergebnisse. In einem Appendix sind oft benutzte Identitäten zusammengefasst und bewiesen.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Raumzeit und Krümmungsgrößen

Für die detaillierte und vollständige Beschreibung dieses Themengebietes sei das Buch von Schouten [70] empfohlen.

Die Raumzeit im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie ist eine vierdimensionale Lorentzmannigfaltigkeit. Diese Mannigfaltigkeit M soll zusammenhängend, hausdorff'sch und orientierbar sein. Zusätzlich wird M mit einem kovarianten Tensorfeld zweiter Stufe g ausgestattet. Sei nun $p \in M$, U eine Umgebung von p und bezeichne $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ die kanonischen Basisvektoren von $T_p M$. Dabei seien die x^i die Koordinaten einer Karte von U . Die Komponenten des metrischen Tensors g in einer solchen Karte sind die $g_{ik} = g(\partial_i, \partial_k)$. Mit Hilfe der zu $\{\partial_0, \dots, \partial_3\}$ dualen Basis $\{dx^0, \dots, dx^3\}$ gilt dann $g = g_{ik} dx^i \otimes dx^k$. Das ist der Hintergrund für die Beziehung $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$, in der die dx^i als infinitesimale Koordinatenabstände interpretiert werden können. Die Signatur der Metrik sei in dieser Arbeit zu $+2$ d.h. $(-1, 1, 1, 1)$ gewählt. Weiterhin sei angenommen, dass die Metrik nicht degeneriert ist, d. h. die Determinante des metrischen Tensors soll nicht verschwinden. Es existiert also eine durch $g_{ab} g^{bc} = \delta_a^c$ definierte inverse Metrik. Lateinische Indizes laufen von $0, \dots, 3$ und es gilt die einsteinsche Summationskonvention.

Es ist im allgemeinen natürlich möglich, Mannigfaltigkeiten zu betrachten, auf denen kein metrischer Tensor existiert. Man geht dabei vom Begriff der kovarianten Ableitung aus, die den Vergleich von Vektorfeldern in verschiedenen Punkten der Mannigfaltigkeit gestattet. Unter der Annahme der Linearität und der Leibnitzregel ergibt sich, dass die Konnektion in der gewählten Basis gegeben ist durch $(\partial_b)_{;\partial_a} = \Gamma_{ba}^c \partial_c$. Diese kovariante Ableitung impliziert also ein Konnektionsfeld, welches offensichtlich unabhängig von der Existenz einer Metrik ist. Entsprechende Mannigfaltigkeiten sind dann durch das Konnektionsfeld Γ_{bc}^a beschrieben und werden im Rahmen der Gravitationstheorie als rein affine Theori-

en bezeichnet (siehe z.B. [71]). Man kann auch beide Strukturen zur Charakterisierung der Mannigfaltigkeit einsetzen. Dies führt auf sogenannte metrisch-affine Theorien (siehe z.B. [46]). Die folgenden differentialgeometrischen Größen können daher zum Teil ohne die Existenz eines metrischen Feldes definiert werden. Diese Größen sind der Torsionstensor

$$S^a{}_{bc} = \Gamma^a{}_{[bc]}, \quad (2.1)$$

der Krümmungstensor

$$R^s{}_{bcd} = \Gamma^s{}_{bd,c} - \Gamma^s{}_{bc,d} + \Gamma^s{}_{kc}\Gamma^k{}_{bd} - \Gamma^s{}_{kd}\Gamma^k{}_{bc}, \quad (2.2)$$

und die Nichtmetrizität

$$g_{ik;l} = -Q_{ikl}. \quad (2.3)$$

Man erhält den Krümmungstensor durch den Transport eines Vektorfeldes A_k entlang einer geschlossenen Kurve und vergleicht den Ausgangs- und Endwert. Im nicht-riemannschen Fall existiert ein Schließungsfehler eines Parallelogramms, was für die präzise Definition der Krümmung über die Nichtvertauschbarkeit der zweiten kovarianten Ableitung berücksichtigt werden muss. In der hier betrachteten Allgemeinen Relativitätstheorie, welche im riemannschen Raum operiert, verschwinden die Torsion (2.1) und die Nichtmetrizität (2.3) identisch, d.h. es gilt im riemannschen Raum (Ricci-Identität)

$$A_{a;d;c} - A_{a;c;d} = R_{abcd}A^b = \quad (2.4)$$

$$= g_{as} (\Gamma^s{}_{bd,c} - \Gamma^s{}_{bc,d} + \Gamma^s{}_{kc}\Gamma^k{}_{bd} - \Gamma^s{}_{kd}\Gamma^k{}_{bc}) A^b. \quad (2.5)$$

Darüber hinaus ist die Metrik kovariant konstant (Lemma von Ricci). Das impliziert, dass die verbleibende Konnektion symmetrisch ist (verschwindende Torsion) und dass die Konnektion sich durch die Ableitung des metrischen Tensors darstellen lässt. Die Lösung von $g_{ik;l} = 0$ ergibt

$$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d}). \quad (2.6)$$

Diese Objekte werden nun als Christoffelsymbole bezeichnet. Sie besitzen vierzig unabhängige Komponenten. Hier sind die üblichen Bezeichnungen verwendet worden, d. h. die partielle Ableitung ist $(\cdot)_{,i}$, die kovariante Ableitung ist $(\cdot)_{;i}$, die eckigen Klammern kennzeichnen die Antisymmetrisierung bezüglich der eingeschlossenen Indizes und die runden Klammern die Symmetrisierung bezüglich der eingeschlossenen Indizes (bachsche Klammern). Die Christoffelsymbole sind keine Tensoren. Ihr Transformationsverhalten gegenüber allgemeinen Koordinatentransformationen $dx^{m'} = A_n^{m'} dx^n$ ist bestimmt durch

$$\Gamma_{t'k'}^{m'} = \Gamma_{rs}^n A_n^{m'} A_{t'}^r A_{k'}^s - A_{n,l}^{m'} A_{t'}^l A_{k'}^n.$$

Man kann daraus erkennen, dass durch geeignete Koordinatenwahl die Christoffelsymbole lokal zum Verschwinden gebracht werden können - dies ist, in seiner physikalischen Übersetzung, eine Manifestation des Äquivalenzprinzips.

Aufgrund der Definition des Krümmungstensors und seiner durch den Bezug auf die Christoffelsymbole erzielten Form lassen sich eine Reihe von Symmetrieeigenschaften ableiten, welche die Anzahl der möglichen unabhängigen Komponenten erheblich reduziert und formale Rechnungen vereinfacht (ähnliche, wenn auch kompliziertere Relationen lassen sich auch für allgemeine Räume ableiten). Es gelten folgende Beziehungen¹

$$R_{(ab)cd} = 0, \quad (2.7)$$

$$R_{ab(cd)} = 0, \quad (2.8)$$

$$R_{abcd} = R_{cdab}, \quad (2.9)$$

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adb c} = 0. \quad (2.10)$$

Diese reduzieren die Anzahl der unabhängigen Komponenten im vierdimensionalen Raum auf zwanzig. Aus diesen Symmetrien ergibt sich auch, dass ein bis auf das Vorzeichen eindeutiger, zweistufiger Tensor $R_{bd} := R^a{}_{bad}$ gebildet werden kann, der sogenannte Riccitenor. Dieser ist aufgrund der Eigenschaften des Krümmungstensors automatisch symmetrisch. Der Riccitenor kann weiter zum Ricciskalar kontrahiert werden $R_{ab}g^{ab}R^a{}_a = R$. Man kann also zehn der Komponenten des Krümmungstensors durch den Riccitenor darstellen. Die verbleibenden zehn Komponenten werden durch den Weyltensor (konformer Krümmungstensor) C_{abcd} beschrieben, der alle Symmetrien des Krümmungstensors trägt und spurfrei (alle möglichen Spurbildungen des Krümmungstensors sind in R_{ab} und R enthalten) ist, so dass gilt

$$C_{(ab)cd} = 0, \quad (2.11)$$

$$C_{ab(cd)} = 0, \quad (2.12)$$

$$C_{abcd} = C_{cdab}, \quad (2.13)$$

$$C_{abcd} + C_{acdb} + C_{adb c} = 0, \quad (2.14)$$

$$C^a{}_{bad} = 0. \quad (2.15)$$

¹Die Darstellung der Konnektion durch die Christoffelsymbole ist eine Eigenschaft des riemannschen Raumes, in allgemeineren Fällen treten noch Torsion und Nichtmetrizität hinzu. Die Symmetrien des Krümmungstensors sind in gewissem Sinne ebenso ein Kennzeichen, dass die Geometrie eine riemannsche ist. Die Symmetrie (2.8) folgt zwar für alle Räume definitionsgemäß. Die Symmetrie (2.7) ist aber eine Folge der verschwindenden Nichtmetrizität, wie man durch die Berechnung des schiefssymmetrischen Anteils der zweifachen kovarianten Ableitung der Metrik beweisen kann. Ebenso folgt Gleichung (2.10) aus dem Verschwinden der Torsion - wenn das Parallelogramm nicht geschlossen ist, kann es der Parallelepiped auch nicht sein. Die Einfachheit der Gleichung (2.9) ist dann eine Folge der anderen.

Es gilt dann folgende Darstellung für den Weyltensor

$$C^{ab}{}_{cd} = R^{ab}{}_{cd} - 2g^{[a}{}_{[c}R^{b]}{}_{d]} + \frac{R}{3}g^a{}_{[c}g^b{}_{d]}. \quad (2.16)$$

Zusätzlich zu den algebraischen Eigenschaften gilt noch eine Integrabilitätsbedingung, die im riemannschen Raum die Form

$$R_{ab[cd;e]} = 0 \quad (2.17)$$

annimmt, die sogenannte Bianchi-Identität². Dies sind vierundzwanzig Bedingungsgleichungen, von denen jedoch vier durch Ausnutzung der Symmetrien (2.7) - (2.10) identisch erfüllt sind, so dass zwanzig Bedingungen verbleiben.

Zweifache Kontraktion der Gleichung (2.17) ergibt die bekannte kontrahierte Bianchi-Identität

$$(R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}R)_{;b} = 0. \quad (2.18)$$

Die einfache Kontraktion der Gleichung (2.17) ergibt unter Ausnutzung der Beziehung (2.16) und (2.18)

$$C^{abcd}{}_{;d} = R^{c[a;b]} - \frac{1}{6}g^{c[a}R^{b]}. \quad (2.19)$$

Man kann aus der Gleichung (2.19) eine weitere wichtige Identität ableiten, wenn man die Divergenz bezüglich x^c bildet

$$C^{abcd}{}_{;dc} = R^{c[a;b]}{}_{;c} = R^{c[a}{}_{;c}{}^{b]} + R^{m[a}{}_{;c}{}^{b]}R^c{}_m + R^{mc}{}_{;c}{}^{[b}R^a]{}_m. \quad (2.20)$$

Die rechte Seite der Gleichung verschwindet identisch, so dass man erhält

$$C^{abcd}{}_{;cd} = 0. \quad (2.21)$$

Es sei angemerkt, dass es sich an dieser Stelle um nichts anderes als mathematische Identitäten handelt, deren Nützlichkeit sich bei der Anwendung auf physikalische Fragestellungen zu erweisen hat.

2.2 Kinematische Invarianten

Darüber hinaus sei nun die Raumzeit mit einem zeitartigen Vektorfeld u^a ausgestattet, welches die Normierungsbedingung $u^a u_a = -1$ erfüllt. Somit kann dieses Geschwindigkeitsfeld

²Auch die Bianchi-Identität reflektiert den riemannschen Raum, wie die oben angesprochenen Symmetrien des Krümmungstensor. Die Torsion ist gleich Null.

als die Vierergeschwindigkeit eines mit der Flüssigkeit mitbewegten Beobachters interpretiert werden. Die kovariante Ableitung dieses Geschwindigkeitsfeldes sei folgendermaßen zerlegt (siehe z. B. [76, 29]):

$$\begin{aligned}
u_{i;n} &= \omega_{in} + \sigma_{in} + \frac{\Theta}{3}h_{in} - \dot{u}_i u_n & (2.22) \\
\dot{u}_i &= u_{i;n} u^n & \text{Beschleunigung} \\
\omega_{in} &= u_{[i;n]} + \dot{u}_{[i} u_{n]} & \text{Rotation} \\
\sigma_{in} &= u_{(i;n)} + \dot{u}_{(i} u_{n)} - \frac{\Theta}{3}h_{in} & \text{Scherung} \\
\Theta &= u^i_{;i} & \text{Expansion} \\
h_{in} &= g_{in} + u_i u_n & \text{Projektor,}
\end{aligned}$$

so dass die kinematischen Größen wie gewöhnlich definiert sind. Der antisymmetrische raumartige Anteil mit drei unabhängigen Komponenten bezeichnet die Rotation ω_{ik} , der symmetrische spurfreie Anteil mit fünf unabhängigen Komponenten ist die Scherung σ_{ik} und die Spur bezeichnet die Expansion Θ (eine Komponente). Aus diesen Definitionen erhalten wir folgende Orthogonalitätsrelationen $\omega_{ik}u^k = \sigma_{ik}u^k = h_{ik}u^k = \dot{u}_k u^k = 0$. Die Beschleunigung besitzt drei unabhängige Komponenten. Somit sind unter Berücksichtigung der fundamentalen Beziehung $u_{a;b}u^a = 0$, d.h. die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (vier Gleichungen), alle sechzehn Komponenten des Gradienten von u^a beschrieben worden.

Die so definierten kinematischen Größen beschreiben die Änderungsraten des Strömungsfeldes für einen mitbewegten Beobachter, dessen Bezugssystem nach Fermi-Walker transportiert wird. Ein solches Fermi-Walker Bezugssystem kann über ein System von drei Gyroskopen realisiert werden. Man kann zeigen, dass dies die bestmögliche Realisierung eines nichtrotierenden Bezugssystems ist (siehe z. B. [76]). Da die kinematischen Größen tensoriell definiert sind, handelt es sich um inhärente Eigenschaften der Flüssigkeit, die sich auf deren Vierergeschwindigkeitsfeld beziehen³. Es ist somit sinnvoll durch Angabe der lokalen Größe Θ von expandierenden bzw. nicht expandierenden Raumzeiten zu sprechen (dies gilt auch für die anderen kinematischen Größen). Der Übergang zu anderen Beobachtern ist natürlich möglich und liefert dann zwangsläufig Anteile die den Bewegungszustand des Beobachters betreffen.

Die Einführung weiterer Abkürzungen vereinfacht die folgenden Rechnungen

$$2\omega^2 = \omega_{ab}\omega^{ab}, \quad 2\sigma^2 = \sigma_{ab}\sigma^{ab} \quad \text{und} \quad \dot{u}^2 = \dot{u}_a\dot{u}^a. \quad (2.23)$$

³Die vierdimensional definierten kinematischen Größen besitzen die gewünschten Invarianzeigenschaften gegenüber der allgemeinen Symmetriegruppe der Allgemeinen Relativitätstheorie (vierdimensionale Diffeomorphismengruppe). Dies betrifft natürlich nicht deren dreidimensionalen Projektionen.

Das sind die kinematischen Invarianten für die Rotation, die Scherung und die Beschleunigung. Es ist zudem zweckmäßig, dem Rotationstensor einen (eindeutigen) Rotationsvektor zuzuordnen, so dass

$$\omega^a = \frac{1}{2}\eta^{abcd}u_b\omega_{cd} \Leftrightarrow \omega_{ab} = \eta_{abcd}\omega^c u^d \quad (2.24)$$

gilt. Dieser Rotationsvektor ist aufgrund seiner Definition raumartig $\omega_a u^a = 0$, steht senkrecht auf dem Rotationstensor $\omega_{ik}\omega^k = 0$ und es gilt $\omega^a\omega_a = \omega^2$.

2.3 Feldgleichungen und daraus ableitbare Bedingungen

2.3.1 Feldgleichungen und Energie-Impuls-Bilanz

Es werden nun Raumzeiten betrachtet, die 4-dimensionale Lorentzmannigfaltigkeiten sind und die zusätzliche Struktur eines zeitartigen Vektorfeldes u^a tragen. Das hier eingeführte Verfahren zur Zerlegung der Feldgleichungen und der Bestimmung von Identitäten ist in vielen Teilen analog zu [55, 40, 29, 30, 27].

Die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie ohne kosmologischen Term lauten

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = T_{ab} \quad (2.25)$$

bzw. äquivalent dazu

$$R_{ab} = T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}. \quad (2.26)$$

Hierbei sind die Einheiten so gewählt worden, dass $\kappa = 1$ ist. Aus dem symmetrischen Energie-Impuls-Tensor T_{ab} kann bezüglich des zeitartigen Vektorfeldes u^a folgende Darstellung gewonnen werden

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + p h_{ab} + 2u_{(a} q_{b)} + \pi_{ab}. \quad (2.27)$$

Hierbei bezeichnen $\rho = T_{ab}u^a u^b$ die Energiedichte, $p = 1/3 T_{ab}h^{ab}$ den Druck, $q_a = T_{cb}u^b h^c_a$ den Wärmestrom und $\pi_{ab} = \pi_{ba} = T_{cd}h^c_a h^d_b - p h_{ab}$ den anisotropen Druck. Aus der Definition folgt, dass die Orthogonalitätsbeziehungen $q_a u^a = 0$ und $\pi_{ab}u^a = 0$ gelten sowie $\pi^a_a = 0$ ist. Die Identität (2.18) impliziert für die rechte Seite der einsteinschen Feldgleichungen, dass $T^{ab}{}_{;b} = 0$ gilt. Entsprechend ergeben die Überschiebungen der daraus resultierenden Gleichung unter Verwendung von (2.27) mit u^a

$$0 = \dot{\rho} + (\rho + p)\Theta + q^a{}_{;a} + \dot{u}_a q^a + \sigma_{ab}\pi^{ab} \quad (2.28)$$

die Energiebilanzgleichung und mit $h_a{}^b$

$$0 = \dot{u}_a(\rho + p) + h_a{}^b(p_{;b} + \dot{q}_b + \pi_b{}^c{}_{;c}) + (\omega_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{4}{3}\Theta h_{ab})q^b \quad (2.29)$$

die Impulsbilanzgleichung.

2.3.2 Feldgleichungen und Bianchi-Identität

Darüber hinaus ergibt die Ausnutzung der Gleichung (2.19) unter Verwendung der Feldgleichungen (2.25) (in einmal nachdifferenzierter Form)

$$C^{abcd}{}_{;d} = T^{c[a;b]} - \frac{1}{3}g^{c[a}T^{b]}. \quad (2.30)$$

Dies sind aufgrund der zyklischen Symmetrie von C^{abcd} und da eine weitere Kontraktion wieder zu $T^{ab}{}_{;b} = 0$ führt sechzehn unabhängige Gleichungen. Die Gleichungen (2.30) enthalten, wie die Energie-Impuls-Bilanz-Gleichungen, physikalische Aussagen. Sie beschreiben hier die Bewegung eines Anteils des Gravitationsfeldes (den konformen Anteil) in Abhängigkeit von den Gradienten des Energie-Impuls-Tensors. Die Form der Gleichungen legt es nahe, sie als maxwellartige Feldgleichungen zu bezeichnen.

Man kann diese Gleichungen auch als Bilanzgleichungen für den Fluß des Weylanteils des Gravitationsfeldes ansehen. In suggestiver Form kann man schreiben

$$C^{abcd}{}_{;d} = J^{cab}, \quad (2.31)$$

wobei der Weylanteil des Gravitationsfeldes C^{abcd} als Flußtensor des Gravitationsfeldes interpretiert werden kann und $J^{cab} = T^{c[a;b]} - \frac{1}{3}g^{c[a}T^{b]}$ als Flußproduktion wirkt. Beide Größen (C^{abcd} und J^{cab}) sind offensichtlich Funktionen der auftretenden Basisgrößen (g_{ab} und T_{ab}) und stellen somit konstitutive Gleichungen dar⁴. Als eine konstitutive Gleichung sei im thermodynamischen Sinn eine Beziehung zu sehen, die die auftretenden Basisgrößen verknüpft.⁵ Es ist eine interessante Frage, inwieweit diese Gleichungen mit den im Rahmen der erweiterten Thermodynamik auftretenden Beziehungen (siehe z. B. [61]) zusammenhängen und damit einen grundlegenden Zusammenhang von Thermodynamik und Gravitationstheorie enthalten. An dieser Stelle sei nur auf die formale Ähnlichkeit hingewiesen.

⁴Im strengeren thermodynamischen Kontext spricht man allerdings erst von konstitutiven Gleichungen, nachdem ein Zustandsraum gewählt worden ist [62].

⁵Die Existenz einer derartigen Beziehung ist im Hinblick auf das Äquivalenzprinzip folgerichtig.

Unter Benutzung der Dekomposition des Energie-Impuls-Tensors (2.27) ergibt sich dann aus die Gleichung (2.30)

$$\begin{aligned} C^{abcd}{}_{;d} = & -(\rho^{[a}u^{b]}u^c + \frac{1}{3}\rho_{;d}h^{d[a}g^{b]c} - (\rho + p)(\omega^{ab}u^c - u^{[a}\omega^{b]c} + u^{[a}\sigma^{b]c}) - \\ & - \frac{1}{3}u^{[a}g^{b]c}(\dot{\rho} + (\rho + p)\Theta) + u^c(p^{[a}u^{b]} + (\rho + p)\dot{u}^{[a}u^{b]}) + u^c q^{[b;a]} + \\ & + u^{c;[a}q^{b]} + (\omega^{ba} - \dot{u}^{[b}u^{a]})q^c + u^{[b}q^{c|a]} + \pi^{c[b;a]}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Die detaillierte Untersuchung dieser Gleichungen erfolgt im Abschnitt 2.3.4.

2.3.3 Feldgleichungen und Ricci-Identität, Propagations- und Zwangsgleichungen

Als nächstes sollen nun die Implikationen der Gleichung (2.4) untersucht werden, da dies Propagations- und Zwangsgleichungen liefert. Dies geschieht, indem diese Identität für das Geschwindigkeitsfeld u_a betrachtet wird. Es sind also die verschiedenen Projektionen von

$$u_{a;b;c} - u_{a;c;b} = R_{adcb}u^d \quad (2.33)$$

zu bilden. Durch die Antisymmetrie bezüglich bc und die Wahl von u^a mit drei unabhängigen Komponenten sind dies achtzehn Gleichungen. Wenn es möglich ist, werden für die Riccianteile des Krümmungstensors die Feldgleichungen (2.25) benutzt, so dass aus den mathematischen Identitäten physikalische Gleichungen werden.

Zuerst sollen die Propagationsgleichungen für die Expansion (Raychaudhuri-Gleichung), die Rotation und die Scherung bestimmt werden, welche die zeitliche Änderung der jeweiligen kinematischen Größe in Abhängigkeit von den kinematischen Größen und den Feldquellen beschreiben. Diese lauten mit Hilfe von Gleichung (2.25) wie folgt:

$$\dot{\Theta} = 2(\omega^2 - \sigma^2) + \dot{u}^a{}_{;a} - \frac{1}{3}\Theta^2 - \frac{1}{2}(\rho + 3p) \quad (2.34)$$

$$h_e{}^a h_f{}^b \dot{\omega}_{ab} = -\frac{2}{3}\Theta\omega_{ef} + 2\sigma^d{}_{[e}\omega_{f]d} + h^c{}_{[e}h_{f]}{}^d \dot{u}_{c;d} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} h_e{}^a h_f{}^b \dot{\sigma}_{ab} = & h_e{}^a h_f{}^b \dot{u}_{(a;b)} + \dot{u}_e \dot{u}_f - \omega_e \omega_f - \sigma_{ea} \sigma_f{}^a - \\ & - \frac{2}{3}\Theta\sigma_{ef} + h_{ef} \left(\frac{1}{3}\omega^2 + \frac{2}{3}\sigma^2 - \frac{1}{3}\dot{u}^a{}_{;a} \right) + \frac{1}{2}\pi_{ef} - E_{ef}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Die Gleichung (2.34) folgt aus (2.33) mittels Kontraktion mit $g^{ac}u^b$ - dies ist die Raychaudhuri-Gleichung. Die Propagationsgleichung für die Rotation (2.35) folgt mittels Überschiebung mit $u^b h^a{}_{[e} h^c{}_{f]}$ und besitzt drei unabhängige Komponenten. Die Propagationsgleichung für die Scherung (2.36) folgt durch Überschiebung mit $u^b h^a{}_{(e} h^c{}_{f)}$. Diese Gleichung enthält fünf

unabhängige Komponenten. Der Tensor E_{ab} bezeichnet den (sogenannten) elektrischen Anteil des Weyltensors, der durch⁶

$$E_{ab} = C_{acbd}u^c u^d \quad (2.37)$$

definiert ist. Die Weyltensorsymmetrien ergeben folgende Eigenschaften

$$E_{ab} = E_{(ab)} \quad E_{ab}u^b = 0 \quad E_a{}^a = 0, \quad (2.38)$$

so dass der elektrische Anteil des Weyltensors fünf Komponenten enthält. Die Propagationsgleichungen enthalten neun der in (2.33) enthaltenen achtzehn Gleichungen. Die anderen neun Beziehungen ergeben die sogenannten Zwangs- oder *Constraintgleichungen*.

Durch Überschieben der Gleichung (2.33) mit $g^{ac}h^{eb}$ ergibt sich mit Hilfe der Feldgleichungen (2.25) eine Gleichung für den Wärmestrom

$$\begin{aligned} q_e &= h_{eb}(\omega^{ba}{}_{;a} - \sigma^{ba}{}_{;a} + \frac{2}{3}\Theta^{;b}) + (\omega_e{}^a + \sigma_e{}^a)\dot{u}_a = \\ &= \omega_e{}^a{}_{;a} - \sigma_e{}^a{}_{;a} + \frac{2}{3}(\Theta_{;e} + \dot{\Theta}u_e) - 2u_e(\omega^2 - \sigma^2) + (\omega_e{}^a + \sigma_e{}^a)\dot{u}_a. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dies sind drei unabhängige Gleichungen. In der hydrodynamischen Sichtweise bewirken also alle kinematischen Invarianten einen Wärmestrom, bzw. ein Wärmestrom kann verschiedene kinematische Auswirkungen zeigen. Diese und auch die anderen Zwangsgleichungen zeigen, dass eine Wahl der konstitutiven Gleichung so zu erfolgen hat, dass die Gesetze der riemannschen Geometrie befolgt werden.

Aus Gleichung (2.33) und der Identität (2.10) $R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0$ folgt unter Ausnutzung der Symmetrien des riemannschen Krümmungstensors

$$0 = u_{[a;b;c]} \quad (2.40)$$

und durch Überschieben mit $\eta^{abcd}u_d$ ergibt sich

$$\omega^a{}_{;a} = 2\omega^a\dot{u}_a. \quad (2.41)$$

Diese Gleichung kann als die Bilanzgleichung für die Rotation angesehen werden. Die Rotation ist nur dann erhalten, wenn die Beschleunigung verschwindet oder senkrecht auf der Rotation steht.

Weiterhin lassen sich aus der Gleichung (2.33) durch Überschieben mit $\eta_r{}^{fcd}u_f$ und anschließender Symmetrisierung folgende fünf Gleichungen ableiten

$$\begin{aligned} &C_{abcd}u^b\eta_r{}^{fcd}u_f + C_{rbcd}u^b\eta_a{}^{fcd}u_f = \\ &= 4(\omega_{(a}{}^{d;c} + \sigma_{(a}{}^{d;c})}\eta_r)_{cd}u_f - \frac{8}{3}\Theta u_{(a}\omega_r) + 8\dot{u}_{(a}\omega_r). \end{aligned} \quad (2.42)$$

⁶Die Tensoren E_{ab} und H_{ab} (welcher in Kürze definiert wird) wurden vermutlich zuerst von Matte [60] eingeführt.

Man kann nun den magnetischen Anteil des Weyltensors definieren als

$$H_{ar} = \frac{1}{2} C_{rbcd} \eta_a^{cd} u^b u_f, \quad (2.43)$$

mit den Eigenschaften

$$H_{ab} = H_{(ab)} \quad H_{ab} u^b = 0 \quad H_a^a = 0, \quad (2.44)$$

so dass man (2.42) schreiben kann

$$H_{ar} = (\omega_{(a|d;c|} + \sigma_{(a|d;c|}) \eta_r)^{cd} u_f - \frac{2}{3} \Theta u_{(a} \omega_r) + 2 \dot{u}_{(a} \omega_r), \quad (2.45)$$

bzw. durch Überschieben mit $h_s^a h_t^r$

$$H_{ar} = h_a^s h_r^t (\omega_{(s|d;c|} + \sigma_{(s|d;c|}) \eta_t)^{cd} u_f + 2 \dot{u}_{(a} \omega_r) \quad (2.46)$$

erhält. Der magnetische Anteil des Weyltensors enthält die weiteren fünf Komponenten des Weyltensors, welchen man vollständig durch seinen magnetischen und elektrischen Anteil darstellen kann als

$$C_{ab}{}^{cd} = -8 u_{[a} E_{b]}^{[c} u^{d]} + 4 \delta_{[a}^{[c} E_{b]}^{d]} + 2 \eta_{abpq} u^p H^q{}^{[c} u^{d]} + 2 \eta^{cdrs} u_r H_{s[a} u_{b]}. \quad (2.47)$$

Es wurden somit alle achtzehn Komponenten der Gleichung (2.33) betrachtet, dies führte zu den Propagationsgleichungen (2.34, 2.35, 2.36) und den Zwangsgleichungen (2.39, 2.41, 2.46).

2.3.4 Maxwellartige Feldgleichungen für den Weyltensor

Die Gleichungen (2.32) können mittels der Dekomposition (2.47) als Gleichungen für den elektrischen und magnetischen Anteil des Weyltensors beschrieben werden. Diese Gleichungen zeigen eine bemerkenswerte Analogie zu den Maxwell-Gleichungen des elektromagnetischen Feldes, dies ist bspw. in [30] diskutiert.

Es ergibt sich „ $div E$ “ durch Bildung von $C_{abcd}{}^i{}^d u^b u^c h^{ae}$ zu

$$\begin{aligned} h^{ea} h^{bc} E_{ab;c} + 3 H^{ea} \omega_a - \eta^e{}_{bpq} u^b \sigma^{pd} H^q{}_d &= \frac{1}{3} (\rho_{;b} h^{be} + \Theta q^e) + \\ + \frac{1}{2} ((p_{;a} + \dot{u}_a (\rho + p)) h^{ae} + \dot{q}^e - \dot{u}_a q^a u^e + \dot{u}_c \pi^{ce}) + (\omega^{be} + \sigma^{be}) q_b. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Unter Verwendung der Impulsbilanzgleichung (2.29) kann diese Gleichung umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} h^{ea} h^{bc} E_{ab;c} + 3 H^{ea} \omega_a - \eta^e{}_{bpq} u^b \sigma^{pd} H^q{}_d &= \\ = \frac{1}{3} \rho_{;b} h^{be} + \frac{1}{2} (\sigma^{bc} \pi_{bc} u^e - \pi^{ec}{}_{;c} + \sigma^{eb} q_b + \dot{u}_c \pi^{ce} - 3 \omega^{eb} q_b) - \frac{1}{3} \Theta q^e. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Das sind drei unabhängige Gleichungen.

Die Gleichung für „ $div H$ “ erhält man durch Berechnung von $C_{abcd}{}^d \eta^{elc} u^a u_l$ als

$$\begin{aligned} & h^{ea} h^{bc} H_{ab;c} - 3E^{eb} \omega_b + \sigma_{ca} E^{ba} \eta^{elc} u_l = \\ & = (\rho + p) \omega^e + \frac{1}{2} \eta^e{}_{lcb} u^l (q^{c;b} + (\omega_a{}^b + \sigma_a{}^b) \pi^{ca}), \end{aligned} \quad (2.50)$$

was wiederum drei unabhängige Gleichungen ergibt. Das Analogon zur Gleichung „ \dot{E} “ ist durch die Bestimmung von $C_{abcd}{}^d h_{(f}{}^a h_e) {}^c u^b$ zu berechnen, so dass

$$\begin{aligned} & h^a{}_f h^c{}_e \dot{E}_{ac} + \Theta E_{ef} + \sigma^{bd} E_{bd} h_{ef} - E^b{}_{(e} \omega_{f)b} - 3E^b{}_{(e} \sigma_{f)b} - \\ & - 2H^q{}_{(e} \eta_{f) b p q} u^b \dot{u}^p + h_{a(e} \eta_{f) r s d} u^r H^{s a; d} = \frac{1}{2} (-(\rho + p) \sigma^{ef} - h_a{}^e h_c{}^f q^{(a; e)}) + \\ & + \pi_b{}^{(e} \omega^{f)b} - \pi_b{}^{(e} \sigma^{f)b} - \dot{\pi}^{(ac)} h_a{}^e h_c{}^f) - \frac{1}{6} (h^{ef} (\dot{\rho} + (\rho + p) \Theta) + \Theta \pi^{ef}) - \\ & - \dot{u}^{(e} q^{f)}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

gilt. Unter Verwendung der Energiebilanzgleichung (2.28) erhält man diese Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} & h^a{}_f h^c{}_e \dot{E}_{ac} + \Theta E_{ef} + \sigma^{bd} E_{bd} h_{ef} - E^b{}_{(e} \omega_{f)b} - 3E^b{}_{(e} \sigma_{f)b} - \\ & - 2H^q{}_{(e} \eta_{f) b p q} u^b \dot{u}^p + h_{a(e} \eta_{f) r s d} u^r H^{s a; d} = \frac{1}{2} (-(\rho + p) \sigma^{ef} - h_a{}^e h_c{}^f q^{(a; e)}) + \\ & + \pi_b{}^{(e} \omega^{f)b} - \pi_b{}^{(e} \sigma^{f)b} - \dot{\pi}^{ac} h_a{}^e h_c{}^f) + \frac{1}{6} (q^a{}_{; a} + \dot{u}_a q^a + \sigma_{ab} \pi^{ab}) h^{ef} - \\ & - \dot{u}^{(e} q^{f)}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Man erhält weitere fünf unabhängige Gleichungen.

Die letzte in diesem Kontext entstehende Gleichung ist „ \dot{H} “, die durch Bildung von $C_{abcd}{}^d h^{c(e} \eta^{f) lab} u_l$ lautet:

$$\begin{aligned} & 4\dot{u}_a E_b{}^{(e} \eta^{f) lab} u_l + 2h^{c(e} \eta^{f) lab} u_l E_{cb; a} + 2h^{ea} h^{fb} \dot{H}_{ab} + 2\Theta H^{fe} + \\ & + 2h^{ef} H_{ab} \sigma^{ab} - 2H_d{}^{(e} \omega^{f)d} - 6H^{a(f} \sigma^e) {}_a = \sigma^a{}_{(e} \eta_{f) lab} u^l q^b - 3q_{(e} \omega_{f)} + \\ & + h_{ef} \omega_b q^b + h_{c(e} \eta_{f) lab} u^l \pi^{cb; a}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Das sind wiederum fünf Gleichungen, so dass dies die vollständige Zerlegung des Systems (2.30) darstellt.

Es besteht nun die Fragestellung, inwieweit das System der Energie-Impuls-Bilanzgleichungen (2.28, 2.29), maxwellartigen Gleichungen (2.49, 2.50, 2.52, 2.53), der Propagationsgleichungen (2.34, 2.35, 2.36) und die Zwangsgleichungen (2.39, 2.41, 2.46), dass die

Feldgleichungen in gewissem Maße berücksichtigt, Lösungen der einsteinschen Feldgleichungen beschreibt. In jedem Fall erfüllen alle Lösungen der Feldgleichungen dieses Gleichungssystem. Umgekehrt ist die Situation unklar, siehe z. B. [30]⁷. Durch die offenkundige Verwendung der Feldgleichung ergeben diese Gleichungen in jedem Fall Einschränkungen für mögliche Lösungen und erlauben die direkte Berücksichtigung von kinematischen Bedingungen, Einschränkungen an die Feldquellen oder der konformen Struktur, die an die gesuchten Lösungen gestellt werden können (beispielsweise Scherungsfreiheit, ideale Flüssigkeit, konforme Flachheit). Daher werden in den Kapiteln 3, 5 und 6 diese Gleichungen benutzt, um das Verhalten von möglichen Lösungsklassen der Allgemeinen Relativitätstheorie zu bestimmen.

⁷Im Falle des Newman-Penrose Formalismus [14] gilt ähnliches. Es besteht die Frage, ob alle Lösungen des obigen Systems auch Lösungen der Feldgleichungen sind. Dieses Problem kann hier nicht geklärt werden.

Kapitel 3

Raumzeiten mit divergenzfreiem Weyltensor

In diesem Kapitel werden Raumzeiten mit gegebenen geometrischen Eigenschaften innerhalb verschiedener thermodynamischer Modellierungen untersucht. Es wird gezeigt, dass dies jeweils zu einer starken Einschränkung der möglichen Eigenschaften der Raumzeiten führt.

Für die detailliertere Untersuchung spezieller Modelle (Bianchi I Modelle, bzw. Friedmann-Robertson-Walker Raumzeiten) im Rahmen der erweiterten Thermodynamik sei eine Reihe von Arbeiten kurz genannt. Einen interessanten Ansatz lieferte zunächst die Arbeit [4], welche die Frühphasen von Bianchi I Modellen untersucht. Es zeigte sich, dass eine Teilchenerzeugung zu einer Veränderung der Struktur der Singularität führen kann. Dieser Aspekt wurde in [86, 87] aufgenommen und im Rahmen von Friedmann-Robertson-Walker Raumzeiten betrachtet¹. Die Einführung einer hinreichend großen Teilchenerzeugungsrate führt dann zu einer Vermeidung der Anfangssingularität. Daneben ergibt sich ein stärkeres Anwachsen der Fluktuationen im Vergleich zu Friedmann-Robertson-Walker Raumzeiten ohne Teilchenerzeugung.

Vergleichende Untersuchungen zu unterschiedlichen Auswirkungen von linearer und erweiterter Thermodynamik in der Allgemeinen Relativitätstheorie finden sich in [43, 66], die diese auf Friedmann-Robertson-Walker Raumzeiten bzw. Bianchi I Modellen betrachten. Insbesondere die Arbeit [43] zeigt, dass für Friedmann-Robertson-Walker Modelle die Zustandsgleichung $\rho = -p$ eine natürliche zu sein scheint. Ähnliche Ergebnisse für diese Raumzeiten und diese Zustandsgleichung erlauben eine Interpretation der hinzukommen-

¹Die Symmetrien dieser Raumzeiten läßt neben einer Teilchenerzeugung nur die Einfügung einer zusätzlichen Druckkomponente zu [43].

den Teilchenerzeugung und Druckkomponente als Quelle der Inflation im frühen Kosmos [84].

3.1 Lineare Thermodynamik

In diesem Abschnitt sollen Raumzeiten betrachtet werden, deren Weyltensor divergenzfrei ist, die darüber hinaus noch scherungsfrei sein sollen und den Gesetzen der linearen Thermodynamik genügen (bspw. [63, 39, 76]). Dadurch wird die Lösungsmannigfaltigkeit der einsteinschen Feldgleichungen eingeschränkt. Die Einschränkung auf die lineare Thermodynamik kann als Folge einer eingeschränkten Materialwahl angesehen werden, welche sich im Sinne einer allgemein-relativistischen Gleichgewichtsthermodynamik als auch der kovariant (im riemannschen Raum) geschriebenen speziell-relativistischen linearen Thermodynamik ergibt. Diese Annahmen lauten aus geometrischer bzw. kinematischer Sicht

$$C^{abcd}{}_{;d} = 0 \quad (3.1)$$

$$\sigma_{ab} = 0. \quad (3.2)$$

und aus thermodynamischer Sicht

$$\tilde{p} = -\zeta\Theta \quad (3.3)$$

$$q^a = -\lambda X^a \quad (3.4)$$

$$\pi_{ab} = -2\eta\sigma_{ab}. \quad (3.5)$$

Hier wurden die phänomenologischen Größen der Volumenviskosität ζ , der thermischen Leitfähigkeit λ und der Scherviskosität η sowie der Vektor $X^a = -h^{ab}(\ln\beta)_{;b} + \dot{u}^a$ eingeführt. Weiterhin sind $\beta^{-1} = T$ die Temperatur und $\tilde{p} = p - p^*$ wobei p^* , das thermodynamische Potenzial ist. Es folgt umgehend aus (3.5), dass

$$\sigma_{ab} = \pi_{ab} = 0 \quad (3.6)$$

gilt². Weiterhin ergeben sich eine Reihe von Einschränkungen der Raumzeitstruktur, die im folgenden bewiesen werden.

Damit kann folgender Satz bewiesen werden.

Satz 1 *Für scherungsfreie Raumzeiten mit divergenzfreiem Weyltensor gilt im Rahmen der linearen Thermodynamik:*

- (1) *Derartige Raumzeiten sind nicht rotierend, d.h. $\omega = 0$, oder*
- (2) *der Wärmestrom verschwindet $q = 0$.*

²Es werden generell Fälle bei denen die entsprechenden Koeffizienten verschwinden nicht betrachtet.

Der Beweis des Satzes benutzt insbesondere die maxwellartigen Feldgleichungen.

Beweis 1 *Mit den Voraussetzungen (3.1, 3.2) vereinfachen sich die maxwellartigen Feldgleichungen (2.49, 2.50, 2.52, 2.53) zu*

$$0 = \frac{1}{3}\rho_{;b}h^{be} - \frac{3}{2}\omega^{eb}q_b - \frac{1}{3}\Theta q^e \quad (3.7)$$

$$0 = (\rho + p)\omega^e + \frac{1}{2}\eta^e{}_{lcb}u^l q^{c;b} \quad (3.8)$$

$$0 = -\frac{1}{2}h_a{}^e h_c{}^f q^{(a;c)} + \frac{1}{6}(q^a{}_{;a} + \dot{u}_a q^a)h^{ef} - \dot{u}^{(e} q^{f)} \quad (3.9)$$

$$0 = -3q_{(e}\omega_{f)} + h_{ef}\omega_b q^b \quad (3.10)$$

Angenommen, es existieren ω^a und q^a (diese müssen nicht unabhängig sein), so folgt durch Überschieben von (3.10) mit $\omega^e \omega^f$

$$0 = q_e \omega^e \omega^2. \quad (3.11)$$

Ebenso ergibt sich mittels Überschieben von (3.10) mit $q^e q^f$

$$0 = q^2 \omega_f q^f. \quad (3.12)$$

Weiterhin folgt durch Überschieben von (3.10) mit $q^e \omega^f$

$$0 = (q_e \omega^e)^2 + 3q^2 \omega^2. \quad (3.13)$$

Im Fall, dass q_e und ω_e senkrecht zueinander sind $\omega_e q^e = 0$, ist mit der letzten Gleichungen der Satz bewiesen. Im anderen Fall folgt aus der letzten Gleichung

$$(q_e \omega^e)^2 = -3q^2 \omega^2, \quad (3.14)$$

was in die Gleichungen (3.11) oder (3.12) eingesetzt ergibt

$$q^2 \omega^4 = 0 \quad \text{bzw.} \quad q^4 \omega^2 = 0. \quad (3.15)$$

Somit muss entweder die Rotation oder der Wärmestrom verschwinden. Das beweist den Satz (1).

Durch diesen Satz wird nun im betrachteten Fall Gleichung (3.10) in jedem Fall befriedigt. Man kann die beiden möglichen Konsequenzen separat weiter betrachten. Zuerst sei der Fall betrachtet, dass der Wärmestrom identisch verschwindet, d.h. $q = 0$. Als Folge erhalten wir die Aussage

Satz 2 Ein Fluid, welches die Bedingungen (3.1, 3.2) befriedigt und zudem keinen Wärmestrom besitzt Satz (1, (2)), ist entweder

(1) nichtrotierend $\omega = 0$, für den magnetischen Anteil des Weyltensors gilt $H_{ab} = 0$, der räumliche Gradient der Energiedichte verschwindet, der räumliche Gradient der Expansion ist identisch Null und der raumartige antisymmetrische Anteil der Beschleunigung ist Null.

Oder es gilt

(2) die Zustandsgleichung $\rho = -p$ und es sind keine räumlichen und zeitlichen Änderungen von Energiedichte und Druck vorhanden.

Beweis 2 Die Gleichung (3.8) vereinfacht sich im betrachteten Fall zu

$$0 = (\rho + p)\omega^e, \quad (3.16)$$

so dass entweder Punkt (1) von Satz (2) zutrifft, oder aber Punkt (2) von Satz (2) wahr sein muss.

Darüber hinaus ergeben weitere Betrachtungen zu Punkt (1) die obigen Aussagen. Betrachtet man die Gleichung (2.46), so folgt unter den obigen Bedingungen, dass

$$H_{ab} = 0 \quad (3.17)$$

ist. Weiterhin vereinfacht sich Gleichung (3.7) zu

$$0 = \rho_{;b}h^b_e, \quad (3.18)$$

d. h. der räumliche Gradient der Energiedichte verschwindet. Die Zwangsgleichung des Wärmestroms (2.39) ist nun

$$0 = \Theta_{;e} + \dot{\Theta}u_e,$$

so dass die Projektion auf den räumlichen Anteil

$$0 = h_b^e \Theta_{;e} \quad (3.19)$$

ergibt. Die Bedingungen für die Ableitung des Beschleunigungsfeldes \dot{u}_e folgen direkt aus der Propagationsgleichung für die Rotation (2.35)

$$0 = h^c_e h^d_f \dot{u}_{[c;d]}. \quad (3.20)$$

Dies beendet den Beweis der ersten Teilaussage von Satz (2).

Die weiteren Aussagen des zweiten Punktes des obigen Satzes folgen aus (3.18). Unter Ausnutzung der Zustandsgleichung $\rho = -p$ gilt (3.18) auch für den Druckgradienten (man kann auch Gleichung (2.29) verwenden). Für den zeitlichen Anteil folgt aus (2.28), dass

$$0 = \dot{p} \quad (3.21)$$

und somit auch $\dot{p} = 0$. Dies beendet den Beweis des Satzes.

Es ist bemerkenswert, dass Punkt (2) des vorangegangenen Satzes im Prinzip zu einer kosmologischen Konstante führt.

Man kann nun den ersten Teil von Satz (2) unter der Annahme, dass eine Zustandsgleichung existiert, weiter präzisieren.

Satz 3 *Die in den Aussagen von Satz (1) (1) und Satz (2) (1) enthaltenen Raumzeiten sollen einer Zustandsgleichung $p = p(\rho)$ mit $p' := dp(\rho)/d\rho \neq 0$ genügen. Dann gilt, dass der räumliche Gradient des Druckes verschwindet. Weiterhin gilt, dass entweder*

(1) die Beschleunigung ist identisch Null und der elektrische Anteil des Weyltensors verschwindet,

oder

(2) die Zustandsgleichung ist $\rho = -p$ und die zeitartigen Änderungen von Energiedichte und Druck sind Null.

Beweis 3 *Aus der Zustandsgleichung folgt, dass*

$$p_{,a} = \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dx^a} = p' \rho_{,a} \quad (3.22)$$

gilt, und damit folgt aus Satz (2) Punkt (1) (siehe Gleichung (3.18)), dass auch

$$0 = h_e^b p_{,b} \quad (3.23)$$

ist. Somit ist die erste Aussage bewiesen. Die Aufspaltung in zwei Unterfälle ergibt sich durch die Ausnutzung der Impulsbilanzgleichung (2.29). Mit der Gleichung (3.23) folgt

$$0 = (\rho + p)\dot{u}_e \quad (3.24)$$

und daraus die beiden Unterpunkte des Satzes.

Die Aussage des ersten Punktes, dass der elektrische Anteil des Weyltensors verschwindet, folgt direkt aus der Propagationsgleichung für die Scherung (2.36).

Die Aussage des zweiten Punktes ergibt sich aus der Energiebilanzgleichung (2.28) unter Verwendung von $\rho = -p$. Dies beendet den Beweis.

Wiederum führt der Punkt (2) des Satzes zu einer kosmologischen Konstanten.

Für den anderen offenen Fall von Satz (1) ($\omega = 0$, $q_e \neq 0$) können noch folgende Aussagen gewonnen werden:

Satz 4 *Unter den Voraussetzungen (3.1, 3.2) und der Aussage von Satz (1) Punkt (1) ($\omega = 0$, $q_e \neq 0$) gilt:*

(1) Der magnetische Anteil des Weyltensors H_{ab} verschwindet identisch.

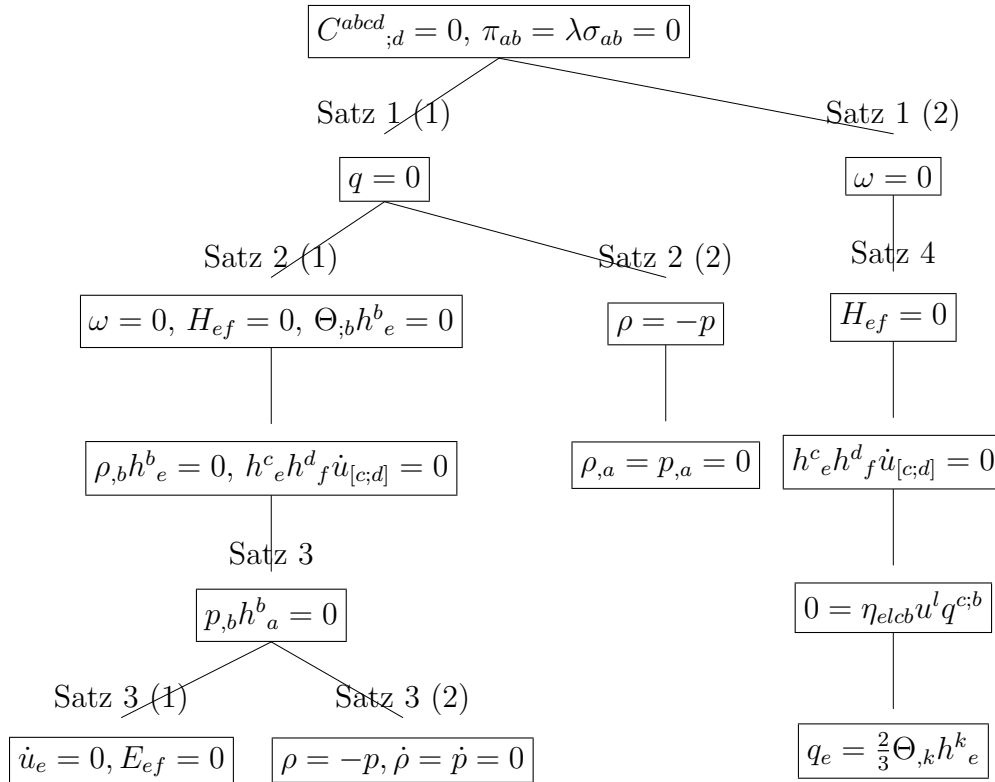


Abbildung 3.1: Diagrammartige Darstellung der Beweisstruktur im Fall der linearen Thermodynamik und der erhaltenen Resultate.

- (2) Der antisymmetrische raumartige Anteil der Ableitung des Beschleunigungsfeldes ist Null.
- (3) Der antisymmetrische raumartige Anteil der Ableitung des Wärmestroms $\eta_{elcb} u^e q^{c;b}$ ist identisch Null.
- (4) Der Wärmestrom hängt direkt vom Gradienten der Expansion ab $q_e = \frac{2}{3} \Theta_{;k} h^k{}_e$.

Beweis 4 Der Punkt (1) folgt direkt aus $\omega_{ik} = \sigma_{ik} = 0$ und der Gleichung (2.46). Die zweite Aussage ergibt sich aus der Propagationsgleichung für die Rotation (2.35) unter Beachtung der Einschränkungen.

Die Punkte (3) und (4) folgen aus der Gleichung (3.8) und der Zwangsgleichung für den Wärmestrom (2.39).

Alle Aussagen sind in der Abbildung 3.1 dargestellt.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, dass die hier betrachteten konform-divergenzfreien, scherungsfreien Raumzeiten, die der linearen Thermodynamik (3.3, 3.4, 3.5) gehorchen, mit der Ausnahme einer möglichen Klasse von Modellen mit der Zustandsgleichung $\rho = -p$, rotationsfrei sind. Zusätzlich verschwinden in der gesamten Raumzeitklasse der magnetische

Anteil des Weyltensors und der antisymmetrische raumartige Anteil des Beschleunigungsfeldes (außer im Fall Satz 2 (2)).

Im Fall der wärmestromfreien Raumzeiten bleiben unter Ausschluss von Modellen mit der Zustandsgleichung $\rho = -p$ nur einfachste Raumzeiten übrig, die vollständig gradientenfrei (bis auf die zeitliche Entwicklung) und nur expandierend und konform-flach sind. Im wesentlichen sind dies die Friedmann-Robertson-Walker-Modelle, welche sich hier nicht durch Annahme der Isotropie und Homogenität ergeben, sondern aus thermodynamisch motivierten Eigenschaften.

Die Klasse der wärmestromtragenden Modelle ist hingegen anisotrop. Es ist jedoch nicht möglich, aus der bis jetzt nicht untersuchten Gleichung (3.9) weitere Schlüsse hinsichtlich des Wärmestroms bzw. der Beschleunigung zu ziehen, die für die hier untersuchten Raumzeiten von Interesse sind.

3.2 Der Fall der erweiterten Thermodynamik

Im vorangegangenen Abschnitt wurden Modelle betrachtet, die scherungsfrei sind und einen divergenzfreien Weyltensor besitzen sollten. Zusätzlich wurden die Gesetze der linearen Thermodynamik verwendet.

Es existieren jedoch eine Reihe von thermodynamischen Theorien, die über diese Ansätze hinausgehen und unter der Bezeichnung erweiterte Thermodynamik zusammengefasst werden können (im Rahmen der Gravitationstheorie siehe z. B. [77, 44, 47, 48]). Exemplarisch sei hier die Untersuchung für den von Stewart [77] entwickelte Ansatz betrachtet. In diesem Fall ergeben sich die Materialgleichungen wie folgt (entsprechen Gleichungen 2.21a,..., 2.21c bei Stewart):

$$\tilde{p} = -\zeta (\Theta + A\dot{\tilde{p}} + \beta^{-1}Lq^a{}_{;a}) \quad (3.25)$$

$$q^a = -\lambda h^{ab} (X_b + B\dot{q}_b + \beta^{-1}(L\tilde{p}_{;b} + K\pi_b{}^c{}_{;c})) \quad (3.26)$$

$$\pi^{ab} = -2\eta \left(h^{c(a}h^{b)d} - \frac{1}{3}h^{ab}h^{cd} \right) (\sigma_{cd} + C\dot{\pi}_{cd} + \beta^{-1}Kq_{d;c}). \quad (3.27)$$

Zusätzlich zu den im vorangegangenen Kapitel eingeführten Größen der Volumenviskosität ζ , der thermischen Leitfähigkeit λ und der Scherviskosität η treten eine Reihe weiterer phänomenologischer Koeffizienten A, B, C, K, L auf.

Strebt man an, wie in Kapitel 3.1, mit den Annahmen der Divergenzfreiheit des Weyltensors und der Scherungsfreiheit die möglichen Raumzeiten einzuschränken, so ist dies nicht möglich, d.h. das verbleibende Gleichungssystem ((3.7,...,3.10) mit den noch vorhandenen

Termen der anisotropen Drücke) und (3.25, ..., 3.27) scheint zu komplex, um entsprechende Aussagen ableiten zu können.

Daher müssen weitere Annahmen gemacht werden. Um einen gewissen Vergleich zu ermöglichen, sei daher

$$\pi_{ab} = 0 \quad (3.28)$$

angenommen (dies konnte in Kapitel 3.1 aus Gleichung (3.6) abgeleitet werden!). Wie in Kapitel 3.1 ergeben sich dann die dort bewiesenen Sätze aus der Untersuchung der maxwellartigen Einsteingleichungen (siehe Diagramm 1).

Darüber hinaus ergeben sich jedoch weitere Möglichkeiten der Einschränkung aus der Untersuchung von Gleichung (3.27) und (3.9). Zuerst soll Gleichung (3.27) betrachtet werden. Es ergibt sich sofort

$$0 = \eta\beta^{-1}K \left(h^{c(a}h^{b)d} - \frac{1}{3}h^{ab}h^{cd} \right) q_{d;c}, \quad (3.29)$$

so dass entweder einer der beiden phänomenologischen Koeffizienten η , K verschwinden muss (dieser Fall soll nicht weiter betrachtet werden) oder die Projektion des Gradienten des Wärmestroms identisch Null ist. Die Umformung dieser Gleichung ergibt

$$0 = q^{(a;b)} + \dot{q}^{(a}u^{b)} - q_d\omega^{d(a}u^{b)} - \frac{1}{3}\Theta q^{(a}u^{b)} - \frac{1}{3}h^{ab}q^d{}_{;d} + \frac{1}{3}h^{ab}q_d\dot{u}^d. \quad (3.30)$$

Für die Raumzeiten des linken Zweiges von Diagramm 1 ist diese Gleichung trivial erfüllt und für den rechten Zweig verschwindet der dritte Term. Andererseits liefert die Umformung von Gleichung (3.9)

$$0 = q^{(a;b)} + \dot{q}^{(a}u^{b)} - q_d\omega^{d(a}u^{b)} - \frac{1}{3}\Theta q^{(a}u^{b)} - \frac{1}{3}h^{ab}q^d{}_{;d} - \frac{1}{3}h^{ab}q_d\dot{u}^d + \dot{u}^a q^b + \dot{u}^b q^a. \quad (3.31)$$

Wiederum ist die Gleichung für den linken Zweig des Diagramms 1 trivial erfüllt und für den rechten Zweig verschwindet der dritte Term. Aus der Differenz beider Gleichungen ergibt sich dann jedoch

$$0 = -\frac{2}{3}\dot{u}^d q_d h^{ab} + \dot{u}^a q^b + \dot{u}^b q^a. \quad (3.32)$$

Daher kann formuliert werden:

Satz 5 *Unter den Voraussetzungen (3.1, 3.2) und (3.28) und der Aussage von Satz (1) Punkt 2 gilt im Falle der erweiterten Thermodynamik:*

- (1) *Die Raumzeiten sind entweder beschleunigungsfrei, oder*
- (2) *der Wärmestrom verschwindet identisch.*

Beweis 5 Die Überschiebung von Gleichung (3.32) mit $q_a q_b$ ergibt

$$0 = \dot{u}_a q^a q^2, \quad (3.33)$$

so dass entweder $q = 0$ oder $\dot{u}_a q^a = 0$ gilt. Es gilt aber auch durch Überschieben von Gleichung (3.32) mit $\dot{u}_a \dot{u}_b$

$$0 = \dot{u}_a q^a \dot{u}^2, \quad (3.34)$$

so dass $\dot{u} = 0$ oder wiederum $\dot{u}_a q^a = 0$ ist. Damit ist der Satz, bis auf den Fall $\dot{u}_a q^a = 0$, gezeigt. Dieser lässt sich ausschliessen durch die Überschiebung von (3.32) mit $\dot{u}_a q^b$, woraus

$$0 = \frac{1}{3}(\dot{u}_a q^a)^2 + q^2 \dot{u}^2 \quad (3.35)$$

folgt, und damit, da der erste Term verschwindet, wiederum $q = 0$ oder $\dot{u} = 0$ gelten muss. Dies beendet den Beweis.

Durch diese Aufspaltung der möglichen Raumzeiten ergeben sich für die Fälle $\dot{u} = 0$ und $q = 0$ weitere Aussagen. Für den beschleunigungsfreien Fall erhält man

Satz 6 Die Raumzeiten, die in Satz 5 (1) charakterisiert sind, sind konform flach.

Beweis 6 Es gilt hier ohnehin, dass $H_{ef} = 0$ ist. Durch Einsetzen von $\dot{u} = 0$ in die Propagationsgleichung für die Scherung (2.36) folgt umgekehrt $E_{ef} = 0$, so dass die Raumzeiten konform flach sind.

Es sei bemerkt, dass noch einige Beziehungen die verbleibende kinematische Größe Expansion und die den Materieinhalt beschreibenden Größen Energiedichte, Druck und Wärmestrom miteinander verbinden.

Für den Fall, in dem der Wärmestrom verschwindet, gilt weiter:

Satz 7 In den Raumzeiten, die mittels Satz 5 (2) beschrieben sind, verschwinden die räumlichen Anteile der Gradienten von Expansion und Energiedichte.

Beweis 7 Beide Aussagen folgen umgekehrt aus der Wärmestromgleichung (2.39) bzw. aus der Gleichung (3.7).

Darüber hinaus kann unter der Voraussetzung einer Zustandsgleichung geschlossen werden:

Satz 8 Die in den Aussagen von Satz (5) (2) und Satz (7) enthaltenen Raumzeiten sollen einer Zustandsgleichung $p = p(\rho)$ mit $p' := dp(\rho)/d\rho \neq 0$ genügen. Dann gilt, dass der räumliche Gradient des Druckes verschwindet. Weiterhin gilt, dass entweder

(1) die Beschleunigung identisch Null ist und der elektrische Anteil des Weyltensors verschwindet (somit ist die Raumzeit konform flach),

oder

(2) die Zustandsgleichung $\rho = -p$ ist und die zeitlichen Änderungen von Energiedichte und Druck Null sind.

Beweis 8 *Der Beweis ist verläuft analog zu dem Beweis von Satz 3 (bzw. Satz 6).*

Alle Aussagen sind in der Abbildung 3.2 dargestellt.

3.3 Zusammenstellung der Ergebnisse

Im vorangehenden Kapitel wurden scherungsfreie Raumzeiten mit divergenzfreiem Weyltensor betrachtet. Diese Raumzeitmodelle wurden dann mit Hilfe der Gesetze der linearen (Abschnitt 3.1) und der erweiterten (Abschnitt 3.2) Thermodynamik eingehend untersucht. Die Zusammenfassung der Ergebnisse ist in den Diagrammen in den entsprechenden Abschnitten dargestellt.

Als ein allgemeines Resultat lässt sich formulieren, dass die gefundenen kinematischen bzw. dynamischen Eigenschaften der möglichen Raumzeiten stark eingeschränkt werden. Interessant ist dabei der Punkt, dass die erweiterte Thermodynamik unter gleichen Voraussetzungen (d.h. $C^{abcd}_{;d} = 0$, $\pi_{ab} = \sigma_{ab} = 0$) zu genaueren Aussagen über die mögliche Raumzeitstruktur führt. Insbesondere in diesem Fall verbleiben fast nur Raumzeiten, die isotrop sind und/oder eine fest definierte Zustandsgleichung besitzen (im Prinzip die der kosmologischen Konstanten, die durch $\rho = -p$ gekennzeichnet ist, siehe z. B. [36]). Wenn man von diesem Fall absieht, so führt die erweiterte Thermodynamik unter den genannten Voraussetzungen zu Raumzeiten, die konform flach $C_{abcd} = 0$ und beschleunigungsfrei sind $\dot{u}^e = 0$. Für Raumzeiten mit der Zustandsgleichung $\rho = -p$ konnten die in [43] und [84] gefundenen Ergebnisse bestätigt und erweitert werden.

Wenn man annimmt, dass die in Abschnitt 2.3.2 gemachte Bemerkung zutreffend ist und die hier betrachteten Raumzeiten aufgrund des Verschwindens der Flußproduktionsterme J^{abc} Gleichgewichtskonfigurationen darstellen, so gelangt man zu dem durchaus befriedigendem Ergebnis, dass das kinematische und materielle Verhalten der möglichen Lösungen sehr homogenisiert und isotropisiert ist. Dies widerspricht zumindest nicht der Anschauung von Gleichgewichtszuständen.

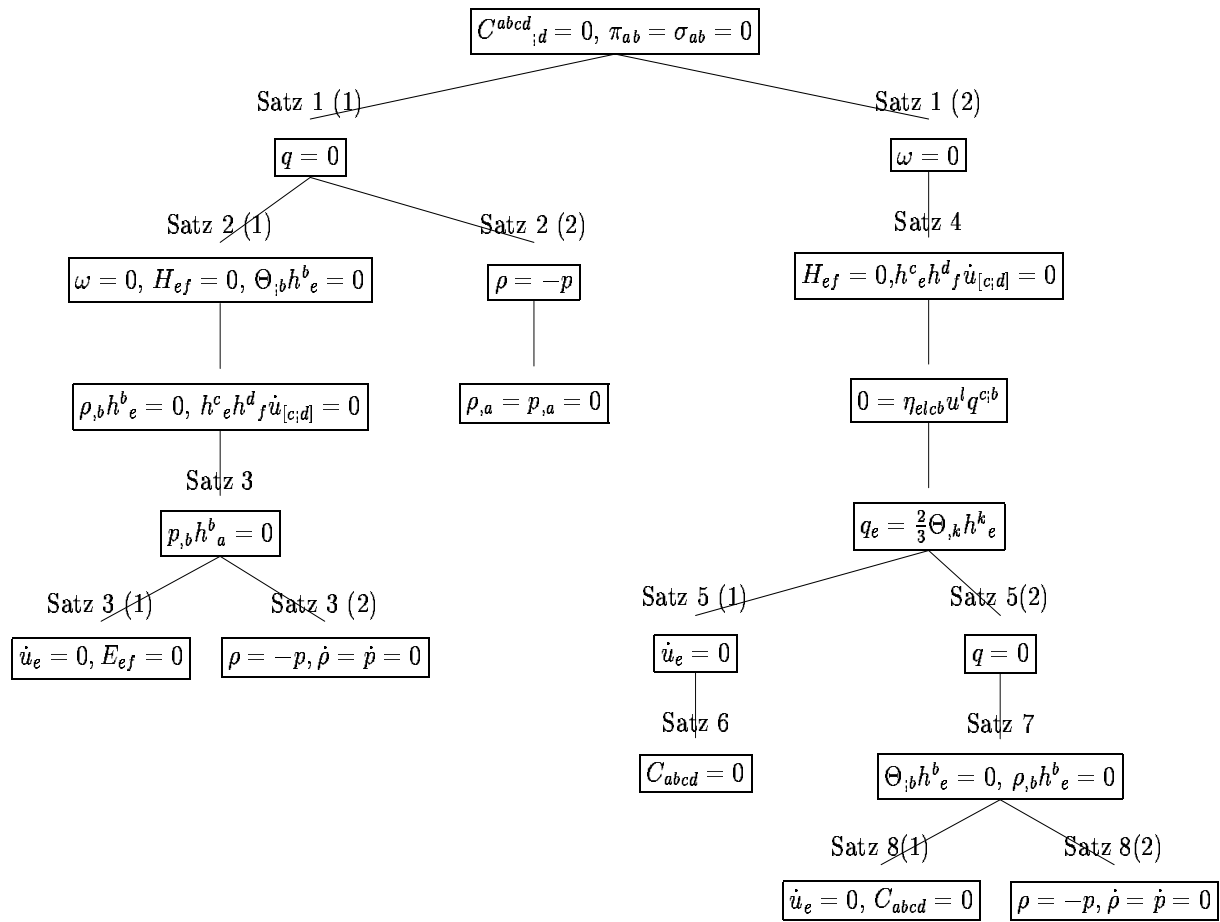


Abbildung 3.2: Diagrammartige Darstellung der Beweisstruktur im Fall der erweiterten Thermodynamik und der erhaltenen Resultate.

Kapitel 4

Ideales scherungsfreies Fluid

4.1 Einleitende Bemerkungen

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird es um die in der Einleitung eingeführte *SFC* gehen. Im vorangegangenen Kapitel wurden Aussagen über Raumzeiten mit verschwindender Divergenz des Weyltensors abgeleitet und daraus Weiteres für deren mögliche Struktur geschlossen, welche sich meist als sehr einfach herausstellte. Neben diesen Resultaten offenbarte sich die Nützlichkeit der maxwellartigen Feldgleichungen. Man wird sehen, dass diese auch für die *SFC* nützlich sind. Dies sei an einem einfachen Beispiel für scherungsfreie ideale Fluide demonstriert. So unterliegen auch Raumzeiten mit divergenzfreiem Weyltensor der *SFC*. Deutlich wird das an der Gleichung (2.50) (diese ist ein Anteil der Gleichung (2.32)), die im hier interessierenden Fall die Form

$$h^{ea}h^{bc}H_{ab;c} - 3E^{eb}\omega_b = (\rho + p)\omega^e \quad (4.1)$$

annimmt. Im Fall, dass

$$h^{ea}h^{bc}H_{ab;c} - 3E^{eb}\omega_b = 0 \quad (4.2)$$

gilt, folgt somit, dass $\rho + p = 0$ oder aber $\omega = 0$ gelten muss. Damit ist eine notwendige Bedingung für die Existenz von Lösungen, die der *SFC* widersprechen, dass

$$h^{ea}h^{bc}H_{ab;c} - 3E^{eb}\omega_b \neq 0 \quad (4.3)$$

ist. Es ist nicht verwunderlich, dass unter Einschränkungen der konformen Struktur der Raumzeit die Gleichungen (2.32) nutzbringend werden. Es wird sich aber in Kapitel 5 herausstellen, dass dies auch für eine a priori nicht festgelegte konforme Struktur der Fall ist.

Zunächst sollen nun die bis heute unternommenen Versuche besprochen werden, die *SFC* zu beweisen. Es lohnt sich hier wiederum auf Gödel hinzuweisen, der kurz nach der rotierenden Lösung [37] über Resultate bei der Untersuchung von rotierenden, expandierenden Lösungen berichtete [38]. Er kam - ohne den Beweis anzugeben - zu dem Ergebnis, dass räumlich homogene Bianchi-IX Staubmodelle, die scherungsfrei sind und expandieren, nicht rotieren können.

Dieses Resultat konnte 1957 von Schücking [72] auf alle räumlich homogenen Staubmodelle (Bianchi-Modelle) erweitert werden. Ein überraschendes Resultat wurde dann 1959 von Heckmann und Schücking [45] abgeleitet, die zeigten, dass räumlich homogene Staubmodelle in der newtonschen Kosmologie existieren. Banerji [2] bewies 1968 unter Ausnutzung einer linearen Zustandsgleichung $p = \alpha\rho$ mit $\alpha > 0$ und $\alpha \neq 1/9$, dass keine räumlich homogenen, scherungsfreien Raumzeiten mit Rotation und Expansion existieren.

Unter Zuhilfenahme der maxwellartigen Gleichungen für E_{ab} und H_{ab} zeigte Ellis 1971 [29], dass konformflache Fluidraumzeiten, d.h. $C_{abcd} = 0$, sowohl scherungsfrei als auch rotations- und beschleunigungsfrei sind.¹

Treciokas und Ellis [79] bewiesen im gleichen Jahr mit Hilfe der relativistischen kinetischen Theorie für eine isotrope Teilchenverteilungsfunktion, dass der Energie-Impuls-Tensor die Form des idealen Fluids besitzt. Darüber hinaus zeigten sie, dass die Lösungen dieses Einstein-Boltzmann-Systems scherungsfrei sind und die Bedingung $\Theta\omega = 0$ befriedigen. Wie in Kapitel 1 bemerkt wurde, war das wohl der Ausgangspunkt der *SFC*. Hier wurden auch der Fall der inkohärenten Strahlung $p = \frac{1}{3}\rho$ und der eines idealen Fluids mit der Zusatzbedingung $\dot{r} = f(r)$ mit $r = \exp(\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho+p})$ („Beschleunigungspotenzial“), wobei $f \in C^\infty$ und $p_0 = p(\rho_0)$ sein soll, bewiesen.

King und Ellis [49] gelang der Beweis, dass für scherungsfreie, räumlich homogene Fluidraumzeiten mit $\rho+p > 0$ immer $\Theta\omega = 0$ gilt. Dies wurde von White [82] noch verallgemeinert auf $\rho+p \neq 0$. Somit ist die *SFC* für alle räumlich homogenen Raumzeiten bewiesen, außer für den Fall $\rho+p = 0$, worauf zurückzukommen sein wird.

Neben dem bis jetzt gemachten Einschränkungen an die Materie bzw. die Geometrie (räumliche Homogenität, Weyltensor) kann natürlich die Kinematik eingeschränkt werden. Die erste Arbeit in diesem Rahmen wurde von White und Collins [83, 24] vorgelegt, welche zeigt, dass für verschwindende Beschleunigung $\dot{u}^a = 0$ (das Fluid ist geodätisch) und für $\dot{u}^a \parallel \omega^a$ die *SFC* gilt.

Collins [19] bewies ebenfalls 1984, dass die *SFC* auch für Raumzeiten mit $H_{ab} = 0$ gilt. Er zeigte, dass alle Rotationslösungen mit $H_{ab} = 0$ nicht expandieren, der bekannteste

¹Im gewissen Sinne sind die in Kapitel 4 erzielten Ergebnisse eine Erweiterung dieser Aussagen.

Vertreter dieser Klasse ist wohl das Gödelmodell [37]².

Einer Idee von Bonner und Ellis [5] folgend, welche als eine Bedingung für die beobachtbare Homogenität des Raumes vorgeschlagen hatten, dass $\Theta = \Theta(\rho)$ sein soll, bewiesen Lang und Collins [57, 21] die *SFC* für diese Abhängigkeit der Expansion.

Weitere Beweise der *SFC* wurden für Einschränkungen an die konforme Struktur der Raumzeit vorgelegt. So zeigte 1987 Carminati [9, 10], dass jede ideale Fluidlösung vom Petrov-Typ N mit $p = p(\rho)$ und $p + \rho \neq 0$ auf Lösungen mit $\omega \neq 0$ und $\Theta = 0$ führt³. Ebenso zeigte Carminati 1990 [11] die *SFC* für Petrov-Typ III Raumzeiten, welche bestimmte Ausrichtungen von u^a , \dot{u}^a und den *principle null directions* (Hauptnullrichtungen) des Weyltensors besitzen. Im Jahre 1996 erweiterten Carminati und Cyganowski [12] dieses Ergebnis auf Petrov-Typ III Raumzeiten, die der Nebenbedingung $9\ddot{p}(\rho + p) - 18\dot{p}^2 + 2 \neq 0$ genügen und letztendlich gelang der Beweis für alle Petrov-Typ III Raumzeiten [13]. Wie kaum anders zu erwarten, sind dies die beiden einfachsten Petrov-Typen mit einer vierfachen, bzw. einer einfachen und einer dreifachen *principle null direction*. Diese Arbeiten benutzten erstmals den Newman-Penrose-Formalismus zur Beweisführung, was in Anbetracht der Annahmen nicht erstaunlich ist.

Coley [18] zeigte 1991, dass ideale Fluide mit $\rho + p \neq 0$, die ein konformes Killingvektorfeld besitzen, welches parallel zum Geschwindigkeitsfeld ist, der *SFC* entsprechen⁴. Insbesondere sind für einen verschwindenden konformen Faktor die Raumzeiten nicht expandierend und nicht rotierend⁵.

Im Jahre 1996 wurden eine Reihe der bereits bewiesenen Spezialfälle durch Sopuerta [75] in koordinaten- bzw. tetradenfreier Version behandelt. Die Beweise laufen hier über die direkte Untersuchung kovarianter Größen. Ein Teil dieser Beweise ist in kovarianter Form in [73] formuliert. Hierbei wird die *SFC* für die Spezialfälle $\dot{u}^a = 0$ und $\dot{u}^a \parallel \omega^a$ erneut bewiesen. Von besonderem Interesse ist bei dieser Arbeit auch, dass erneut auf den newtonschen Fall eingegangen wird und warum sich die *SFC* nicht auf den newtonschen Fall überträgt⁶.

²Für eine Diskussion der bis dahin bekannten Fälle der *SFC* und in deren Umgebung bekannter Lösungen siehe Collins [23].

³In diesem Fall stehen Rotationsvektorfeld und Beschleunigungsvektorfeld senkrecht zueinander.

⁴Es sei an die Arbeit von Tauber und Weinberg [78] erinnert, die besagte, dass solche Raumzeiten hintergrundstrahlungsisotrop sind.

⁵Im Anhang der Arbeit [18] wurde der Beweis von Treciokas und Ellis [79] auf die Zustandsgleichung $\rho - 3p = \text{const}$ verallgemeinert.

⁶Auch hier zeigt sich die Eigenart der Allgemeinen Relativitätstheorie, dass die Zeit eine dynamische Größe ist, welches hier im Gegensatz zur absoluten newtonschen Zeit ist. In schwächerer Form ist dies auch für das Verhältnis der Allgemeinen Relativitätstheorie zur Quantenmechanik/Quantenfeldtheorie charakteristisch. In letzteren ist die Zeit auch ein „äußerer Parameter“, der nicht der Dynamik der Zustände unterworfen ist.

Weitere Ergebnisse aus [75] sind in [74] wiedergegeben, zum einen der Fall $\Theta = \Theta(\rho)$ und der Fall $\Theta = \Theta(\omega)$.

Für die Zustandsgleichungen $\rho + 3p = \text{const}$ und $p - 1/9\rho = \text{const}$ zeigte Van den Bergh [81] in Verallgemeinerung der Arbeit [2] auf räumlich nicht homogene Raumzeiten die *SFC* mittels spezieller orthonormaler Tetraden und den Einsatz von Computeralgebrasystemen. Der letzte Beitrag zu diesem Problem stammt von Cyganowski und Carminati [25], welche zeigten, dass gravito-magnetische Raumzeiten mit $E_{ab} = 0$ die *SFC* erfüllen. Das schließt den Spielraum, der von Ellis [29] ($C_{abcd} = 0$) und Collins [83] ($H_{ab} = 0$) gelassen wurde. Der Beweis beruht auf der schon von Trümper [80] gefundenen Aussage, dass scherungsfreie gravitomagnetische Raumzeiten rotieren müssen, was auch aus der Betrachtung von Gleichung (2.46) deutlich wird. Sie bewiesen also, dass diese rotierenden Raumzeiten für ein ideales Fluid mit $E_{ab} = 0$ expansionsfrei sind. Ebenso konnten sie das Ergebnis von Van den Bergh [81] für die Zustandsgleichung $\rho + 3p = 0$ bestätigen.

Es ist zu bemerken, dass bis Anfang der 70'er Jahre hauptsächlich ein Koordinatenformalismus in Eigenzeitdarstellung verwendet wurde und die kinematischen Größen direkt über die Ableitung der Metrik eingeführt wurden.

Nach der Entwicklung der allgemeinen hydrodynamischen Schreibweise wurde diese beziehungsweise deren Umformulierung in spezielle orthonormale Tetraden und insbesondere auch Null-Tetraden im Newman-Penrose-Formalismus [14] benutzt. Vor allen Dingen Soper [75] verwendet seit Mitte der 90'er Jahre einen sogenannten kovarianten Formalismus, welcher direkt mit den kinematischen Größen arbeitet.⁷

Es existiert also eine ganze Reihe von Sätzen, die unter gewissen zusätzlichen Annahmen die *SFC* bestätigen, diese sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst⁸.

⁷Diese Bezeichnung ist insofern irreführend, als die anderen Methoden auch kovariant gültige Resultate liefern, jedoch in speziellen Koordinaten- bzw. Tetradensystemen rechnen.

⁸Diese Übersicht ist abgesehen von einigen Ergänzungen der Arbeit von Klich [50] entnommen, in der sich auch eine sorgfältige Reproduktion einiger obengenannter Beweise finden. Für eine Motivation der kovarianten Beweisführung siehe auch [73] S. 391 und Fußnote.

Jahr	Spezialfall	Autor(en)	Beweisform
<i>als räumlich homogenes Fluidmodell</i>			
1950	$p = 0$, Bianchi-Typ IX	Gödel [38]	Koordinaten
1957	$p = 0$	Schücking [72]	Koordinaten
1968	$p = \alpha\rho$, ($0 < \alpha \neq 1/9$)	Banerji [2]	Koordinaten
1973	$p + \rho > 0$	King und Ellis [49]	ONT*
<i>als abgeschlossenes Materiemodell</i>			
1967	$p = 0$	Ellis [28]	ONT*
1971	$p = \rho/3$	Treciokas und Ellis [79]	Koordinaten
<i>als Fluidmodell</i>			
1971	$C_{abcd} = 0$	Ellis [29]	kovariant
1971	$\dot{r} = f(r)$ mit $r = \exp(\int_{p_0}^p d\tilde{p}/(\rho + \tilde{p}))$	Treciokas und Ellis [79]	Koordinaten
1984	$\dot{u}^a = 0$ und $\dot{u}^a \parallel \omega^a$	White und Collins [83, 24]	ONT*
1984	$H_{ab} = 0$	Collins [19]	ONT*
1987	Petrow-Typ N	Carminati [9, 10]	NullT**
1988	$\theta = \theta(\rho)$	Lang und Collins [57, 21]	ONT*
1990/ 96/97	Petrow-Typ III	Carminati und Cyganowski [11, 12, 13]	NullT**
1991	konformes Killing- vektorfeld $\xi^a \parallel u^a$	Coley [18]	Koordinaten
1996	$\dot{u}^a = 0$ und $\dot{u}^a \parallel \omega^a$	Senovilla, Sopena und Szekeres [73]	kovariant
1998	$\theta = \theta(\omega)$	Sopena [74]	kovariant
1999	$\rho + 3p = \text{const}$ und $\rho - 9p = \text{const}$	Van den Bergh [81]	ONT*
2000	$E_{ab} = 0$	Cyganowski und Carminati [25]	NullT**

* Orthonormal-Tetraden

** Null-Tetraden im Newman-Penrose-Formalismus

Andererseits sei auf das folgende Resultat verwiesen, welches zusammen mit Obukhov und Scherfner erzielt wurde [65] und eine rotierende Verallgemeinerung des DeSitter Kosmos darstellt. Es handelt sich dabei um ein scherungsfreies, expandierendes und rotierendes Weltmodell, dessen Feldquelle der kosmologische Term Λ ist. Da man die kosmologische Konstante immer als eine ideale Flüssigkeit mit der Zustandsgleichung $p = -\rho$ auffassen kann⁹, existiert damit ein Modell, welches explizit zeigt, dass diese Vermutung für derartige Zustandsgleichungen nicht zutrifft. Weiterhin sei angemerkt, dass dieses Modell zur Klasse der konformstationären Bianchi IX-Modelle gehört und damit auch die oben besprochenen Spezialfälle [18, 49, 82], für die die Vermutung bestätigt ist, eingrenzt. Die Existenz dieser Lösung läßt zumindest Zweifel an der Allgemeingültigkeit der *SFC* aufkommen.¹⁰

Daher wird in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels versucht, zunächst allgemeine Aussagen über scherungsfreie ideale Fluide abzuleiten. Im Abschnitt 4.2 wird zunächst ein System von geeigneten Basisvektoren konstruiert, mit welchem die zur Verfügung stehenden Gleichungen in kovarianter Form untersucht werden können. Im darauffolgenden Abschnitt werden unter Verwendung der Bilanz- und Zustandsgleichungen Eigenschaften der Ableitung des Beschleunigungsfeldes hergeleitet, welche als notwendige Bedingungen für mögliche Lösungen anzusehen sind. In Abschnitt 4.4 werden die Propagationsgleichungen der Rotation untersucht und mit denen des vorangegangenen Abschnittes verarbeitet. Dies führt zu Aussagen über die Rotationsdichte für die hier untersuchten Raumzeiten und gestattet die Ableitung von Darstellungen für die zeitliche Entwicklung der Rotation. Im Abschnitt 4.5 werden aus einer Identität des Weyltensors Zusammenhänge zwischen dem Selbstbeschleunigungsfeld \ddot{u}^a und den Gradienten der Expansion abgeleitet. In 4.6 werden die verbliebenen Propagations- und Zwangsgleichungen zusammengefasst und wenn möglich bezüglich der Basisvektorfelder zerlegt. In den Abschnitten 4.7/4.8 werden die Divergenzanteile der maxwellartigen Einsteingleichungen bezüglich der Basisvektoren zerlegt und neue Zwangsgleichungen abgeleitet. Im folgenden Abschnitt wird die zeitliche Entwicklung des magnetischen Anteils des Weyltensors untersucht. Es wird bewiesen, dass diese für die bereits gefundenen Zwangsbedingungen immer identisch erfüllt ist. Die Untersuchung der zeitlichen Entwicklung des elektrischen Anteils des Weyltensors in 4.10 liefert hingegen neue Zwangsgleichungen, diese enthalten eine Anzahl „unangenehmer“ Terme. Deren geeignete Darstellung ist dann in Kapitel 4.11 beschreiben, so dass in 4.12 eine benutzbare

⁹Betrachtet man $T_{ab} = \rho u_a u_b + p h_{ab} = \rho u_a u_b + p(g_{ab} + u_a u_b)$ wenn $p = -\rho$ ist, so kann man auch schreiben $T_{ab} = p g_{ab}$. Dieser Term verhält sich dann wie eine kosmologische Konstante Λ .

¹⁰Diese Modelle können auf die inflationäre Kosmologie ausgedehnt werden. Hier wird die Feldquelle als ein zeitabhängiges Skalarfeld angesetzt. Da dies, wie von [31] gezeigt wurde, ebenso als eine ideale Flüssigkeit mit der Zustandsgleichung $\rho = -p$ aufgefasst werden kann, existiert dort eine große Anzahl verschiedener Lösungen.

Form der verbliebenen maxwellartigen Gleichungen gegeben wird.

Die folgenden Aussagen basieren ausschließlich auf den in Kapitel 2 gewonnenen Aussagen, die auf den hier betrachteten Spezialfall angewandt werden. Es sind somit alles notwendige Aussagen, die etwaige Lösungen erfüllen müssen.

4.2 Konstruktion eines Basissystems aus geeigneten Vektoren

Um eine auswertbare Formulierung der im Kapitel 2 abgeleiteten Beziehungen zu erhalten ist es notwendig, ein geeignetes Basissystem von Vektoren zu konstruieren.

Offensichtlich ist dabei die Benutzung von u^e als zeitartigen Vektor. Fast ebenso zwangsläufig ergeben sich zwei raumartige Vektoren und zwar die Rotation ω^e und die Beschleunigung \dot{u}^e . Beide sind durch die Gleichung (2.41) gekoppelt und nicht zwangsläufig orthogonal. Man kann jedoch annehmen, dass beide ungleich Null sind, da sonst die angestrebte Lösungsklasse verlassen wird. Im Falle der Rotation ist dies offensichtlich und für den Fall, dass Beschleunigung und Rotation parallel sind, ist dies bereits in [83, 24] gezeigt worden. Der dritte raumartige Vektor kann folgendermaßen konstruiert werden.

Die Wärmestromgleichung (2.39) nimmt im betrachteten Fall ($q_e = 0$) die Form

$$0 = \omega_e^a{}_{;a} + \frac{2}{3}(\Theta_{;e} + \dot{\Theta}u_e) - 2u_e\omega^2 + \omega_e^a\dot{u}_a \quad (4.4)$$

an. Aus dieser Gleichung folgt durch Überschieben mit ω^e

$$0 = \omega^e(\omega_e^a{}_{;a} + \frac{2}{3}\Theta_{;e}) \quad (4.5)$$

und durch Überschieben mit \dot{u}^e

$$0 = \dot{u}^e(\omega_e^a{}_{;a} + \frac{2}{3}\Theta_{;e}). \quad (4.6)$$

Der Vektor $b_e := \omega_e^a{}_{;a} + \frac{2}{3}\Theta_{;e}$ kann als dritter raumartiger Vektor benutzt werden, dazu ist allerdings noch die Projektion in den zu u^a orthogonalen Raum durchzuführen

$$\tilde{A}_e := h_e^k b_k = \omega_e^a{}_{;a} + \frac{2}{3}\Theta_{;e} + u_e(-2\omega^2 + \frac{2}{3}\dot{\Theta}). \quad (4.7)$$

Diese Gleichung kann unter Ausnutzung der Gleichung (4.4) vereinfacht werden und man erhält

$$A_e = \omega_{ea}\dot{u}^a, \quad (4.8)$$

mit der Eigenschaft, dass

$$A^2 = A_e A^e = \omega_{ea} \dot{u}^a \omega^{eb} \dot{u}_b = -(\omega_a \omega^b - \omega^2 h_a^b) \dot{u}^a \dot{u}_b = \omega^2 \dot{u}^2 - (\omega_a \dot{u}^a)^2 \quad (4.9)$$

ist (im 2. Schritt wurde die Identität (8.8) verwendet)¹¹.

Die Gleichungen (4.5) und (4.6) können natürlich noch anders erfüllt werden. Dies führt allerdings aus der angestrebten Lösungsklasse, d. h. scherungsfreie ideale Fluide mit Rotation und Expansion, heraus. Offensichtlich ist dies für $\omega^e = 0$ oder $\dot{u}^e = 0$ oder $\omega^e \parallel \dot{u}^e$ der Fall (aufgrund der Beweise von Collins und White [83, 24]). Die verbleibende Variante $\omega_e^a{}_{;a} + \frac{2}{3}\Theta_{;e} = 0$ ergibt mit (4.4) die Bedingung

$$0 = \frac{2}{3}\dot{\Theta}u_e - 2u_e\omega^2 + \omega_{ea}\dot{u}^a. \quad (4.10)$$

Überschieben dieser Gleichung mit u^e liefert:

$$\dot{\Theta} = 3\omega^2, \quad (4.11)$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_{ea}\dot{u}^a = A_e \Leftrightarrow 0 = \eta^{abc}\omega_b u_c \dot{u}_a \\ \Rightarrow \omega^e \parallel \dot{u}^e \quad \vee \quad \omega^e &= 0 \quad \vee \quad \dot{u}_e = 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

so dass wiederum die zu untersuchende Lösungsklasse verlassen wird.

Man hat also ein geeignetes Basissystem gefunden, welches aus den raumartigen Vektoren A^e, ω^e, \dot{u}^e und dem zeitartigen Vektor u^e besteht. Diese Basisvektoren erfüllen die folgenden Orthogonalitätsrelationen

$$u_e A^e = u_e \omega^e = u_e \dot{u}^e = A_e \omega^e = \dot{u}_e A^e = 0, \quad (4.13)$$

was trivial zu zeigen ist.

4.3 Ausnutzung der Bilanz- und Zustandsgleichungen

Die Energie- (2.28) und Impulsbilanzgleichungen (2.29) nehmen im betrachteten Fall die Form

$$0 = \dot{\rho} + (\rho + p)\Theta \quad (4.14)$$

$$0 = \dot{u}_a(\rho + p) + h_a^b p_{;b} \quad (4.15)$$

¹¹Dieser Vektor A^a entspricht dem in der Arbeit von Sopena [75] eingeführten Vektor v^a .

an.

Zusätzlich sei ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Energiedichte ρ und dem Druck p angenommen, der die Form $p = p(\rho)$ besitzt, also eine barotrope Zustandsgleichung. Es soll - gemäß der *SFC* - dabei die Zustandsgleichung $\rho = -p$ ausgeschlossen sein. Man kann dann mittels der Kettenregel folgende Eigenschaften ableiten

$$p' \neq 0 \text{ mit } p' = \frac{dp}{d\rho} \quad (4.16)$$

$$p_{,a} = \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dx^a} = p' \rho_{,a} \quad (4.17)$$

$$\dot{p} = \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{d\tau} = p' \dot{\rho} \quad (4.18)$$

$$(\dot{p}') = \frac{d^2 p}{d\rho d\tau} = \frac{d^2 p}{d\rho^2} \frac{d\rho}{d\tau} = p'' \dot{\rho} \quad (4.19)$$

$$(p')_{,a} = \frac{d^2 p}{d\rho dx^a} = \frac{d^2 p}{d\rho^2} \frac{d\rho}{dx^a} = p'' \rho_{,a}. \quad (4.20)$$

Es ist möglich die Gleichung (4.15) umzuschreiben in

$$\dot{u}_a = -\frac{p_{,a} + \dot{p}u_a}{\rho + p}, \quad (4.21)$$

so dass man mittels (4.18), (4.14) und (4.17) erhält

$$\dot{u}_a \stackrel{(4.18)}{=} -\frac{p_{,a}}{\rho + p} - \frac{p' \dot{\rho} u_a}{\rho + p} \quad (4.22)$$

$$\stackrel{(4.14)}{=} p' \Theta u_a - \frac{p_{,a}}{\rho + p} \quad (4.23)$$

$$\stackrel{(4.17)}{=} p' \left(\Theta u_a - \frac{\rho_{,a}}{\rho + p} \right). \quad (4.24)$$

Die kovariante Ableitung der Gleichung (4.23) ergibt

$$\begin{aligned} \dot{u}_{a;b} = (p')_{,b} \Theta u_a + p' (\Theta_{,b} u_a + \Theta u_{a;b}) - p_{,a;b} (\rho + p)^{-1} + \\ + p_{,a} (\rho + p)_{,b} (\rho + p)^{-2}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Damit ergibt sich durch Überschieben dieser Gleichung mit u^b und Projektion auf den zu u^a orthogonalen Raum der räumliche Anteil der zeitlichen Änderung der Beschleunigung (Selbstbeschleunigung) zu

$$h_a^b \ddot{u}^a = \Theta \dot{u}^b \left(p' - \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + A^b + p' h^{ba} \Theta_{;a}. \quad (4.26)$$

Überschieben der Gleichung (4.25) mit $h_{[d}^a h_{c]}^b$ ergibt nach einigen Manipulationen

$$h_{[d}^a h_{c]}^b \dot{u}_{a;b} = p' \Theta h_{[d}^a h_{c]}^b u_{a;b}. \quad (4.27)$$

Dabei ist zu beachten, dass die beiden letzten Terme in (4.25), welche zweifache Ableitungen enthalten bzw. nicht linear in $p_{,a}$ sind, durch die Antisymmetrisierung verschwinden. Die erhaltene Gleichung kann dann einfach zu

$$h_{[b}^c h_{a]}^d \dot{u}_{d;c} = p' \Theta \omega_{ab} \quad (4.28)$$

umgestellt werden, so dass man die einzelnen Komponenten bezüglich der Basisvektoren ermitteln kann

$$\dot{u}^d \omega^c \dot{u}_{[c;d]} = 0 \quad (4.29)$$

$$A^d \omega^c \dot{u}_{[c;d]} = 0 \quad (4.30)$$

$$A^d \dot{u}^c \dot{u}_{[c;d]} = -p' \Theta A_b A^b = -p' \Theta A^2. \quad (4.31)$$

Die Projektionen bezüglich des zeitartigen Vektorfeldes sind identisch erfüllt.

Man erhält somit folgende Aussage:

Satz 9 (Eigenschaft der Ableitung des Beschleunigungsfeldes)

Der antisymmetrische Anteil der Ableitung des Beschleunigungsfeldes muß den Gleichungen (4.29, 4.30, 4.31) genügen, und somit darf der antisymmetrische Anteil der Ableitung des Beschleunigungsfeldes nicht verschwinden.

Beweis 9 *Der erste Teil der Aussage wurde vorangehend bewiesen. Der zweite Teil folgt unmittelbar aus Gleichung (4.31), so dass entweder $\Theta = 0$ oder $A_b A^b = 0$ oder $p' = 0$ sein müssen. Ersteres zeigt, dass die Lösungen nicht expandierend sind. Zweiteres zeigt, dass der raumartige Vektor A^a nicht existiert, was den Voraussetzungen widerspricht. Die dritte Möglichkeit $p' = 0$ besagt, dass zwischen Druck und Energiedichte kein Zusammenhang besteht, was aus physikalischen Gründen zu verwerfen ist. Damit ist obiger Satz gezeigt.*

Für gewisse Ersetzungen ist es nützlich, noch weiter umzustellen. Man kann Gleichung (4.24) auch unter Ausnutzung von (4.14) umschreiben als Bedingung für den Dichtegradienten

$$\rho_{,a} = -\dot{\rho} u_a - \frac{\rho + p}{p'} \dot{u}_a. \quad (4.32)$$

Ähnlich kann mit Hilfe von Gleichung (4.21) für den Druckgradienten

$$p_{,a} = -\dot{p} u_a - (\rho + p) \dot{u}_a \quad (4.33)$$

abgeleitet werden.

Aufgrund der Orthogonalitätsrelationen (4.13) erkennt man, dass beide Gradienten senkrecht auf A^e stehen $\rho_{,a} A^a = p_{,a} A^a = 0$.

4.4 Die Propagationsgleichung der Rotation

Die Propagationsgleichung für die Rotation (2.35) vereinfacht sich im betrachteten Fall und wird ebenfalls vollständig bezüglich der Basisvektoren zerlegt. Es ergibt sich

$$0 = \omega^e \dot{u}^f (\dot{u}_{[e;f]} - \dot{\omega}_{ef}) \quad (4.34)$$

$$0 = \omega^e A^f (\dot{u}_{[e;f]} - \dot{\omega}_{ef}) \quad (4.35)$$

$$\frac{2}{3}\Theta(\omega^2 \dot{u}^2 - (\omega_a \dot{u}^a)^2) = \frac{2}{3}\Theta A^2 = A^e \dot{u}^f (\dot{u}_{[e;f]} - \dot{\omega}_{ef}). \quad (4.36)$$

Ebenso wie die Gleichungen für den antisymmetrischen Anteil der Ableitung des Beschleunigungsfeldes (4.29)-(4.31) sind auch diese Gleichungen notwendige Bedingungen für die Existenz von Lösungen.

Die beiden Gleichungssysteme, die in Abschnitt 4.3 (4.29)-(4.31) und 4.4 (4.34)-(4.36) abgeleitet wurden, können nun ineinander eingesetzt werden. Die Gleichung (4.29) liefert mit der Gleichung (4.34)

$$\omega^a \dot{u}^b \dot{\omega}_{ab} = 0 \Rightarrow \dot{\omega}^a A_a = 0 \Leftrightarrow \dot{A}^a \omega_a = 0 \quad (4.37)$$

Aus den Gleichungen (4.30) und (4.35) folgt

$$A^a \omega^b \dot{\omega}_{ab} = 0 \Rightarrow \dot{\omega}^b (A^a \omega_{ab}) = 0, \quad (4.38)$$

was nach einiger Umformung

$$\omega(\omega^r \dot{u}_r \dot{\omega} - \omega \dot{u}_r \dot{\omega}^r) = 0 \quad (4.39)$$

ergibt, so dass der Klammerterm verschwinden muss, um rotierende Modelle zu erfassen. Diese Gleichung kann noch weiter umgeschrieben werden, so dass man

$$\dot{u}_a (\dot{\omega}^a \omega - \dot{\omega} \omega^a) = 0 \Rightarrow \dot{u}_a \dot{\omega}^a = 0 \quad (4.40)$$

erhält. Dabei bezeichnet $\hat{\omega}^a = \frac{\omega^a}{\omega}$ einen Einheitsvektor in Richtung der Rotation. Die Gleichung (4.40) stellt fest, dass die zeitliche Änderung des Rotationseinheitsvektors immer senkrecht auf der Beschleunigung steht. Darüber hinaus gilt aufgrund von $\dot{\omega}^a A_a = 0$ und $\omega_a A^a = 0$ auch $\dot{\omega}^a A_a = 0$. Außerdem gilt $\dot{\omega}^a \omega_a = 0$, so dass die zeitliche Änderung des Einheitsvektors immer senkrecht auf den drei raumartigen Vektoren ω^a, \dot{u}^a, A^a steht.

Aus den Gleichungen (4.31) und (4.36) erhält man

$$p' \Theta A^2 - A^a \dot{u}^b \dot{\omega}_{ab} = \frac{2}{3} \Theta A^2 \quad (4.41)$$

$$\Leftrightarrow A^2 \Theta \left(p' - \frac{2}{3} \right) = \dot{u}^2 \omega_r \dot{\omega}^r - \dot{\omega}_r \dot{u}^r \omega^a \dot{u}_a, \quad (4.42)$$

was unter Ausnutzung von Gleichung (4.39) zu

$$\dot{\omega} = \Theta\omega(p' - \frac{2}{3}) \quad (4.43)$$

wird.

Es wurden die wesentlichen Relationen (4.37), (4.39) und (4.43) abgeleitet. Die ersten beiden zeigen, dass der Rotationseinheitsvektor $\hat{\omega}^a$ eine Orthogonalitätsrelation erfüllt. Die dritte stellt eine Kopplung der zeitlichen Entwicklung der Rotation mit der Expansion und der Zustandsgleichung her, sie ist in Übereinstimmung mit der in [75, 73] gefundenen Relation.

Es bieten sich zudem noch interessante Interpretationen an, da es möglich ist, die Gleichung (4.43) durch Einführung eines Skalenparameters $R(x^a)$, der definiert ist durch $\Theta = 3\dot{R}/R$, umzuschreiben in

$$(\ln((\rho + p)R^5\omega))' = 0 \quad (4.44)$$

Damit ist die Größe $(\rho + p)R^5\omega$ eine Erhaltungsgröße und sollte mit der Drehimpulsdichte identifiziert werden, Diese Gleichung kann dann integriert werden, was das Resultat von Sanz [67] reproduziert. Eine andere Darstellung dieser Aussage ist der von Glass [35] für isentropische, scherungsfreie, ideale Fluide abgeleitete Erhaltungssatz der Drehimpulsdichte in der ART.

Darüber hinaus kann nun die Form des Vektors $\dot{\omega}^a$ abgeleitet werden. Mit dem Ansatz

$$\dot{\omega}^a = au^a + b\dot{u}^a + c\omega^a \quad (4.45)$$

(der Anteil in Richtung von A^a verschwindet wegen (4.37)) folgt mit Hilfe von

$$0 = (u_e\omega^e)' \Rightarrow a = \dot{u}_e\omega^e. \quad (4.46)$$

Unter Ausnutzung von Gleichung (4.39) ergibt sich

$$b\dot{u}^2 + c\dot{u}_e\omega^e = \dot{u}_e\omega^e\frac{\dot{\omega}}{\omega}. \quad (4.47)$$

Aus der Definition

$$(\omega_f\omega^f)' = \omega_f\dot{\omega}^f + \omega^f\dot{\omega}_f \quad (4.48)$$

folgt

$$\omega\dot{\omega} = b\dot{u}_a\omega^a + c\omega^2 \quad (4.49)$$

und somit unter Beachtung von $A^2 \neq 0$, dass $c = \frac{\dot{\omega}}{\omega}$ und $b = 0$. Damit erhält man für die zeitliche Entwicklung des Rotationsvektors

$$\dot{\omega}^a = \dot{u}_e \omega^e u^a + \frac{\dot{\omega}}{\omega} \omega^a \quad (4.50)$$

oder auch unter Ausnutzung von (2.24) für die zeitliche Entwicklung des Rotationstensors

$$\dot{\omega}^{ab} = \frac{\dot{\omega}}{\omega} \omega^{ab} + A^a u^b - u^a A^b. \quad (4.51)$$

4.5 Ausnutzung der Identität des Weyl-Tensors

Es ist nun möglich, die Identität (2.21) auf (2.32) anzuwenden. Man erhält dann unter Ausnutzung der Energie-Impuls-Bilanzgleichungen für den Fall eines idealen Fluides

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{2}((\dot{\rho}^{\cdot a})u^b - (\dot{\rho}^{\cdot b})u^a + \rho^{\cdot a}\dot{u}^b - \rho^{\cdot b}\dot{u}^a + (\rho^{\cdot a}u^b - \rho^{\cdot b}u^a)\Theta) + \\ & + \frac{1}{6}((\dot{\rho})^{\cdot b}u^a - (\dot{\rho})^{\cdot a}u^b - \dot{\rho}u^a u^b + \dot{\rho}u^b u^a) + (\frac{2}{3}\dot{\rho} - \dot{p})\omega^{ab} - \\ & - \frac{1}{2}(\rho + p)_{,c}(u^b \omega^{ac} - u^a \omega^{bc} + u^a \sigma^{bc} - u^b \sigma^{ac}) - \\ & - (\rho + p) \left(\dot{\omega}^{ab} - 2\sigma_c^{[a} \omega^{b]c} - \frac{1}{2}(u^a (\omega^{bc}_{;c} - \sigma^{bc}_{;c}) - u^b (\omega^{ac}_{;c} - \sigma^{ac}_{;c})) \right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Die Projektion mit $h_a^d h_b^e$ gibt dann

$$\rho_{,c} h^{c[d} \dot{u}^{e]} + (\frac{2}{3}\dot{\rho} - \dot{p})\omega^{de} + (\rho + p)(2\sigma_c^{[d} \omega^{e]c} - 2u^{[d} \omega^{e]b} \dot{u}_b - \dot{\omega}^{de}) = 0, \quad (4.53)$$

welches sich für den hier behandelten Fall eines idealen scherungsfreien Fluids zu

$$\rho_{,c} h^{c[a} \dot{u}^{b]} + (\frac{2}{3}\dot{\rho} - \dot{p})\omega^{ab} - (\rho + p)(2u^{[a} A^{b]} + \dot{\omega}^{ab}) = 0 \quad (4.54)$$

vereinfacht. Unter Ausnutzung der erhaltenen Gleichungen für $\dot{\omega}^{ab}$ und der Abhängigkeiten zwischen ω und $\dot{\omega}$ sowie der Darstellung für $\rho_{,c}$ ist diese Gleichung identisch erfüllt und enthält keine weiteren Bedingungen. Es ist jedoch hilfreich, einige weitere Dekompositionen vorzunehmen, da man einige leicht zu integrierende Gleichungen ableiten kann bzw. die vorangegangenen Ergebnisse bestätigt sieht.

Durch Überschieben von (4.54) mit A_b und ω_a ergibt sich

$$\frac{1}{2}\rho_{,c} A^c \dot{u}^a \omega_a - (\rho + p)\omega_a \dot{\omega}^{ab} A_b = 0 \quad (4.55)$$

und mit Gleichung (4.38) folgt

$$\rho_{,c} A^c \dot{u}^a \omega_a = 0, \quad (4.56)$$

so dass entweder $\rho_{,c}A^c = 0$ oder $\dot{u}^a\omega_a = 0$ sein müssen. Ersteres war allgemeine Eigenschaft dieser Modelle.

Darüber hinaus ergibt Überschieben von (4.54) mit A_b und \dot{u}_a die Gleichung

$$\left(\frac{2}{3}\dot{\rho} - \dot{p}\right)A^2 + \dot{u}_a\dot{\omega}^{ab}A_b(\rho + p) = 0. \quad (4.57)$$

Überschieben der Gleichung (4.54) mit ω_a und \dot{u}_b ergibt

$$\frac{1}{2}\rho_{,c}(\omega^c\dot{u}^2 - \dot{u}^c\dot{u}^a\omega_a) + (\mu + p)\dot{\omega}_a\omega^{ab}\dot{u}_b = 0, \quad (4.58)$$

mittels Gleichung (4.37) verschwindet der letzte Term und man erhält

$$\rho_{,c}(\omega^c\dot{u}^2 - \dot{u}^c\dot{u}^a\omega_a) = 0. \quad (4.59)$$

Das ist nur trivial erfüllt, sobald $\rho_{,c}$ keine Anteile in Richtung der Rotation besitzt. Die Verjüngung der Gleichung (4.54) mit dem Rotationstensor ω_{ab} ergibt

$$\rho_{,c}A^c + 2\left(\frac{2}{3}\dot{\rho} - \dot{p}\right)\omega^2 - 2(\rho + p)\omega\dot{\omega} = 0. \quad (4.60)$$

Wie Gleichung (4.32) zeigt, verschwindet der erste Term generell, so dass bleibt

$$\left(\frac{2}{3}\dot{\rho} - \dot{p}\right)\omega - (\rho + p)\dot{\omega} = 0. \quad (4.61)$$

Diese Gleichung ist eine andere Schreibweise von Gleichung (4.43), sie kann unter Benutzung einer geeigneten Zustandsgleichung integriert werden¹².

Weiterhin können jedoch die Anteile der Gleichung (4.52) benutzt werden, die einen Anteil in Richtung des Geschwindigkeitsfeldes u^a aufweisen. Man erhält

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{2} \left((\dot{\rho}^{,a})u_a u^b + (\dot{\rho}^{,b}) + \dot{\rho}u^b + (\dot{\rho}u^b + \rho^{,b})\Theta \right) - \frac{1}{2}(\rho + p)_{,a}\omega^{ba} - \\ & - \frac{1}{6} \left((\dot{\rho})^{,b} + \ddot{\rho}u^b + \dot{\rho}u^b \right) - (\rho + p) \left(u_a\dot{\omega}^{ab} + \frac{1}{2}(\omega^{ba}{}_{;a} + u^b u_a \omega^{ac}{}_{;c}) \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Zuerst sei die Projektion auf ω^b betrachtet

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{2} \left(\omega_b(\dot{\rho}^{,b}) + \dot{\rho}u^b\omega_b + \rho^{,b}\omega_b\Theta \right) - \frac{1}{6} \left((\dot{\rho})^{,b}\omega_b + \dot{\rho}u^b\omega_b \right) - \\ & - \frac{1}{2}(\rho + p)\omega_b\omega^{bc}{}_{;c}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

¹²Ein schönes Beispiel ist hier die einfache Wahl $p = \alpha\rho$ mit $\alpha = const$, so dass gilt

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{\dot{\rho}(2/3 - \alpha)}{\rho(1 + \alpha)}.$$

Das kann dann integriert werden. Insbesondere erkennt man hier den Fall konstanter Rotation $\alpha = 2/3$ bzw. $p' = 2/3$ und den hier nicht zu behandelnden Fall $\alpha = -1$ bzw. $p' = -1$, also $\rho = -p$ gerade jenen der kosmologischen Konstante.

Unter Ausnutzung der Gleichungen (4.14, 4.32) wird daraus

$$0 = -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\rho + p}{p'} \right) \dot{u}_b \omega^b + \frac{\rho + p}{p'} \ddot{u}_b \omega^b - \frac{\dot{\rho}}{p'} \dot{u}_b \omega^b \right) + \frac{1}{6} \frac{\dot{\rho}}{p'} \dot{u}_b \omega^b + \quad (4.64)$$

$$+ \frac{1}{6} (\rho + p) \Theta^{;b} \omega_b - \frac{1}{2} (\rho + p) \omega_b \omega^{bc}{}_{;c}.$$

Mittels Gleichung (4.5) können die beiden letzten Terme zusammengefasst werden. Für den Term $\Theta^{;b} \omega_b$ erhält man

$$\begin{aligned} \Theta_{;a} \omega^a p' &= (\dot{u}_a \omega^a) \cdot + \Theta \dot{u}^a \omega_a - 2\omega^a \dot{u}_a \Theta p' + \Theta p'' \frac{\rho + p}{p'} \dot{u}_a \omega^a \quad (4.65) \\ &= \Theta \dot{u}^a \omega_a \left(\frac{1}{3} - p' + p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + \ddot{u}^a \omega_a. \end{aligned}$$

Insbesondere erhält man für den Fall, dass die Beschleunigung und die Rotation senkrecht aufeinanderstehen, die Aussage, dass die Rotation senkrecht auf dem Gradienten der Expansion steht. Weiterhin sei die Projektion der Gleichung (4.52) auf den Beschleunigungsvektor beschrieben

$$0 = \frac{1}{2} \left(\dot{u}^b (\dot{\rho}_{;b}) + \dot{\rho} \dot{u}^2 + \rho^{;b} \dot{u}_b \Theta \right) - \frac{1}{6} \left((\dot{\rho})^{;b} \dot{u}_b + \dot{\rho} \dot{u}^2 \right) + \quad (4.66)$$

$$+ \frac{1}{2} \left((\rho + p)_{;a} A^a - \dot{u}_b \omega^{bc}{}_{;c} \right).$$

Durch die Ausnutzung der Gleichungen (4.16, 4.17, 4.23) und der aus letzterer abgeleiteten Beziehung $\rho_{;a} A^a = 0$ folgt

$$0 = - \left(\dot{u}^2 \left(\frac{\rho + p}{p'} \right) + \frac{\rho + p}{p'} \dot{u} \ddot{u} + \frac{\rho + p}{p'} \dot{u}^2 \Theta \right) + \quad (4.67)$$

$$+ \frac{1}{3} \left((\rho + p) \Theta^{;b} \dot{u}_b - \frac{\rho + p}{p'} \dot{u}^2 (1 + p') \Theta - \dot{\rho} \dot{u}^2 \right) - (\rho + p) \dot{u}_b \omega^{bc}{}_{;c}.$$

Dies kann nun mit Hilfe der Gleichungen (4.6, 4.14, 4.19) umgeformt werden zu

$$\Theta^{;b} \dot{u}_b = -\Theta \dot{u}^2 - \frac{\dot{\rho} p''}{p'^2} \dot{u}^2 + \frac{\ddot{u} \dot{u}}{p'} + \frac{1}{3} \frac{\Theta \dot{u}^2}{p'}. \quad (4.68)$$

Damit ist es möglich, die Divergenz des Vektors A^a durch Überschiebung der Gleichung (2.35) und mit Hilfe von (4.43) zu bestimmen als

$$A^a{}_{;a} = 2\Theta \left(-p' \omega^2 - \frac{\dot{u}^2}{3} + \frac{\dot{u}^2}{9p'} \right) - \frac{2}{3p'} \left(\frac{\dot{p}'}{p'} \dot{u}^2 - \ddot{u} \dot{u} \right). \quad (4.69)$$

Weiterhin sei die Projektion der Gleichung (4.52) auf den Vektor A_b beschrieben

$$0 = \frac{1}{2} (\dot{\rho}^{;b}) A_b - \frac{1}{6} (\dot{\rho})^{;b} A_b - \frac{1}{2} \rho_{;a} (1 + p') \omega^{ba} A_b - \quad (4.70)$$

$$- (\rho + p) \left(-\dot{u}_a \omega^{ab} A_b + \frac{1}{2} A_b \omega^{ba}{}_{;a} \right).$$

Dies kann nun mit Hilfe der Gleichungen (4.14, 4.32) umgeformt werden zu

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{\ddot{u}^b A_b}{p'} + \frac{1}{6} \Theta^{;b} A_b + \frac{1}{2} A^2 \frac{1+p'}{p'} - A^2 - \frac{1}{2} A_b \omega^{ba}{}_{;a}. \quad (4.71)$$

Unter Ausnutzung der für die aus der Gleichung für den Wärmestrom folgenden Beziehung $A_e \omega^{ea}{}_{;a} = -\frac{2}{3} A_e \Theta^{;e} - A^2$ ergibt sich

$$\Theta^{;b} A_b = \frac{\ddot{u}^b A_b}{p'} - \frac{A^2}{p'}. \quad (4.72)$$

Es wurden insbesondere eine Reihe von Beziehungen (4.65, 4.68, 4.72) abgeleitet, die im Verlauf des weiteren Vorgehens von Nutzen sein werden. Diese Resultate hätten auch auf einfachere Weise durch Überschieben von Gleichung (4.26) mit den entsprechenden Vektorfeldern erhalten werden können, wobei vorwiegend die Bilanzgleichungen im Vordergrund stehen. Es bestehen somit zwei Möglichkeiten, diese Resultate zu erhalten, deren Wahl Geschmacksache ist. Der in diesem Kapitel beschriebene Weg ist der eher geometrische, der im wesentlichen Differentialidentitäten benutzt. Dieser Weg wurde auch in der Arbeit von Kundt und Trümper [55] benutzt, wobei die Gleichung (4.54) mit der Gleichung 1.2.6 in dieser Arbeit übereinstimmt. Hier wurde diese Gleichung genutzt, um daraus dann die Beziehungen (4.65, 4.68, 4.72) abzuleiten.

4.6 Komponenten der anderen Propagations- und Zwangsgleichungen

Die noch nicht benutzten Propagations- und Zwangsgleichungen (2.36), (2.46), (2.34) und (2.41), nehmen aufgrund der Einschränkung auf scherungsfreie, ideale Fluide die Form

$$E_{ef} = h_e{}^a h_f{}^b \dot{u}_{(a;b)} + \dot{u}_e \dot{u}_f - \omega_e \omega_f + \frac{1}{3} h_{ef} (\omega^2 - \dot{u}^a{}_{;a}) \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} H_{ar} &= h_a{}^s h_r{}^t \omega_{(s|d;c|\eta t)}{}^{fcd} u_f + 2\dot{u}_{(a}\omega_r) \\ &= -h_{ar}\omega^f \dot{u}_f + h_a{}^s h_r{}^t \omega_{(s;t)} + 2\dot{u}_{(a}\omega_r) \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\dot{\Theta} = 2\omega^2 + \dot{u}^a{}_{;a} - \frac{1}{3} \Theta^2 - \frac{1}{2} (\rho + 3p) \quad (4.75)$$

$$\omega^a{}_{;a} = 2\dot{u}^a \omega_a \quad (4.76)$$

an. Diese können in analoger Weise mit den möglichen Kombinationen aus A^e , ω^e und \dot{u}^e überschoben werden. Für die Propagationsgleichungen des Scherungsanteils ergibt die

Dekomposition folgende Gleichungen

$$\frac{2}{3}\omega^4 + \frac{1}{3}\omega^2\dot{u}^a{}_{;a} - (\omega_e\dot{u}^e)^2 = \omega^e\omega^f(\dot{u}_{(e;f)} - E_{ef}) \quad (4.77)$$

$$-\omega^e\dot{u}_e(\dot{u}^2 - \frac{2}{3}\omega^2 - \frac{1}{3}\dot{u}^a{}_{;a}) = \omega^e\dot{u}^f(\dot{u}_{(e;f)} - E_{ef}) \quad (4.78)$$

$$0 = \omega^e A^f(\dot{u}_{(e;f)} - E_{ef}) \quad (4.79)$$

$$(\omega_e\dot{u}^e)^2 - \dot{u}^4 - \frac{1}{3}\dot{u}^2(\omega^2 - \dot{u}^a{}_{;a}) = \dot{u}^e\dot{u}^f(\dot{u}_{(e;f)} - E_{ef}) \quad (4.80)$$

$$0 = A^e\dot{u}^f(\dot{u}_{(e;f)} - E_{ef}) \quad (4.81)$$

$$\frac{1}{3}((\omega^a\dot{u}_a)^2 - \omega^2\dot{u}^2)(\omega^2 - \dot{u}^a{}_{;a}) = A^e A^f(\dot{u}_{(e;f)} - E_{ef}). \quad (4.82)$$

Die Zwangsgleichung des magnetischen Anteils des Weyltensors wird in gleicher Weise behandelt. Es ergeben sich folgende Gleichungen

$$-\omega^2\dot{u}^a\omega_a = \omega^a\omega^b(\omega_{(a;b)} - H_{ab}) \quad (4.83)$$

$$-\dot{u}^2\omega^2 = \omega^a\dot{u}^b(\omega_{(a;b)} - H_{ab}) \quad (4.84)$$

$$0 = \omega^a A^b(\omega_{(a;b)} - H_{ab}) \quad (4.85)$$

$$-\dot{u}^2\omega_a\dot{u}^a = \dot{u}^a\dot{u}^b(\omega_{(a;b)} - H_{ab}) \quad (4.86)$$

$$0 = \dot{u}^a A^b(\omega_{(a;b)} - H_{ab}) \quad (4.87)$$

$$-\omega_a\dot{u}^a((\omega^a\dot{u}_a)^2 - \omega^2\dot{u}^2) = A^a A^b(\omega_{(a;b)} - H_{ab}). \quad (4.88)$$

Diese Gleichungen werden für die weitere Betrachtung benötigt.

4.7 Umformung der maxwellartigen Divergenzgleichungen für den magnetischen Anteil des Weyltensors

Einen Teil der existierenden Nebenbedingungen ist bereits verarbeitet worden. Man kann diese notwendigen Bedingungen, die die gesuchte Lösungsklasse einschränken, nutzen, um weitere Bedingungen über die in den maxwellartigen Feldgleichungen formulierten Bianchi-Identitäten zu erhalten. Die Divergenzgleichung für den magnetischen Anteil des Weyltensors vereinfacht sich für ein ideales scherungsfreies Fluid zu

$$\begin{aligned} h^{ea}h^{bc}H_{ab;c} - 3E^{eb}\omega_b &= (\rho + p)\omega^e \\ \Leftrightarrow H^{eb}{}_{;b} - \dot{u}_b H^{be} - 3E^{eb}\omega_b &= (\rho + p)\omega^e. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Aus dieser Gleichung werden durch Überschieben mit den Basisvektorfeldern die entsprechenden Komponenten gewonnen. Beispielhaft sei hier die Überschiebung mit A^a betrach-

tet. Es ergibt sich mit Hilfe von (4.30, 4.74, 4.79) und den Orthogonalitätsrelationen

$$2A^a \dot{u}^r \omega_{[a;r]} - 3\omega^b A^e \dot{u}_{(b;e)} + \frac{1}{2} A_a (\omega^{at} + \frac{1}{3} \Theta h^{at}) (\omega_{s;t} u^s + \dot{\omega}_t) + \quad (4.90)$$

$$\frac{1}{2} \Theta A^s (\dot{\omega}_s + \omega_{t;s} u^t) + \frac{1}{2} A^s (\omega_{s;t}{}^{;t} + \omega^r{}_{;s;r} + u^r u^t \omega_{s;t;r} + u^r u^t \omega_{t;s;r}) = 0.$$

Der größte Teil der Terme und insbesondere die zweiten kovarianten Ableitungen resultieren aus der Divergenzbildung von H^{ab} . Im nächsten Schritt werden nun unter Verwendung der Propagationsgleichung für die Rotation (4.50) und Vertauschung der zweiten kovarianten Ableitung, mittels der Ricci-Identität (2.4) für ω^a , im zweiten Term der letzten Klammer sowie dem Hereinziehen der Geschwindigkeitsvektorfelder in die beiden letzten Terme folgende Umformulierungen erreicht

$$2A^a \dot{u}^r \omega_{[a;r]} - 3\omega^b A^e \dot{u}_{(b;e)} + \frac{1}{2} A_s \square \omega^s + \frac{1}{2} (\omega^r{}_{;r})_{;s} A^s - \quad (4.91)$$

$$-\frac{1}{2} A^s \dot{u}^t \omega_{s;t} - \frac{1}{2} A^s (u^t{}_{;s} \omega_t) - \frac{1}{2} A^s \omega_{t;s} \dot{u}^t = 0.$$

Für den Ausdruck $\omega_{s;t}{}^{;t}$ wurde der kovariante Wellenoperator \square eingeführt. Die meisten Terme können nun einfach zerlegt und geeignet zusammengefasst werden, man benötigt noch (2.41), um sich zweiter kovarianter Ableitungen zu entledigen. Letztendlich erhält man dann

$$\frac{1}{2} A_s \square \omega^s - \dot{u}^a A^b \omega_{[a;b]} - 2\omega^a A^b \dot{u}_{(a;b)} = 0. \quad (4.92)$$

In ähnlicher Art und Weise folgt aus Gleichung (4.89) durch Überschieben mit \dot{u}^a

$$\frac{1}{2} \dot{u}_s \square \omega^s - 2\omega^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} + \quad (4.93)$$

$$+ \omega^a \dot{u}_a \left(\Theta^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} p' + \frac{1}{2} p'^2 - \frac{1}{2} (\rho + p) p'' \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} (5\rho + 3p) - 2(\omega^2 + \dot{u}^2) + \frac{1}{2} \dot{\Theta} (p' + 3) \right) = 0,$$

sowie aus Gleichung (4.89) durch Überschieben mit ω^a

$$\frac{1}{2} \omega_a \square \omega^a - 2\omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} + \omega^a \dot{u}^b \omega_{[a;b]} - (\omega_a \dot{u}^a)^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{2} \dot{\Theta} (p' + 3) - \quad (4.94)$$

$$- 2\omega^2 - \dot{u}^2 + \frac{1}{2} (\rho + 3p) + \Theta^2 \left(\frac{1}{2} p'^2 - \frac{1}{6} p' - \frac{1}{2} p'' (\rho + p) + \frac{1}{3} \right) \right) = 0.$$

Diese Gleichungen beschreiben die Komponenten des auf den Rotationsvektor wirkenden kovarianten Wellenoperators. Offensichtlich sind diese Gleichungen im allgemeinen nicht identisch erfüllt, d.h. es ergeben sich hier 3 neue Zwangsgleichungen.

4.8 Umformung der Divergenzgleichung für den elektrischen Anteil des Weyltensors

Weitere Bedingungen ergeben sich aus der Auswertung der Divergenzgleichung für den elektrischen Anteil des Weyltensors, die für ideale scherungsfreie Fluide die Form

$$\begin{aligned} h^{ea} h^{bc} E_{ab;c} + 3H^{ea} \omega_a &= \frac{1}{3} \rho_{;b} h^{be} \\ \Leftrightarrow E^{eb}{}_{;b} - \dot{u}_b E^{be} + 3H^{ea} \omega_a &= \frac{1}{3} \rho_{;b} h^{be} \end{aligned} \quad (4.95)$$

annimmt. Wie im vorangegangenen Abschnitt überschiebt man diese Gleichung mit den einzelnen Basisvektorfeldern und formt sie geeignet um. Durch das Fehlen einer einfachen Relation für die zweite Ableitung der Geschwindigkeit (Selbstbeschleunigung) werden die Ausdrücke jedoch komplizierter. Es ergibt sich durch Überschieben mit \dot{u}^a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{u}_a \square \dot{u}^a + 2\dot{u}^a \omega^b \omega_{(a;b)} + \frac{1}{6} \dot{u}^a (\dot{\Theta})_{;a} + \frac{1}{2} (\ddot{u}_a) \cdot \dot{u}^a + \frac{5}{6} \dot{\Theta} \dot{u}^2 + \\ + \frac{1}{2} (A^2 + \Theta \dot{u} \ddot{u} - \dot{u}^4) - \frac{1}{9} \Theta \Theta_{;d} \dot{u}^d + \dot{A}^a \dot{u}_a - \dot{u}^a \omega^b \omega_{[a;b]} = \\ = \frac{1}{4} (\rho_{;a} \dot{u}^a (1 - p') - \dot{u}^2 (3\rho + 5p)). \end{aligned} \quad (4.96)$$

Überschieben der Gleichung (4.95) mit ω^a liefert

$$\begin{aligned} 2\omega^a \omega^b \omega_{(a;b)} + \frac{1}{2} (\Theta \omega^a \ddot{u}_a + \omega_a \square \dot{u}^a + \omega^a (\ddot{u}_a) \cdot - \dot{u}^2 \omega_a \dot{u}^a) + \\ + \frac{1}{9} (\Theta \omega^d \Theta_{;d} + \Theta^2 \omega^a \dot{u}_a) + \frac{1}{6} (\omega^d (\dot{\Theta})_{;d} + 5\omega^a \dot{u}_a \dot{\Theta}) = \\ = -\frac{\dot{u}_a \omega^a}{4} (3\rho + 5p) + \frac{1}{4} (1 - p') \rho_{;a} \omega^a. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Überschieben der Gleichung (4.95) mit A^a ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(-\omega_b \dot{u}^b \omega_c \ddot{u}^c + \omega^2 \dot{u} \ddot{u} + A_a \square \dot{u}^a + A^a (\ddot{u}_a) \cdot + \dot{A} A + \Theta A^2 + \Theta A^a \dot{u}_a \right) + \\ + \frac{1}{6} A^a (\dot{\Theta})_{;a} + \frac{1}{9} \Theta A^a \Theta_{;a} + p' \Theta A^2 + 2A^a \omega^b \omega_{(a;b)} - A^a \omega^b \omega_{[a;b]} = 0. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Ähnlich wie im vorangegangenen Abschnitt beschreiben diese Gleichungen nun die Komponenten des kovarianten Wellenoperators, welcher auf das Beschleunigungsfeld wirkt. Diese Gleichungen ergeben weitere drei Zwangsgleichungen.

4.9 Betrachtung der Gleichung für die zeitliche Entwicklung des magnetischen Anteils des Weyltensors

Die Gleichung für die zeitliche Entwicklung des magnetischen Anteils des Weyltensors nimmt im Fall der idealen scherungsfreien Fluide die Form

$$\begin{aligned}
& 2\dot{u}_a E_b^{(e}\eta^f)^{lab} u_l + h^{c(e}\eta^f)^{lab} u_l E_{cb;a} + \\
& + h^{ea} h^{fb} \dot{H}_{ab} + \Theta H^{fe} - H_d^{(e}\omega^f)^d = 0 \\
\Leftrightarrow & 2\dot{u}_a E_b^{(e}\eta^f)^{lab} u_l + E_{b;a}^{(e}\eta^f)^{lab} u_l - \omega_{ca} E_b^c u_l u^{(e}\eta^f)^{lab} + \\
& + \dot{H}^{ef} - 2\dot{u}_a H^{a(e}u^f) + \Theta H^{fe} - H_d^{(e}\omega^f)^d = 0
\end{aligned} \tag{4.99}$$

an. Diese Gleichung wird wie in den vorangegangenen Abschnitten mit allen möglichen Kombinationen der Vektoren ω^a , \dot{u}^a , A^a überschoben. Als Beispiel wird die Überschobung mit $\omega^e \dot{u}^f$ vollzogen. Unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen folgt

$$\begin{aligned}
& -\dot{u}^a A^b \dot{u}_{(a;b)} + \frac{1}{6} \Theta \eta^{flat} u_l \dot{u}_f \omega_a u^r \dot{u}_{(r;t)} + \frac{1}{2} \eta^{flab} u_l \dot{u}_f \omega_{ba} u^t \dot{u}_{(r;t)} + \\
& + \frac{1}{2} \omega^r \eta^{flat} u_l \dot{u}_f \dot{u}_{(r;t);a} + \frac{1}{2} \dot{u}^e \omega_e \eta^{flab} u_l \dot{u}_f \dot{u}_{b;a} - \frac{1}{2} \omega_e \eta^{flab} u_l \dot{u}_f \omega_{;a} \omega_b - \\
& - \frac{1}{2} \omega^2 \eta^{flab} u_l \dot{u}_f \omega_{b;a} + \frac{1}{2} \dot{u}^r \eta^{elab} u_l \omega_e \omega_{ba} u^t \dot{u}_{(r;t)} + \\
& + \frac{1}{2} \dot{u}^r \eta^{elab} u_l \omega_e \dot{u}_{(r;t);a} + \frac{1}{2} \eta^{elab} u_l \omega_e \dot{u}_f \dot{u}_{b;a} + \frac{1}{2} \dot{u}^2 \eta^{elab} u_l \omega_e \dot{u}_{b;a} - \\
& - \frac{1}{2} \dot{u}^f \omega_f \eta^{elab} u_l \omega_e \omega_{b;a} + \omega^a \dot{u}_a \dot{u}^t u^s \omega_{(s;t)} + \dot{u}^2 \omega^s u^t \omega_{(s;t)} + \\
& + \omega^a \dot{u}_a \dot{u}^b \omega_b + (\omega^a \dot{u}_a)^2 \Theta \left(p' - \frac{2}{3} \right) + \Theta \left(p' - \frac{2}{3} \right) \omega^2 \dot{u}^2 + \\
& + \omega^2 \dot{u} \ddot{u} + \Theta \omega^a \dot{u}^b \omega_{(a;b)} + \Theta \dot{u}^2 \omega^2 + \frac{1}{2} A^a \omega^b \omega_{(a;b)} + \\
& + \frac{1}{2} \eta^{elab} u_l \omega_e u^f_{;a} u^r \dot{u}_f \dot{u}_{(r;t)} + \omega^s \dot{u}^t (\omega_{(s;t)}) \cdot - \omega^a \dot{u}_a (\dot{u}^k \omega_k) \cdot = 0.
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Mit Hilfe der Identitäten (8.1, 8.2, 8.4) und der Gleichung (4.43) können dann einige störende Terme geeignet transformiert werden und man erhält

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \dot{u}^a A^b \dot{u}_{(a;b)} + \frac{1}{2} \omega^r \eta^{flat} u_l \dot{u}_f \dot{u}_{(r;t);a} + \frac{1}{2} \dot{u}^r \eta^{elab} u_l \omega_e \dot{u}_{(r;t);a} - \\
& - \frac{1}{2} \omega^f \dot{u}_f \omega^r u^t \dot{u}_{(r;t)} - \frac{3}{2} \omega^2 \dot{u}^r u^t \dot{u}_{(r;t)} - (\omega^f \dot{u}_f)^2 p' \Theta + \frac{1}{2} \omega^e A^a \omega_{[e;a]} - \\
& - \frac{1}{2} \omega^2 \dot{u}^f \omega_f{}^d{}_{;d} - \frac{1}{2} p' \Theta A^2 - \frac{1}{2} \dot{u}^f \omega_f \omega^e \omega_e{}^d{}_{;d} + \dot{u}^2 \omega^s u^t \omega_{(s;t)} + \\
& + \omega^s \dot{u}^t (\omega_{(s;t)}) \cdot + \frac{1}{3} \Theta \dot{u}^2 \omega^2 + \omega^2 \dot{u} \ddot{u} + \Theta \omega^a \dot{u}^b \omega_{(a;b)} + A^a \omega^b \omega_{(a;b)} + \\
& + \omega_a \dot{u}^a \dot{u}^t u^s \omega_{(s;t)} = 0.
\end{aligned} \tag{4.101}$$

Im nächsten Schritt müssen die Terme, welche die zweiten kovarianten Ableitungen enthalten, umgeformt werden. Exemplarisch ist dies in Kapitel 8.2 dargestellt. Einsetzen und geeignetes Kürzen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\omega^2\dot{u}\ddot{u} - \frac{1}{4}\omega^f\dot{u}_f\omega^r\ddot{u}_r + \frac{1}{12}\Theta\omega^2\dot{u}^2 - \frac{1}{12}\Theta(\omega^a\dot{u}_a)^2 - \frac{1}{4}\omega^2p'\Theta_{;t}\dot{u}^t + \\ + \frac{1}{4}p'\omega^a\Theta_{;a}\dot{u}^p\omega_p + \frac{1}{4}A^2p''\Theta\frac{\rho+p}{p'} - \frac{1}{4}A^2p'\Theta = 0. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Nun folgt unter Ausnutzung der Gleichungen (4.68, 4.65) die Identität

$$0 = 0, \quad (4.103)$$

dass heißt, die bis zu diesem Zeitpunkt benutzten notwendigen Bedingungsgleichungen lösen die betrachtete Gleichung identisch. Somit folgen aus der Behandlung dieser Gleichung keine weiteren Zwangsgleichungen für das betrachtete Problem. Die analoge Vorgehensweise für die anderen Komponenten der Gleichungen für die zeitliche Entwicklung des magnetischen Anteils des Weyl tensors ergibt dasselbe Resultat. Somit ist gezeigt

Satz 10 *Für scherungsfreie ideale Fluide, welche $\rho + p \neq 0$ genügen und zudem mit einer barotropen Zustandsgleichung ausgestattet sind, gilt: Wenn $\Theta\omega \neq 0$ ist und die Gleichungen (4.65, 4.68, 4.72, 4.50, 4.29, 4.30, 4.31) berücksichtigt werden, sind die Gleichungen für die zeitliche Entwicklung des magnetischen Anteils des Weyl tensors (4.99) identisch erfüllt und liefern somit keine weiteren Zwangsbedingungen.*

4.10 Umformung der Gleichung für die zeitliche Entwicklung des elektrischen Anteils des Weyl tensors

Die Gleichung für die zeitliche Entwicklung des elektrischen Anteils des Weyl tensors hat für ideale scherungsfreie Fluide die Form

$$\begin{aligned} h_f^a h_e^c \dot{E}_{ac} + \Theta E_{ef} - E^b_{(e}\omega_{f)b} - \\ - 2H^q_{(e}\eta_{f)bpq}u^b\dot{u}^p + h_{a(e}\eta_{f)rsd}u^r H^{sa;d} = 0 \\ \Leftrightarrow \dot{E}_{ef} - 2\dot{u}^a E_{a(e}u_{f)} + \Theta E_{ef} - E^b_{(e}\omega_{f)b} - 2H^q_{(e}\eta_{f)bpq}u^b\dot{u}^p + \\ + H_{(e}{}^{s;d}\eta_{f)rsd}u^r - \omega_a{}^d H^{sa}u^r u_{(e}\eta_{f)rsd} = 0. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Diese wird der gleichen Prozedur der vorangegangenen Abschnitte unterworfen.

Überschieben dieser Gleichung mit $\dot{u}^e \omega^f$ ergibt:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \Theta (\dot{u}^2 \omega_e \dot{u}^e + \dot{u}^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)}) + \frac{3}{2} (\dot{u}^2 \omega^b \ddot{u}_b + \dot{u}^a \ddot{u}_a \omega^b \dot{u}_b) - \\ & - \frac{1}{9} \Theta \dot{u}^a \omega_a (7\omega^2 + 2\dot{u}^a_{;a}) + \dot{u}^a \omega^b \ddot{u}_{(a;b)} - \frac{1}{3} \dot{u}^b \omega_b \ddot{u}^a_{;a} - \\ & - \frac{1}{4} (A^a \dot{u}^b \omega_{[b;a]} + \omega^p \dot{u}^f (\omega_f^d{}_{;d})_{;p} + \omega^f \dot{u}^p (\omega_f^d{}_{;d})_{;p}) + p' \Theta \omega^2 \dot{u}^a \omega_a + \\ & + \frac{3}{4} (A^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)} + \dot{u}^a A^b \omega_{(a;b)}) - \frac{1}{2} (\omega^a \dot{u}_a \dot{u}^f \omega_f^d{}_{;d} + \dot{u}^2 \omega^f \omega_f^d{}_{;d}) = 0. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Durch Überschieben der Gleichung (4.104) mit $\dot{u}^e \dot{u}^f$ folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \Theta (\dot{u}^4 + \dot{u}^a \dot{u}^b \dot{u}_{a;b} - (\omega_e \dot{u}^e)^2 - \dot{u}^2 \omega^2) + \frac{1}{3} (\Theta A^2 - \dot{u}^2 \ddot{u}^a_{;a}) + \\ & + \frac{3}{2} (A^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} - p' \Theta A^2) + 3\dot{u}^2 \dot{u}^b \ddot{u}_b - \frac{2}{9} \Theta \dot{u}^2 \dot{u}^a_{;a} + p' \Theta (\omega_a \dot{u}^a)^2 - \\ & - \dot{u}^2 \omega^f \omega_f^d{}_{;d} - \frac{1}{2} \dot{u}^p \dot{u}^f (\omega_f^d{}_{;d})_{;p} + \dot{u}^a \dot{u}^b \ddot{u}_{a;b} = 0. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Multiplikation der Gleichung (4.104) mit $A^e A^f$ liefert:

$$\begin{aligned} & A^a A^b \ddot{u}_{a;b} + 2 (\dot{u}^e \omega_e A^a \dot{u}^b \omega_{(a;b)} + \dot{u}^e \omega_e A^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)} - \omega^2 A^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)}) - \\ & - \frac{1}{3} A^2 \ddot{u}^a_{;a} + \frac{1}{9} A^2 \Theta (8\omega^2 - 2\dot{u}^a_{;a}) - \dot{u}^e \omega_e A^a \dot{u}^b \omega_{[a;b]} - \\ & - \omega^2 A^2 \Theta p' + \frac{2}{3} \Theta A^a A^b \dot{u}_{a;b} + \frac{1}{2} (A^a A^b A_{a;b} - A^a A^b \omega_b^d{}_{;d;a}) + \\ & + \dot{u}^2 A^a \omega^b \omega_{[a;b]} = 0. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Überschieben der Gleichung (4.104) mit $\dot{u}^e A^f$ ergibt:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \dot{u}^2 (A^b \ddot{u}_b - A^2) + \frac{2}{3} \Theta A^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} - \omega^2 \dot{u}^a \dot{u}^b \dot{u}_{a;b} + \\ & + \omega^q \dot{u}_q \dot{u}^a \dot{u}^b \omega_{a;b} + \frac{1}{2} (\dot{u}^2 \dot{u}^a \omega^b \omega_{[a;b]} - \dot{u}^2 A^a \omega_a^d{}_{;d} + \dot{u}^a A^b A_{(a;b)}) + \\ & + A^a A^b \dot{u}_{a;b} + \dot{u}^a A^b \ddot{u}_{(a;b)} - \frac{1}{4} (A^f \dot{u}^p \omega_f^d{}_{;d;p} + \dot{u}^f A^p \omega_f^d{}_{;d;p}) + \\ & + \omega^q \dot{u}_q \omega^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} - \frac{1}{6} \omega^2 A^2 - \dot{u}^2 \dot{u}^a \omega^b \omega_{(a;b)} = 0. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Multiplikation der Gleichung (4.104) mit $\omega^e \omega^f$ liefert:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} (\Theta (\dot{u}^e \omega_e)^2 + \Theta \omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} + \dot{u}^e \omega_e \omega^f \Theta_{;f}) + 3\omega^a \dot{u}_a \omega^b \ddot{u}_b - \\ & - \omega^a A^b \omega_{[a;b]} - \frac{1}{3} \omega^2 \ddot{u}^a_{;a} + \omega^a \omega^b \ddot{u}_{a;b} + 2A^a \omega^b \omega_{(a;b)} - \frac{2}{9} \Theta \omega^2 \dot{u}^a_{;a} + \\ & + \frac{1}{2} (\omega^f \omega^p A_{f;p} - \omega^f \omega^p \omega_f^d{}_{;d;p}) + \frac{5\omega^4 \Theta}{3} \left(p' - \frac{2}{3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Durch Überschieben der Gleichung (4.104) mit $\omega^e A^f$ folgt:

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{2} (\omega^e \dot{u}_e A^b \ddot{u}_b - \dot{u}^2 \omega^a \omega^b \omega_{a;b} + \dot{u}^p \omega_p \omega^a \dot{u}^b \omega_{(a;b}) + A^a A^b \omega_{a;b}) + \\
 & \quad + \frac{1}{2} (\omega^a A^f A_{(f;a)} - \dot{u}^p \omega_p \omega^a \dot{u}^b \omega_{[a;b]} - \dot{u}^p \omega_p A^f \omega_f^d{}_{;d}) - \\
 & - \frac{1}{4} (\omega^a A^f \omega_f^d{}_{;d;a} + A^a \omega^f \omega_f^d{}_{;d;a}) - 2\dot{u}^p \omega_p A^2 + \omega^a A^b \ddot{u}_{(a;b)} + \\
 & \quad + \frac{2}{3} \Theta \omega^a A^b \dot{u}_{(a;b)} + \dot{u}^p \omega_p \omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} - \omega^2 \omega^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.110}$$

Offensichtlich sind diese Gleichungen, im Gegensatz zu denen im vorangegangenen Abschnitt betrachteten, nicht identisch erfüllt. Es ist notwendig, die in ihnen enthaltenen Zwangsbedingungen näher zu untersuchen. Wie die in den Abschnitten 4.7/4.8 abgeleiteten Beziehungen enthalten auch diese Relationen Terme, welche mit \ddot{u}^a , $\Theta_{,a}$ und $\omega_f^d{}_{;d;a}$ gebildet werden. Um dies zu spezifizieren, sind folgende Zwischenuntersuchungen notwendig.

Bevor dies getan wird, soll das bisher Erreichte diskutiert werden. Wenn man die maxwellartigen Feldgleichungen in Analogie zu den Maxwell-Gleichungen im Vakuum

$$div \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{4.111}$$

$$rot \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta t} \tag{4.112}$$

$$div \mathbf{B} = 0 \tag{4.113}$$

$$rot \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} \tag{4.114}$$

sieht, drängt sich -mit gewisser Vorsicht- der folgende Vergleich auf¹³. Man kann E_{ab} mit \mathbf{E} und H_{ab} mit \mathbf{B} in Analogie bringen, da E_{ab} (2.36) auch einen Quellterm π_{ab} besitzt, der unabhängig von der Bewegung der Materie ist und H_{ab} (2.46) nur rein kinematische Quellen hat. Das heißt, man hat eine Korrespondenz der Feldstärken in beiden Theorien. Darüber hinaus kennt man teilweise die Lösung der maxwellartigen Feldgleichungen durch die Kenntnis von $\dot{\omega}_{ab}$ und anderer Bedingungen (siehe Satz 10), die in Analogie zur Einführung des Vektorpotenzials \mathbf{A} zu sehen sind. Aber durch die Kenntnis dieser Potentiale wird die Gleichung (4.89) nicht gelöst, was augenscheinlich nichts mit dem Vorhandensein der Quellen für H_{ab} , den Rotationsdichten $(\rho + p)\omega^a$, zu tun hat. Im Vergleich zur Elektrodynamik würde dies bedeuten, dass zwar Gleichung (4.114) gelöst wurde, dieses Potenzial aber nicht automatisch (4.113) löst. Deshalb erhält man neben der Wellengleichung für \dot{u}^a

¹³Für weitere Diskussionen dieses Punktes siehe Ellis [30]. Dort ist gezeigt, wie man die Maxwell'schen Gleichungen (4.111)-(4.114) in kovarianter Form ebenso wie die maxwellartigen Feldgleichungen bezüglich eines Strömungsfeldes zerlegen kann. Es treten dann auch Zusatzterme auf, die der Bewegung des Fluids geschuldet sind. Dieses vermittelt jedoch keinen tieferen Einblick in die vermeintliche Analogie beider Theorien.

auch eine Wellengleichung für ω^a und die Rolle der Zeitentwicklungsgleichung für E_{ab} bleibt unklar. Auch sollte man die Kenntnis der in Satz 10 formulierten Bedingungen berücksichtigen. Diese stammen aus der Verwendung von Energie-Impuls-Bilanz, Ricci-Identität und den einsteinschen Feldgleichungen, also der Voraussetzung, dass die wirklichen Gravitationspotenziale g_{ab} existieren. Da man diese und die Verteilung der Materie nicht explizit kennt, bleiben die maxwellartigen Gleichungen teilweise ungelöst¹⁴. Diese liefern somit weitere Bedingungen, die gelöst werden müssen.

Die Lösung der bereits erhaltenen Wellengleichungen ist hier unmöglich, da im Gegensatz zum gewöhnlichen Wellenoperator \square_η (d'Alembert Operator), für den die Lösungen, beispielsweise in der Elektrodynamik, durch die retardierten Potenziale gegeben sind, keine allgemeinen Lösungen existieren. Für riemannsche Mannigfaltigkeiten besteht die Möglichkeit, Aussagen über den Laplace-Beltrami Operator und den hopfschen Satz abzuleiten, diese basieren aber insbesondere auf der Semidefinitheit des Skalarprodukts (siehe u.a. [42, 51]). Diese Eigenschaft ist für Lorentzmannigfaltigkeiten in jedem Fall verletzt. Darüber hinaus wirkt hier erschwerend, dass der kovariante Wellenoperator auf die metrischen Funktionen selbst wirkt, nicht auf andere Felder, wie in der Elektrodynamik auf Lorentzmannigfaltigkeiten. Daher erschien es zweifelhaft zu versuchen, die in [32] gewonnenen Aussagen anzuwenden. Aber das Auftreten dieses Operators ist von generellem Interesse, so auch beim Versuch einer kovarianten Definition von Gravitationswellen [85]).

4.11 Weitere Zerlegung und zeitliche Entwicklung der Wärmestromgleichung

Die Wärmestromgleichung, die hier als eine Zwangsgleichung erscheint, war schon im Abschnitt 4.2 betrachtet worden, um eine vorteilhafte Zusammenstellung von Eigenvektoren zu erhalten. Im Folgenden soll diese Gleichung geeignet weiterzerlegt werden, um aus den verbliebenen Anteilen der maxwellartigen Gleichungen störende Terme zu eliminieren.

Gleichung (4.4) kann geschrieben werden als

$$0 = h^{be} \omega_e^a{}_{;a} + \frac{2}{3} h^{be} \Theta_{;e} + A^b \quad (4.115)$$

und Überschieben mit ω_b und Vertauschung der Ableitung ergibt dann

$$0 = -\omega^{ea} \omega_{e;a} + \frac{2}{3} \omega^e \Theta_{;e}. \quad (4.116)$$

¹⁴Eine unbefriedigende Erklärung für diese Tatsache ist in der Nichtlinearität der Gleichungen zu sehen.

Weiterhin kann Gleichung (4.115) mit dem Rotationstensor ω_{ik} überschoben werden, woraus folgt, dass

$$0 = \omega^{re} \omega_e^a{}_{;a} + \frac{2}{3} \omega^{re} \Theta_{;e} + \omega^r \omega_k \dot{u}^k - \omega^2 \dot{u}^r, \quad (4.117)$$

was mit Hilfe der Identität

$$\omega^{re} \omega_e^a{}_{;a} = \dot{u}^a \omega_a \omega^r - \omega^2 \dot{u}^r + h^{rk} \omega_{k;a} \omega^a - h^{rk} \omega_{t;k} \omega^t \quad (4.118)$$

(Beweis siehe Kapitel 8 Gleichung (8.9)) weiter umgeformt werden kann zu

$$0 = \omega^r \omega_a \dot{u}^a - \omega^2 \dot{u}^r + h^{rk} \omega_{[k;a]} \omega^a + \frac{1}{3} \omega^{re} \Theta_{;e}. \quad (4.119)$$

Diese Gleichung kann nun wiederum bezüglich der Eigenrichtungen der Beschleunigung und des Vektorfeldes A^e zerlegt werden. Es ergibt sich bezüglich der Beschleunigung

$$0 = \dot{u}^k \omega_{[k;a]} \omega^a - \frac{1}{3} A^e \Theta_{;e} - A^2 \quad (4.120)$$

und für das A^a -Feld

$$0 = \omega_{[k;a]} \omega^a A^k + \omega^2 \dot{u}^e \Theta_{;e} - \dot{u}_b \omega^b \omega^e \Theta_{;e}. \quad (4.121)$$

Man kann nun die Gleichung (4.120) umformen, indem man die Gleichung (4.72) benutzt, so dass man erhält

$$0 = \dot{u}^k \omega_{[k;a]} \omega^a - \frac{1}{3p'} (A^e \ddot{u}_e - A^2) - A^2. \quad (4.122)$$

Genauso kann mit Gleichung (4.121) verfahren werden, welche mittels (4.68) und (4.65) geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} 0 = & \omega_{[k;a]} \omega^a A^k + \frac{A^2 \Theta}{3p'} + A^2 \frac{p''}{p'^2} \Theta (\rho + p) - \\ & - \Theta A^2 + \frac{1}{p'} (\omega^2 \ddot{u} \dot{u} - \dot{u}^a \omega_a \ddot{u}^b \omega_b). \end{aligned} \quad (4.123)$$

Im Folgenden soll die zeitliche Entwicklung der Komponenten der Wärmestromgleichung (4.116) und (4.119) abgeleitet werden. Die Propagation der Komponente (4.116) berechnet man mit Hilfe der Eigenzeitableitung und der Ausnutzung der bis zu diesem Zeitpunkt gewonnenen Bedingungen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 = & \left(-\omega^{ea} \omega_{e;a} + \frac{2}{3} \omega^e \Theta_{;e} \right) \\ = & \frac{2}{3} \dot{u}^a \omega_a \dot{\Theta} + \frac{2}{3} \left(\omega^e (\dot{\Theta})_{;e} - \omega^e \Theta_{;k} u^k{}_{;e} \right) - \omega^{ea} (R_{eska} \omega^s u^k + \omega_{e;k;a} u^k), \end{aligned} \quad (4.124)$$

wobei die Gleichungen (4.116) und (4.51) verwendet wurden und die auftretenden zweiten kovarianten Ableitungen für Θ und ω_e vertauscht wurden. Der den Krümmungstensor enthaltene Anteil wird ähnlich wie die im Anhang dargestellten Rechnungen des vorherigen Abschnittes behandelt und enthält nur den Anteil $\omega^a \omega^b H_{ab}$ des Weyltensors. Das Ausdifferenzieren der anderen Terme liefert dann noch einige weitere Beiträge, die sich fast vollständig gegeneinander aufheben und man erhält schließlich

$$\Theta \left(p' - \frac{2}{3} \right) \omega^e \Theta_{;e} = \dot{u}_e \omega^e \dot{\Theta} + (\dot{\Theta})_{;e} \omega^e. \quad (4.125)$$

In analoger - wenn auch etwas längerer - Rechnung ergibt sich für die Propagation von Gleichung (4.119)

$$\begin{aligned} & \omega^{ra} (\dot{\Theta})_{;a} - \left(p' - \frac{2}{3} \right) \Theta \omega^{ra} \Theta_{;a} + \dot{\Theta} A^r + \\ & + \frac{1}{2} (\omega^r \omega^a - \omega^2 h^{ra}) ((9p' - 1)\Theta)_{;a} = \frac{1}{2} (9p' - 1) \Theta (\omega^2 \dot{u}^r - \dot{u}^a \omega_a \omega^r). \end{aligned} \quad (4.126)$$

Die Projektion auf die Basisvektoren ergibt mit Hilfe der Gleichungen (4.125, 4.68, 4.65)

$$\begin{aligned} 0 = & -A^a (\dot{\Theta})_{;a} + A^a \Theta_{;a} \left(p' - \frac{2}{3} \right) \Theta - \frac{\Theta A^2}{6p'} (9p' - 1) + \\ & + \frac{\Theta p'' A^2}{2p'^2} (\rho + p) + \frac{9p' - 1}{2p'} (\dot{u}_r \omega^r \ddot{u}_a \omega^a - \omega^2 \ddot{u} \dot{u}) \end{aligned} \quad (4.127)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0 = & -A^a (\dot{\Theta})_{;a} + \frac{9p' - 1}{2} (\dot{u}^r \omega_r \Theta_{;a} \omega^a - \omega^2 \Theta_{;a} \dot{u}^a) + \\ & + A^a \Theta_{;a} \left(p' - \frac{2}{3} \right) \Theta + \frac{\Theta A^2}{2} \left(\frac{(\rho + p)p''}{p'} - 9p' + 1 \right) \end{aligned} \quad (4.128)$$

und

$$0 = \dot{u}^a (\dot{\Theta})_{;a} + \dot{\Theta} \dot{u}^2 - \Theta \left(p' - \frac{2}{3} \right) \dot{u}^a \Theta_{;a} - \frac{1}{2} (9p' - 1) A^a \Theta_{;a}. \quad (4.129)$$

Um die Resultate der beiden vorangegangenen Abschnitte auszunutzen, sei noch folgende Zusammenstellung und daraus resultierende Ableitungen bemerkt.

Mit Hilfe von Gleichung (4.26) lässt sich für das Selbstbeschleunigungsfeld \ddot{u}_a schreiben

$$\ddot{u}^a = \dot{u}^2 u^a + \Theta \dot{u}^a \left(p' - \frac{1}{3} - p'' \frac{(\rho + p)}{p'} \right) + A^a + p' h^{ab} \Theta_{;b}, \quad (4.130)$$

so dass man für dessen kovariante Ableitung erhält

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{a;b} = & (\dot{u}^2)_{;b} u_a + \dot{u}^2 u_{a;b} + (\Theta_{;b} \dot{u}_a + \Theta \dot{u}_{a;b}) \left(p' - \frac{1}{3} - p'' \frac{(\rho + p)}{p'} \right) - \\ & - \Theta \dot{u}_{a\rho;b} \left(\frac{\rho + p}{p'} p''' + p'' \frac{p' - p''(\rho + p)}{p'^2} \right) + A_{a;b} + p'' \rho_{;b} h_a{}^c \Theta_{;c} + \\ & + p' \left(u_{a;b} \dot{\Theta} + u_a u^c{}_{;b} \Theta_{;c} + h_a{}^c \Theta_{;c;b} \right). \end{aligned} \quad (4.131)$$

Ebenso kann nun unter Ausnutzung von Gleichung (4.69) geschrieben werden

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}^a{}_{;a} &= \frac{1}{3}\Theta\dot{u}^2 + \Theta_{;a}\dot{u}^a \left(3p' + \frac{1}{3} - 2p''\frac{\rho+p}{p'} \right) - 2\Theta p''\frac{\rho+p}{p'} + \\
 + \Theta\dot{u}^a{}_{;a} \left(p' - \frac{1}{3} - p''\frac{\rho+p}{p'} \right) - 2\omega^2\Theta p' + p'\Theta\dot{\Theta} + p'(\square\Theta + \ddot{\Theta}) + \\
 + 2p'\Theta\dot{u}^2 + \Theta\dot{u}^2\frac{\rho+p}{p'} \left(\frac{\rho+p}{p'}p''' + p''\frac{p' - p''(\rho+p)}{p'^2} \right),
 \end{aligned} \tag{4.132}$$

hierin erscheint wiederum der kovariante Wellenoperator, diesmal auf Θ angewandt. Es wurden Ausdrücke für die Selbstbeschleunigung und deren Ableitungen hergeleitet. Diese können nun in den Gleichungen (4.105)-(4.110) eliminiert werden.

Darüber hinaus wird für die Umformung der Gleichungen (4.96)-(4.98) noch die dritte zeitliche Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes benötigt, es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_a &= 2\dot{u}\ddot{u}u_a + \dot{u}^2\dot{u}_a + \dot{\Theta}\dot{u}_a \left(p' - \frac{1}{3} - p''\frac{\rho+p}{p'} \right) + \\
 + \Theta \left[\dot{u}^2u_a + \Theta\dot{u}_a \left(p' - \frac{1}{3} - p''\frac{\rho+p}{p'} \right) + A_a + p'h_a{}^b\Theta_{;b} \right] - \\
 - \dot{\rho}\Theta\dot{u}_a \left[p'''\frac{\rho+p}{p'} + p'' \left(\frac{p' - (\rho+p)p''}{p'^2} \right) \right] + \dot{A}_a + \dot{\rho}p''h_a{}^b\Theta_{;b} + \\
 + p' \left(\dot{u}_a\dot{\Theta} + u_a\dot{u}^b\Theta_{;b} \right) + p'h_a{}^b(\Theta_{;b})'.
 \end{aligned} \tag{4.133}$$

Außerdem müssen noch die Terme der Form $\omega_f{}^d{}_{;d;p}$ verarbeitet werden. Dies erreicht man mit Hilfe von (4.115), wodurch sich nun schreiben lässt

$$\omega_f{}^d{}_{;d} = 2\omega^2u_f - \frac{2}{3}h_f{}^e\Theta_{;e} - A_f, \tag{4.134}$$

so dass man erhält

$$\begin{aligned}
 \omega_f{}^d{}_{;d;p} &= 2(\omega^2)_{;p}u_f + 2\omega^2u_{f;p} - \frac{2}{3}u_{f;p}\dot{\Theta} - \\
 - \frac{2}{3}u_fu^e{}_{;p}\Theta_{;e} - \frac{2}{3}h_f{}^e\Theta_{;e;p} - A_{f;p}.
 \end{aligned} \tag{4.135}$$

Die Gleichungen (4.131, 4.132, 4.133, 4.135) können nun genutzt werden, um die entsprechenden Ausdrücke in den verbleibenden Gleichungen (4.105)-(4.110) und (4.96)-(4.98) zu eliminieren.

4.12 Weitere Untersuchung der zeitlichen Entwicklung des elektrischen Anteils des Weyltensors

Mit den in Abschnitt 4.11 gefundenen Ausdrücken ist es möglich, die Gleichungen (4.105) - (4.110) weiter umzuformen. Man erhält für Gleichung (4.105)

$$\begin{aligned}
& \Theta \dot{u}^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + \omega^a \Theta_{;a} \dot{u}^2 \left(2p' + \frac{1}{6} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) - \\
& \quad - \frac{1}{3} \omega_e \dot{u}^e p' (\square \Theta + \ddot{\Theta}) + \dot{u}^2 \Theta \omega^a \dot{u}_a \left[\frac{7}{3} p' - \frac{1}{9} - 3p'' \frac{\rho + p}{p'} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2\rho + p}{3} \frac{p'}{p'} \left(p''' \frac{\rho + p}{p'} + p'' \frac{p' - p''(\rho + p)}{p'^2} \right) \right] + \frac{3}{2} \dot{u}^a \omega^b A_{(a;b)} + \\
& \quad + \omega^a \dot{u}_a \dot{u}^b \Theta_{;b} \left(p' + \frac{1}{18} - p'' \frac{\rho + p}{3p'} \right) + \left(p' + \frac{1}{3} \right) \dot{u}^a \omega^b \Theta_{;(a;b)} + \\
& \quad + \frac{1}{3} \omega_e \dot{u}^e \Theta \left(2p'' \frac{\rho + p}{p'} + 5p' \omega^2 - \frac{10}{3} \omega^2 + \frac{1}{3} \dot{\Theta} \right) - \frac{1}{4} A^a \dot{u}^b \omega_{[b;a]} - \\
& \quad - \frac{1}{3} \Theta \dot{u}^e \omega_e \dot{u}^a_{;a} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + \frac{3}{4} (A^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)} + \dot{u}^a A^b \omega_{(a;b)}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.136}$$

Für Gleichung (4.106) ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \Theta \dot{u}^4 \left[-\frac{1}{9} + \frac{7}{3} p' - 3p'' \frac{\rho + p}{p'} + \frac{2\rho + p}{3} \frac{p'}{p'} \left(p''' \frac{\rho + p}{p'} + p'' \frac{p' - p''(\rho + p)}{p'^2} \right) \right] + \\
& \quad + \Theta \dot{u}^a \dot{u}^b \dot{u}_{a;b} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) - \frac{2}{3} \Theta \dot{u}^2 \omega^2 - \Theta (\omega_a \dot{u}^a)^2 + \\
& \quad + \frac{2}{3} \dot{u}^2 \Theta p'' \frac{\rho + p}{p'} - \frac{7}{9} p' \omega^2 \dot{u}^2 \Theta + 4p' \Theta (\omega_a \dot{u}^a)^2 - \\
& \quad - \dot{u}^2 \Theta_{;a} \dot{u}^a \left(-3p' + \frac{4}{9} - p'' \frac{4\rho + p}{3} \frac{p'}{p'} \right) - \frac{1}{3} \dot{u}^2 \Theta \dot{u}^a_{;a} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) - \\
& \quad - \frac{1}{3} p' \dot{u}^2 (\square \Theta + \ddot{\Theta}) + \frac{2}{3} \dot{u}^2 \omega^f \Theta_{;f} + \frac{1}{9} \dot{\Theta} \Theta \dot{u}^2 + \left(p' + \frac{1}{3} \right) \dot{u}^a \dot{u}^b \Theta_{;a;b} = 0.
\end{aligned} \tag{4.137}$$

Für Gleichung (4.107) erhält man

$$\begin{aligned}
 & 2A^a A^b A_{a;b} + \left(p' + \frac{1}{3}\right) A^a A^b \Theta_{;a;b} + \frac{2}{9} \dot{u}^2 \Theta A^2 + \frac{5}{9} A^2 \Theta \omega^2 + \\
 & + \Theta A^a A^b \dot{u}_{a;b} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'}\right) - \Theta A^2 \frac{2}{3} \left(p' \dot{u}^2 - p'' \frac{\rho + p}{p'}\right) + \\
 & + 2(\dot{u}^e \omega_e A^a \dot{u}^b \omega_{(a;b)} + \dot{u}^e \omega_e A^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)} - \omega^2 A^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)}) - \frac{1}{3} \omega^2 A^2 \Theta p' - \\
 & - \frac{1}{3} A^2 \Theta_{;a} \dot{u}^a \left(3p' + \frac{1}{3} - 2p'' \frac{\rho + p}{p'}\right) - \frac{1}{3} \Theta A^2 \dot{u}^a_{;a} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'}\right) - \\
 & - \frac{1}{3} A^2 \Theta \dot{u}^2 \frac{\rho + p}{p'} \left(p''' \frac{\rho + p}{p'} + p'' \frac{p'}{p'^2} - p'' \frac{(\rho + p)}{p'^2}\right) - \frac{1}{3} A^2 p' (\square \Theta + \ddot{\Theta}) - \\
 & - \dot{u}^e \omega_e A^a \dot{u}^b \omega_{[a;b]} + \dot{u}^2 A^a \omega^b \omega_{[a;b]} + \frac{1}{9} \Theta \dot{\Theta} A^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{4.138}$$

Gleichung (4.108) kann umgeformt werden zu

$$\begin{aligned}
 & 2\dot{u}^a A^b A_{(a;b)} + \dot{u}^2 A^a \Theta_{;a} \left(2p' + \frac{1}{6} - p'' \frac{\rho + p}{p'}\right) - \omega^2 \dot{u}^a \dot{u}^b \dot{u}_{a;b} + \\
 & + \Theta A^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'}\right) + \omega^e \dot{u}_e \omega^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} - \frac{1}{6} \omega^2 A^2 + \\
 & + \omega^e \dot{u}_e \dot{u}^a \dot{u}^b \omega_{a;b} + \frac{1}{2} \dot{u}^2 \dot{u}^a \omega^b \omega_{[a;b]} + \frac{1}{2} \dot{u}^2 A^2 + A^a A^b \dot{u}_{a;b} + \\
 & + \left(p' + \frac{1}{3}\right) A^a \dot{u}^b \Theta_{;(a;b)} - \dot{u}^2 \dot{u}^a \omega^b \omega_{(a;b)} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.139}$$

Die Umformung von Gleichung (4.109) ergibt

$$\begin{aligned}
 & \Theta \omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'}\right) + \frac{\omega^4 \Theta}{3} \left(7p' - \frac{13}{3}\right) + \\
 & + \frac{1}{9} \Theta \dot{\Theta} \omega^2 + \omega^a A^b \omega_{[a;b]} + \Theta (\omega^a \dot{u}_a)^2 \left[3p' - \frac{1}{3} - 3p'' \frac{\rho + p}{p'} + \right. \\
 & + \left. \frac{\rho + p}{p'} \left(p''' \frac{\rho + p}{p'} + p'' \frac{p'}{p'^2} - p'' \frac{(\rho + p)}{p'^2}\right)\right] - \frac{1}{3} p' \omega^2 (\square \Theta + \ddot{\Theta}) + \\
 & + \frac{2}{3} \omega^2 \Theta p'' \frac{\rho + p}{p'} + \dot{u}^e \omega_e \omega^f \Theta_{;f} \left(4p' + \frac{1}{3} - 2p'' \frac{\rho + p}{p'}\right) - \\
 & - \frac{2}{3} \omega^2 \dot{u}^2 \Theta \left(p' - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \omega^2 \dot{u}^a \Theta_{;a} \left(3p' + \frac{1}{3} - 2p'' \frac{\rho + p}{p'}\right) - \\
 & - \frac{1}{3} \Theta \dot{u}^2 \omega^2 \frac{\rho + p}{p'} \left(p''' \frac{\rho + p}{p'} + p'' \frac{p'}{p'^2} - p'' \frac{(\rho + p)}{p'^2}\right) + \\
 & + \left(p' + \frac{1}{3}\right) \omega^a \omega^b \Theta_{;a;b} - \frac{1}{3} \omega^2 \Theta \dot{u}^a_{;a} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'}\right) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.140}$$

Gleichung (4.110) kann umgeformt werden zu

$$\begin{aligned}
& \Theta \omega^a A^b \dot{u}_{(a;b)} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + 2\omega^a A^b A_{(a;b)} - \\
& - \frac{3}{2} \left(\dot{u}^2 \omega^a \omega^b \omega_{a;b} + \dot{u}^p \omega_p \omega^a \dot{u}^b \omega_{(a;b)} + A^a A^b \omega_{a;b} \right) - \\
& - \frac{1}{2} \dot{u}^p \omega_p \omega^a \dot{u}^b \omega_{[a;b]} + \dot{u}^p \omega_p \omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} + \left(p' + \frac{1}{3} \right) \omega^a A^b \Theta_{;(a;b)} + \\
& + \dot{u}^e \omega_e A^a \Theta_{;a} \left(2p' + \frac{1}{6} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) - \omega^2 \omega^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} = 0.
\end{aligned} \tag{4.141}$$

Auch in einem Teil dieser Gleichungen tritt nun der kovariante Wellenoperator auf, der diesmal auf die Funktion Θ wirkt, über die Lösung derartiger Wellengleichungen gilt das bereits gesagte.

Darüber hinaus ist es möglich, die in Abschnitt 4.8 bezüglich der Divergenz des elektrischen Anteils des Weyltensors gewonnenen Gleichungen weiter umzuformen. Aus Gleichung (4.96) folgt mittels (4.133)

$$\begin{aligned}
& 2\dot{u}^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)} - \dot{u}^a \omega^b \omega_{[a;b]} + \frac{1}{2} \dot{\Theta} \dot{u}^2 \left(p' + 1 - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + \\
& + \Theta^2 \dot{u}^2 \left(p' - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} p'' \frac{\rho + p}{p'} - \frac{1}{2} p''^2 \frac{(\rho + p)^2}{p'^2} + \frac{1}{2} p''' \frac{(\rho + p)^2}{p'} \right) + \\
& + \Theta \dot{u}^a \Theta_{;a} \left(-\frac{2}{9} + \frac{2}{3} p' + \frac{1}{2} p'^2 - \frac{1}{2} (\rho + p) p'' \right) + \\
& + A^2 + \frac{1}{2} \dot{u}_a \square \dot{u}^a + A^a \Theta_{;a} \left(\frac{9}{4} p'^2 - \frac{3}{2} p' - \frac{1}{12} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.142}$$

Aus Gleichung (4.97) ergibt sich wie eben

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{1}{2} \omega_a \square \dot{u}^a + 2\omega^a \omega^b \omega_{a;b} + \frac{1}{2} \dot{\Theta} \dot{u}^a \omega_a \left(p' + 1 - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + \\
& + \Theta \omega^a \Theta_{;a} \left(\frac{2}{3} p' + \frac{1}{2} p'^2 - \frac{1}{2} p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + \\
& + \Theta^2 \dot{u}^a \omega_a \left(p' - \frac{2}{9} - \frac{1}{2} p'' \frac{\rho + p}{p'} - \frac{1}{2} p''^2 \frac{(\rho + p)^2}{p'^2} + \frac{1}{2} p''' \frac{\rho + p}{p'} \right).
\end{aligned} \tag{4.143}$$

Aus Gleichung (4.98) erhält man

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} A_a \square \dot{u}^a + (\omega^2 \Theta_{;a} \dot{u}^a - \omega^a \dot{u}_a \omega^b \Theta_{;b}) \left(\frac{3}{2} p' - \frac{9}{4} p'^2 + \frac{1}{12} \right) + \\
& + \Theta A^2 \left(3p' - \frac{9}{4} p'^2 - \frac{3}{4} p'' \frac{\rho + p}{p'} + \frac{5}{12} + \frac{9}{4} (\rho + p) p'' \right) + \\
& + \frac{1}{2} \Theta A^a \Theta_{;a} \left(\frac{4}{3} p' - (\rho + p) p'' + p'^2 \right) + 2A^a \omega^b \omega_{(a;b)} - \\
& - A^a \omega^b \omega_{[a;b]} = 0.
\end{aligned} \tag{4.144}$$

Man hat nun einen Satz von Bedingungen (4.92)-(4.94) und (4.136)-(4.144) aus den Maxwellartigen Feldgleichungen abgeleitet, welche zu lösen sind. Dabei ist zu beachten, dass dies notwendige Bedingungen für die Existenz von Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen sind. Da keine allgemeinen Verfahren zur Lösung oder Integration dieser Art von Gleichungen bekannt sind, werden in den folgenden Kapiteln Fälle mit verschiedenen weiteren Einschränkungen behandelt.

Kapitel 5

Der Fall der gradientenfreien Expansion

In diesem Abschnitt sollen die in Kapitel 4 abgeleiteten Gleichungen dazu dienen, einen Spezialfall des oben gestellten Problems zu untersuchen. Im Folgenden sei zusätzlich zu den bisherigen Einschränkungen

$$\omega\Theta \neq 0, \quad \dot{u}^2 \neq 0, \quad \sigma_{ab} = 0, \quad (5.1)$$

$$p = p(\rho) \text{ und } p \neq -\rho \quad (5.2)$$

gefordert, dass gilt

$$\Theta_{,a} = 0, \quad (5.3)$$

d. h. die Expansion wird als konstant angesetzt. Neben einem kosmologischen Szenario, in dem diese Bedingung erfüllt ist, kann man auch den in obigem Sinne uniformen Kollaps (oder Expansion) eines rotierenden Körpers modellieren, dessen Innenraum (oder Teile dessen) durch ein ideales Fluid beschrieben wird.

Es wird gezeigt:

Satz 11 *Es gibt keine scherungsfreien Lösungen der einsteinschen Feldgleichungen, deren Feldquelle durch ein ideales Fluid beschrieben wird, welches den Eigenschaften:*

(I) *Die Lösungen sind expandierend, rotierend und besitzen eine nicht verschwindende Beschleunigung.*

(II) *Es existiert eine Zustandsgleichung $p(\rho)$, so dass $p' := dp(\rho)/d\rho \neq 0$ und $\rho \neq -p$ gilt.*

(III) *Der Gradient der Expansion $\Theta_{,a}$ verschwindet.*

genügt.

Die nichtverschwindende Beschleunigung muss angesetzt werden, da von Ellis [28] dieser Fall schon ausgeschlossen wurde. Die grundlegende Idee des Beweises ist die Widerspruchsannahme. Man nimmt an, dass derartige Lösungen existieren und zeigt, dass dies zum Widerspruch führt.

Für den Beweis seien die vorhandenen Gleichungen noch einmal notiert. Zusätzlich zu den Bedingungen (4.29, 4.30, 4.31)

$$\dot{u}^d \omega^c \dot{u}_{[c;d]} = 0 \quad (5.4)$$

$$A^d \omega^c \dot{u}_{[c;d]} = 0 \quad (5.5)$$

$$A^d \dot{u}^c \dot{u}_{[c;d]} = -p' \Theta A_b A^b. \quad (5.6)$$

erhält man aus (4.120) und (4.121)

$$\dot{u}^k \omega_{[k;a]} \omega^a = A^2 \quad (5.7)$$

$$\omega^a A^k \omega_{[a;k]} = 0. \quad (5.8)$$

Weiterhin ergibt die Gleichung (4.128) im betrachteten Fall eine wesentliche Einschränkung für die Klasse der möglichen Zustandsgleichungen¹

$$(\rho + p)p'' = \left(p' - \frac{1}{9}\right)p'. \quad (5.9)$$

Darüber hinaus besitzen wir noch die Darstellung für die zeitliche Änderung des Rotationsvektors (die sich hier im Vergleich zur allgemeinen Betrachtung nicht ändert)

$$\dot{\omega}^a = \dot{u}_e \omega^e u^a + \Theta \left(p' - \frac{2}{3}\right) \omega^a \quad (5.10)$$

und die aus den speziellen Annahmen folgende Vereinfachung für die zeitliche Entwicklung der Beschleunigung²

$$\ddot{u}^a = \dot{u}^2 u^a + \Theta \left(p' - \frac{1}{3} - \frac{\rho + p}{p'} p''\right) \dot{u}^a + A^a. \quad (5.11)$$

Zunächst kann man die gewonnenen Einschränkungen nutzen, um die nicht trivialen Anteile der Weylensorgleichungen weiter zu untersuchen. Zum anderen kann man wiederum die Frage stellen, inwieweit die angegebenen Zwangsgleichungen unter weiterer zeitlicher Ableitung erhalten bleiben oder ob dies neue Zwangsgleichungen liefert. Dieser Weg soll zunächst

¹Diese Gleichung ist eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung für $p(\rho)$. Wenn man zusätzlich die physikalisch sinnvolle Forderung stellt, dass $p(0) = 0$ ist, legt man damit auch die erste Ableitung an der Stelle $\rho = 0$ zu $p'(0) = 0$ oder $p'(0) = \frac{1}{9}$ fest.

²Unter Benutzung von (5.9) kann dies auch geschrieben werden als $\ddot{u}^a = \dot{u}^2 u^a - 2/9 \Theta \dot{u}^a + A^a$.

beschritten werden, da er zu einer schnelleren Lösung des Problems führt. Die Strategie ist ähnlich der für die Untersuchung von hamiltonschen Systemen mit Zwangsbedingungen von Dirac [26] benutzten Methode. Dabei wird die Wirkung der Hamiltonfunktion auf die Zwangsbedingungen untersucht. Folgen weitere Zwangsbedingungen, wird dieses Verfahren bis zum Auffinden aller Zwangsbedingungen fortgesetzt. Man erhält dann ein System von *first* und *second class* Zwangsbedingungen. Da im hier untersuchten Problem eine hamiltonsche Formulierung nicht direkt vorliegt, werden die Projektionen der kovarianten Ableitung bezüglich der Fluidbewegung der vorhandenen nichttrivialen Gleichungen untersucht.

Die Untersuchung der zeitlichen Entwicklung der Gleichungen (5.7, 5.8) liefert mit Hilfe der in den anderen Kapiteln beschriebenen Umformungsstrategien keine neuen Zwangsbedingungen, d. h. diese Gleichungen sind immer erfüllt.

Die zeitliche Entwicklung der Gleichungen (5.4, 5.5, 5.6) liefert dagegen folgende **neue** Zwangsgleichungen

$$\omega^a A^b \omega_{(a;b)} - A^a \dot{u}^b \omega_{a;b} = 0 \quad (5.12)$$

$$-\frac{1}{2} \omega^2 \dot{u}^a \dot{u}^b \omega_{a;b} + \frac{1}{2} \dot{u}^p \omega_p \omega^a \dot{u}^b \omega_{(a;b)} + \omega^a A^b A_{[a;b]} - \quad (5.13)$$

$$-\frac{1}{2} \dot{u}^p \omega_p \omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} + \frac{1}{2} \omega^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} = 0$$

$$-\frac{1}{2} \dot{u}^2 A^2 - \frac{1}{2} \dot{u}^p \omega_p \dot{u}^a \dot{u}^b \omega_{a;b} + \frac{1}{2} \dot{u}^2 \omega^a \dot{u}^b \omega_{(a;b)} + \dot{u}^a A^b A_{[a;b]} - \quad (5.14)$$

$$-\frac{1}{2} \dot{u}^p \omega_p \dot{u}^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)} + \frac{1}{2} \omega^2 \dot{u}^a \dot{u}^k \dot{u}_{a;k} - \frac{1}{2} A^a A^b \dot{u}_{a;b} = 0.$$

Für die Ableitung dieser Gleichungen wurden die bekannten Umformungen verwendet und die bis dahin erhaltenen Zwangsgleichungen ausgenutzt. Dieser Weg kann weiter beschritten werden, d.h. es wird untersucht, ob die Zwangsgleichungen (5.12, 5.13, 5.14) nun in der zeitlichen Entwicklung erhalten bleiben oder nicht. Es ergibt sich dabei für die Gleichung (5.12) die Beziehung

$$\Theta \left(3p' - \frac{23}{9} \right) \omega^a A^b \omega_{(a;b)} - \Theta \left(2p' - \frac{19}{9} \right) A^a \dot{u}^b \omega_{a;b} = 0. \quad (5.15)$$

Die triviale Möglichkeit zur Lösung dieser Gleichung ist die Forderung, dass $\Theta = 0$ gilt. Dies widerspricht jedoch der zu untersuchenden Lösungsklasse. Mit Hilfe der Gleichung (5.12) ergibt sich dann

$$\left(p' - \frac{4}{9} \right) \omega^a A^b \omega_{(a;b)} = 0. \quad (5.16)$$

Somit verbleibt zuerst die Festlegung der Zustandsgleichung zu $p' = 4/9$, welches jedoch im Widerspruch zur Gleichung (5.9) steht. Andererseits erhält man die Möglichkeit, dass

$$\omega^a A^b \omega_{(a;b)} = 0 \quad (5.17)$$

gilt und darüber hinaus unter Beachtung von (5.12)

$$A^a \dot{u}^b \omega_{a;b} = 0. \quad (5.18)$$

Die weitere zeitliche Entwicklung beider Gleichungen reproduziert dann die bekannten Zwangsbedingungen, dieser Anteil ist somit in Involution.

Im nächsten Schritt wird die zeitliche Entwicklung von Gleichung (5.13) untersucht. Es ergibt sich daraus

$$\omega^2 \dot{u}^a A^b \omega_{[a;b]} = 0. \quad (5.19)$$

Da die Rotation ungleich Null sein soll, bleibt also die Bedingung

$$\dot{u}^a A^b \omega_{[a;b]} = 0. \quad (5.20)$$

Weiterhin wird nun die zeitliche Entwicklung von Gleichung (5.14) betrachtet und man erhält

$$-\frac{1}{2} \dot{u}^2 A^2 \Theta + \frac{5}{4} \dot{u}^p \omega_p \dot{u}^a A^b \omega_{[a;b]} = 0. \quad (5.21)$$

Mit der Bedingung (5.20) und der Ausnutzung, dass weder Expansion noch Beschleunigung verschwinden sollen, erhält man

$$A^2 = 0. \quad (5.22)$$

Die zeitliche Entwicklung dieser Gleichung ergibt keine weiteren Einschränkungen. Somit ist der Basisvektor A^a im betrachteten Fall lichtartig bzw. ein Nullvektor und es gilt

$$\omega^2 \dot{u}^2 = (\omega_a \dot{u}^a)^2. \quad (5.23)$$

Darüber hinaus gilt auch aufgrund von (5.18) und (5.20)

$$\dot{u}^a A^b \omega_{(a;b)} = 0. \quad (5.24)$$

Weiterhin gilt nun, da $A^a A_a = 0$ ist, auch $(A^a A_a)_{;b} = 0$ und somit

$$A^a A^b A_{a;b} = 0 \quad (5.25)$$

$$A^a \omega^b A_{a;b} = 0 \quad (5.26)$$

$$A^a \dot{u}^b A_{a;b} = 0 \quad (5.27)$$

Im nächsten Schritt werden die Propagationsgleichungen für den elektrischen Anteil des Weyltensors (4.136)-(4.141) für den vorliegenden Spezialfall untersucht. Diese nehmen unter Berücksichtigung aller bis jetzt erzielten Einschränkungen die folgende Form an:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{9}\dot{u}^a\omega^b\dot{u}_{(a;b)} + \dot{u}^2\dot{u}^a\omega_a \left(\frac{2}{9} - \frac{2}{3}p' \right) + \\ & + \frac{1}{3}(\omega_e\dot{u}^e) \left(2(p' - \frac{1}{9}) + 5p'\omega^2 - \frac{10}{3}\omega^2 \right) - \frac{4}{27}\dot{u}^e\omega_e\dot{u}^a{}_{;a} = 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} & \dot{u}^4 \left(\frac{2}{9} - \frac{2}{3}p' \right) + \frac{4}{9}\dot{u}^a\dot{u}^b\dot{u}_{a;b} - \frac{5}{3}\dot{u}^2\omega^2 + \frac{2}{3}\dot{u}^2 \left(p' - \frac{1}{9} \right) + \\ & + \frac{43}{9}p'\omega^2\dot{u}^2 - \frac{4}{27}\dot{u}^2\dot{u}^a{}_{;a} = 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$(\dot{u}^e\omega_e)A^a\omega^b\dot{u}_{(a;b)} - \omega^2A^a\dot{u}^b\dot{u}_{(a;b)} = 0 \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{4}{9}\Theta A^a\dot{u}^b\dot{u}_{(a;b)} - \omega^2\dot{u}^a\dot{u}^b\dot{u}_{a;b} + \\ & + (\omega^e\dot{u}_e)\omega^a\dot{u}^b\dot{u}_{(a;b)} + (\omega^e\dot{u}_e)\dot{u}^a\dot{u}^b\omega_{a;b} - \dot{u}^2\dot{u}^a\omega^b\omega_{(a;b)} = 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{4}{9}\omega^a\omega^b\dot{u}_{a;b} + \frac{\omega^4}{3} \left(7p' - \frac{13}{3} \right) - \\ & - \frac{2}{3}\omega^2\dot{u}^2 \left(p' - \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3}\omega^2 \left(p' - \frac{1}{9} \right) - \frac{4}{27}\omega^2\dot{u}^a{}_{;a} = 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{4}{9}\Theta\omega^a\omega^b\dot{u}_{a;b} - \frac{3}{2}\dot{u}^2\omega^a\omega^b\omega_{a;b} + \frac{3}{2}\dot{u}^p\omega_p\omega^a\dot{u}^b\omega_{(a;b)} - \\ & - \frac{1}{2}\omega^aA^bA_{a;b} + (\omega^p\dot{u}_p)\omega^a\omega^b\dot{u}_{a;b} - \omega^2\omega^a\dot{u}^b\dot{u}_{(a;b)} = 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Man kann aus den Gleichungen (5.28, 5.29, 5.32) erkennen, dass es gelungen ist, Teile des Weyltensors als Funktionen der kinematischen Invarianten und der Zustandsfunktion auszudrücken, insbesondere treten keine Ableitungen der kinematischen Vektorfelder auf. Die Gleichungen (5.30, 5.31, 5.33) beschreiben den Zusammenhang der noch nicht bestimmten Teile des Weyltensors.

Im nächsten Schritt werden nun die Gleichungen (5.29, 5.32) hinsichtlich ihrer zeitlichen Entwicklung untersucht. Es ergibt sich, wobei die Gleichungen (5.29, 5.32) wiederum ver-

wendet wurden,

$$\dot{u}^2 \left(2p'^2 - \frac{4}{3}p' - \frac{2}{9} \right) + \omega^2 \left(\frac{43}{3}p'^2 + \frac{614}{27}p' - \frac{583}{27} \right) + 2p'(1-p') = 0 \quad (5.34)$$

$$\omega^2 \left(7p'^2 - \frac{172}{9}p' + \frac{91}{27} \right) + \dot{u}^2 \left(2p'^2 - \frac{10}{9}p' - \frac{16}{27} \right) + 2p'(1-p') = 0. \quad (5.35)$$

Im folgenden Schritt betrachten wir die Propagation von Gleichung (5.35)³. Es ergibt sich unter Berücksichtigung aller Zwangsgleichungen

$$\begin{aligned} \omega^2 \left[\left(2p' - \frac{4}{3} \right) \left(7p'^2 - \frac{172}{9}p' + \frac{91}{27} \right) - p' \left(p' - \frac{1}{9} \right) \left(14p' - \frac{172}{9} \right) \right] - \\ - \dot{u}^2 \left[\frac{8}{9}p'^2 - \frac{40}{81}p' - \frac{64}{243} + p' \left(p' - \frac{1}{9} \right) \left(4p' - \frac{10}{9} \right) \right] + \\ + 2p' \left(p' - \frac{1}{9} \right) (2p' - 1) = 0. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Es ist nun möglich, aus dem Gleichungssystem (5.34, 5.35, 5.38) die kinematischen Invarianten zu eliminieren.

Aus Gleichung (5.35) kann ein Ausdruck für \dot{u}^2 abgeleitet werden, wobei zu prüfen ist, ob

$$2p'^2 - \frac{4}{3}p' - \frac{2}{9} = 0 \quad (5.39)$$

gelten kann. Die Lösungen dieser Differentialgleichung für $p(\rho)$ sind

$$p(\rho) = \frac{1}{3} \left(1 - \sqrt{2} \right) \rho + c_1 \text{ bzw. } p(\rho) = \frac{1}{3} \left(1 + \sqrt{2} \right) \rho + c_2. \quad (5.40)$$

Diese Lösungen ergeben jeweils, dass $p'' = 0$ gilt und somit stehen sie im Widerspruch zu Gleichung (5.9). Man kann also \dot{u}^2 aus den Gleichungen (5.35) und (5.38) eliminieren. Auf

³An dieser Stelle ist es auch möglich, die Komponenten des Weyltensors weiter zu bestimmen. Im Folgenden wird die Propagation von Gleichung (5.33) betrachtet. Es ergibt sich zuerst

$$\frac{4}{9} \Theta \left(\frac{8}{9} - p' \right) \omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} - \frac{1}{2} \dot{u}^2 \omega^a \omega^b \omega_{a;b} - \frac{8}{81} \Theta \omega^2 \dot{u}^2 = 0. \quad (5.36)$$

Diese Gleichung kann wiederum auf ihre zeitliche Entwicklung hin untersucht werden, so dass man erhält

$$\frac{4}{9} \Theta \left(p'^2 + \frac{4}{9}p' - \frac{31}{81} \right) \omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} + \frac{8}{81} \Theta \omega^2 \dot{u}^2 \left(2p' - \frac{14}{9} \right) + \frac{5}{18} (\omega^e \dot{u}_e)^3 = 0. \quad (5.37)$$

Diese Gleichungen bestimmt nun wiederum eine Komponente des elektrischen Anteils des Weyltensors und damit bestimmt dann (5.36) eine weitere Komponente des magnetischen Anteils des Weyltensors. Dies läßt sich mit den anderen Zwangsgleichungen noch weiterführen, so dass man zu weiteren Einschränkungen gelangen kann, welche jedoch unnötig sind.

ähnlichem Wege kann nun auch aus Gleichung (5.35) ω^2 entfernt werden, wiederum ist zu beachten, dass die nun auftretende Differentialgleichung

$$\frac{4937 + 3923p' - 39225p'^2 + 28107p'^3 + 5346p'^4}{81 + 486p' - 729p'^2} = 0 \quad (5.41)$$

auszuschließen ist. Die Lösungen dieser Differentialgleichung stehen auch im Widerspruch zu (5.9)⁴. Damit ist es nun möglich, ω^2 aus Gleichung (5.38) zu entfernen. Es ergibt sich dann eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung in p' , wobei ein Fall

$$p' = 0 \quad (5.42)$$

ist. Diese Lösung zeigt also, dass zwischen Druck und Dichte keine Zustandsfunktion vermittelt. Der andere Fall hat die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{21045 - 32476p' - 84732p'^2 + 178998p'^3 - 68337p'^4 + 10206p'^5}{4937 + 3923p' - 39225p'^2 + 28107p'^3 + 5346p'^4} = 0 \quad (5.43)$$

zu untersuchen (siehe vorangehende Fußnote). Die Lösungen dieser Differentialgleichung stehen wiederum im Widerspruch zu (5.9).

Somit ist gezeigt, dass das System keine widerspruchsfreien Lösungen erlaubt. Daher muß eine der Prämissen falsch sein, wodurch Satz 11 gezeigt ist. Damit sind Raumzeiten, die den Bedingungen des Satzes 11 genügen, ausgeschlossen.

5.1 Folgerungen aus diesem Beweis

Neben der Aussage des Satzes sollen folgende Dinge noch einmal hervorgehoben werden, die zu dem Resultat führten.

Zunächst wurden die Zwangsbedingungen, die aus der allgemeinen Untersuchung her bekannt waren, hinsichtlich ihrer zeitlichen Entwicklung unter Berücksichtigung der vorhandenen Zwangsgleichungen untersucht. Es ergaben sich eine Reihe neuer Zwangsgleichungen, von denen gezeigt werden konnte, dass sie nach einer gewissen Zahl von weiteren Ableitungsschritten keine neuen Zwangsgleichungen mehr liefern. Das System ist also in diesem Teil in Involution.

Diese Zwangsgleichungen wurden dann zur Vereinfachung von bestimmten nicht trivialen Anteilen der maxwellartigen Feldgleichungen benutzt. Bemerkenswert war daran, dass eine teilweise Bestimmung der Weyltensoranteile möglich war. Die weitere zeitliche Entwicklung dieser Gleichungen lieferte dann die Aussage des Satzes. Es sei unterstrichen, dass dies

⁴Die vollständige Integration erfolgte mit *MATHEMATICA* und ergibt sehr lange lineare Funktionen in ρ , deren Darstellung wenig sinnvoll erscheint.

ohne konkrete Annahmen bezüglich des Weyltensors erzielt wurde. Man ersieht, zumindest in diesem Spezialfall, dass die maxwellartigen Feldgleichungen im Allgemeinen nichttrivialen Charakter haben und zur Lösung von Problemen herangezogen werden können, die zunächst keine Einschränkungen an die Weylkrümmung besitzen.

Im physikalischen Sinn erkennt man, dass rotierende, scherungsfreie Lösungen mit konstanter Expansion als kosmologische Szenarien ausgeschlossen sind. Ebenso gilt dies für die Suche nach geeignet vereinfachten Lösungen für bestimmte Stadien der Sternentwicklung.

Es ist darüber hinaus möglich, dieses Ergebnis noch zu verallgemeinern, wie die Betrachtung der Gleichungen (4.125), (4.128) und (4.129) lehrt. So führt die Forderung $\omega^a \Theta_{;a} = \dot{u}^a \Theta_{;a} = \dot{\Theta} = 0$ zunächst zu $p' = 1/9$, ein Fall, der in [81] bereits ausgeschlossen wurde und dann umgekehrt zu $A^a \Theta_{;a} = 0$ führt, so dass man alles bewiesen hat. Ähnliche Einschränkungen für zwei oder drei Ableitungen der Expansion schränken das Problem meist stark ein. Dann wird die Zustandsgleichung oft festgelegt auf den Fall $p' = 2/3$, so dass $\dot{\omega} = 0$ gilt. Der wesentliche Teil der Einschränkungen scheint dabei die Forderung $\dot{\Theta} = 0$ zu sein. Eine detaillierte Untersuchung der einzelnen Fälle erscheint aufgrund des Aufwandes als unangebracht.

Kapitel 6

Rotation und Beschleunigung sind orthogonal

Im Folgenden soll neben den Bedingungen

$$\omega\Theta \neq 0, \quad \dot{u}^2 \neq 0, \quad \sigma_{ab} = 0, \quad (6.1)$$

$$p = p(\rho) \text{ und } p \neq -\rho, \quad (6.2)$$

als einzig hinzutretende Einschränkung die Bedingung

$$\dot{u}^a \omega_a = 0 \quad (6.3)$$

benutzt werden. Dieser Fall entspricht gleichzeitig der Erhaltung der Rotation $\omega^a{}_{;a} = 0$, wie Gleichung (2.41) zeigt. Zunächst soll der allgemeine Fall behandelt werden um anschließend die auftretenden Probleme zu diskutieren. Erst durch Hinzunahme weiterer Annahmen kann dann ein Fortschritt erzielt werden, der zu befriedigenden Ergebnissen führt.

Es folgt aus Gleichung (6.3) umgehend

$$\dot{u}_{a;b} \omega^a + \omega_{a;b} \dot{u}^a = 0, \quad (6.4)$$

was in die einzelnen Bestandteile zerlegt werden kann, so dass man mit Hilfe von (4.29, 4.30) erhält

$$\dot{u}_{a;b} \omega^a \omega^b + \omega_{a;b} \dot{u}^a \omega^b = 0 \quad (6.5)$$

$$\dot{u}_{(a;b)} \omega^a A^b + \omega_{a;b} \dot{u}^a A^b = 0 \quad (6.6)$$

$$\dot{u}_{(a;b)} \omega^a \dot{u}^b + \omega_{a;b} \dot{u}^a \dot{u}^b = 0. \quad (6.7)$$

Wie man zeigen kann, ergibt die Propagation der Gleichungen (6.3) und (6.5, 6.6, 6.7) keinen neuen Zwangsbedingungen.

Weitere Bedingungen ergeben sich direkt aus der Beachtung von $\dot{u}^a \omega_a = 0$ für die schon abgeleiteten Beziehungen (4.65, 4.116, 4.120, 4.121) zu

$$\Theta_{;a} \omega^a = 0 \quad (6.8)$$

$$\omega^{ea} \omega_{e;a} = 0 \quad (6.9)$$

$$\dot{u}^a \omega^b \omega_{[a;b]} - \frac{1}{3} A^e \Theta_{;e} - \omega^2 \dot{u}^2 = 0 \quad (6.10)$$

$$A^a \omega^b \omega_{[a;b]} + \omega^2 \dot{u}^e \Theta_{;e} = 0. \quad (6.11)$$

Weiterhin vereinfachen sich die Gleichungen (4.125, 4.128)

$$0 = (\dot{\Theta})_{;e} \omega^e \quad (6.12)$$

$$0 = -A^a (\dot{\Theta})_{;a} - \omega^2 \frac{9p' - 1}{2} \Theta_{;a} \dot{u}^a + \quad (6.13)$$

$$+ A^a \Theta_{;a} \left(p' - \frac{2}{3} \right) \Theta + \frac{\Theta \omega^2 \dot{u}^2}{2} \left(\frac{(\rho + p)p''}{p'} - 9p' + 1 \right).$$

Hingegen bleibt Gleichung (4.129) unverändert. Man kann nun die Raychaudhuri-Gleichung (4.75) in diese Gleichungen einsetzen (dies war im vorangegangenen Kapitel nicht notwendig) und erhält

$$0 = 4\omega^a \omega^b \omega_{a;b} + \dot{u}^a_{;a;b} \omega^b \quad (6.14)$$

$$0 = -4A^a \omega^b \omega_{b;a} - \dot{u}^a_{;a;b} A^b - \omega^2 \frac{9p' - 1}{2} \Theta_{;a} \dot{u}^a + \quad (6.15)$$

$$+ p' \Theta A^a \Theta_{;a} + \frac{\Theta \omega^2 \dot{u}^2}{2} \left(\frac{(\rho + p)p''}{p'} - 9p' + 1 \right)$$

$$0 = 4\dot{u}^a \omega^b \omega_{b;a} + \dot{u}^a_{;a;b} \dot{u}^b - \Theta p' \dot{u}^a \Theta_{;a} - \frac{1}{2} (9p' - 1) A^a \Theta_{;a} + \quad (6.16)$$

$$+ \dot{u}^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\rho + p}{p'} + 2\omega^2 + \dot{u}^b_{;b} - \frac{1}{3} \Theta^2 + \rho \right),$$

da auch $\rho_{,a} \omega^a = p_{,a} \omega^a = 0$ gelten (siehe (4.32) und (4.33)). Diese Gleichungen können aber nicht weiter ausgenutzt werden, da die Terme, die $\dot{u}^a_{;a;b}$ enthalten, nicht in Terme geringerer Differentiationsstufe umgeformt werden können. Auch ist es nicht möglich, dieses Problem über die Darstellung der Ableitung des Beschleunigungsfeldes (4.25) zu lösen - die Ableitungen treten dann bezüglich der Energiedichte oder des Druckes auf¹. Gerade dies ist auch das Problem im allgemeinen Fall.

Nach der Auswertung dieser unmittelbar folgenden Zwangsbedingungen muss man sich wiederum auf die Suche nach weiteren Zwangsbedingungen machen. Dies soll zunächst

¹Die Propagation von (6.12) bzw. (6.14) ist relativ einfach zu bestimmen. Es ergeben sich jedoch keine neuen Bedingungen.

durch Untersuchung der Propagation der Gleichungen (4.29, 4.30, 4.31) geschehen. Die Berechnung dieser erfolgt nach dem schon beschriebenen Verfahren, es ergibt sich

$$\dot{u}^a A^b \omega_{[a;b]} = 0 \quad (6.17)$$

$$A^a \omega^b A_{a;b} - \dot{u}^2 \omega^a \omega^b \omega_{a;b} - \omega^2 \omega^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} = 0 \quad (6.18)$$

$$\dot{u}^2 \omega^a \dot{u}^b \omega_{(a;b)} + \omega^2 \dot{u}^a \dot{u}^b \dot{u}_{a;b} - \dot{u}^4 \omega^2 - \frac{1}{3} \dot{u}^2 A^b \Theta_{;b} - \dot{u}^a A^b A_{b;a} = 0. \quad (6.19)$$

Die Propagation von Gleichung (6.17) liefert (unter der Annahme, dass $p' \neq 0$ gilt)

$$\Theta^{;a} A^b \omega_{[a;b]} + \dot{u}^a \omega^{bc} \Theta_{;c} \omega_{[a;b]} = 0. \quad (6.20)$$

Die Propagation der Gleichung (6.18) ergibt keine weitere Zwangsbedingung. Dies wird einsichtig unter Berücksichtigung von $A^a \omega^b A_{a;b} = 1/2 (A^2)_{;b} \omega^b = \dot{u}^2 \omega^a \omega^b \omega_{a;b} + \omega^2 \dot{u}^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)}$, so dass sich Gleichung (6.18) zu einer Identität reduziert.

Gleichung (6.19) kann zunächst mit Hilfe von $\dot{u}^a A^b A_{b;a} = 1/2 \dot{u}^a (A^2)_{;a} = \dot{u}^2 \dot{u}^a \omega^b \omega_{b;a} + \omega^2 \omega^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)}$ vereinfacht werden zu (mit $\dot{u}^2 \neq 0$)

$$\dot{u}^2 \omega^2 + \frac{A^a \Theta_{;a}}{3} + \dot{u}^a \omega^b \omega_{[b;a]} = 0, \quad (6.21)$$

was im betrachteten Fall mit Gleichung (6.10) korrespondiert, so dass die Propagation von (6.11) und (6.21) identisch sind. Die Bestimmung der Propagation der Gleichung (6.21) ergibt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A^a \omega^b \omega_{[b;a]} - \frac{4}{3} \omega^2 \dot{u}^2 \Theta p'' \frac{\rho + p}{p'} + \frac{1}{2} \dot{\Theta} \Theta p' \omega^2 \left(p' - \frac{1}{3} \right) + \\ + p' \Theta^{;a} \omega^b \omega_{[b;a]} + \Theta_{;a} \dot{u}^a \omega^2 p' = 0, \end{aligned} \quad (6.22)$$

wobei (6.21) wiederum zur Vereinfachung eingesetzt und (4.128) herangezogen wurde. Mittels Gleichung (6.10) kann dann weiter vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega^2 \dot{u}^a \Theta_{;a} (1 + p') - \frac{4}{3} \omega^2 \dot{u}^2 \Theta p'' \frac{\rho + p}{p'} + \frac{1}{2} \dot{\Theta} \Theta p' \omega^2 \left(p' - \frac{1}{3} \right) + \\ + p' \Theta^{;a} \omega^b \omega_{[b;a]} = 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Man hat also die neuen Zwangsbedingungen (6.20, 6.23) gefunden, welche allerdings nicht sonderlich hilfreich erscheinen, da diese nun auch Ableitungen enthalten ($\Theta_{;a}$), die nicht direkt weiter verarbeitet werden können. Nichtsdestotrotz soll die Propagation einer der beiden Gleichungen gebildet werden. Man erhält für (6.20)

$$\begin{aligned} 0 = (\Theta^{;a}) \cdot A^b \omega_{[a;b]} - \omega^2 \Theta^{;a} \dot{u}^b \omega_{[a;b]} + 2p' \Theta^{;a} \omega^{bc} \Theta_{;c} \omega_{[a;b]} + \\ + \frac{1}{2} \dot{\Theta} \omega^a \dot{u}^b A_{(a;b)} + \dot{u}^a \omega^{bc} (\Theta_{;c}) \cdot \omega_{[a;b]} + \omega^{bc} \Theta_{;c} \omega_{(b;k)} A^k - \omega^{bc} \Theta_{;c} \omega_{[b;k]} A^k, \end{aligned} \quad (6.24)$$

wobei die bis dahin erhaltenen Zwangsbedingungen eingesetzt wurden. In dieser Gleichung verstärkt sich das Problem der höheren Ableitungen noch weiter. Für die Propagation von (6.23) ergibt sich ein extrem komplizierter und langer Ausdruck, der hier nicht angegeben werden soll.

Man erreicht somit auf diesem Wege keinen Fortschritt. Daher wendet man sich den maxwellartigen Feldgleichungen zu. Durch die zusätzlichen Bedingungen vereinfachen sich diese wie folgt.

Man erhält für Gleichung (4.136) mit Hilfe von (6.17, 6.6)

$$\begin{aligned} \Theta \dot{u}^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + \frac{3}{2} \dot{u}^a \omega^b A_{(a;b)} + \\ + \left(p' + \frac{1}{3} \right) \dot{u}^a \omega^b \Theta_{;(a;b)} = 0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Für Gleichung (4.137) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Theta \dot{u}^4 \left[-\frac{1}{9} + \frac{7}{3} p' - 3 p'' \frac{\rho + p}{p'} + \frac{2}{3} \frac{\rho + p}{p'} \left(p''' \frac{\rho + p}{p'} + p'' \frac{p' - p''(\rho + p)}{p'^2} \right) \right] + \\ + \Theta \dot{u}^a \dot{u}^b \dot{u}_{a;b} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) - \frac{2}{3} \Theta \dot{u}^2 \omega^2 + \left(p' + \frac{1}{3} \right) \dot{u}^a \dot{u}^b \Theta_{;a;b} + \\ + \frac{2}{3} \dot{u}^2 \Theta p'' \frac{\rho + p}{p'} - \frac{7}{9} p' \omega^2 \dot{u}^2 \Theta - \frac{1}{3} p' \dot{u}^2 (\square \Theta + \ddot{\Theta}) + \frac{1}{9} \dot{\Theta} \Theta \dot{u}^2 - \\ - \dot{u}^2 \Theta_{;a} \dot{u}^a \left(-3 p' + \frac{4}{9} - p'' \frac{4\rho + p}{3 p'} \right) - \frac{1}{3} \dot{u}^2 \Theta \dot{u}^a_{;a} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Für Gleichung (4.138) erhält man

$$\begin{aligned} 2 A^a A^b A_{a;b} + \left(p' + \frac{1}{3} \right) A^a A^b \Theta_{;a;b} + \frac{2}{9} \dot{u}^4 \omega^2 \Theta + \frac{5}{9} \dot{u}^2 \Theta \omega^4 + \\ + \Theta A^a A^b \dot{u}_{a;b} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) - \Theta \omega^2 \dot{u}^2 \frac{2}{3} \left(p' \dot{u}^2 - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) - \\ - 2 \omega^2 A^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} - \frac{1}{3} \omega^4 \dot{u}^2 \Theta p' - \frac{1}{3} \Theta \dot{u}^2 \omega^2 \dot{u}^a_{;a} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) - \\ - \frac{1}{3} \omega^2 \dot{u}^2 \Theta_{;a} \dot{u}^a \left(3 p' + \frac{1}{3} - 2 p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + \dot{u}^2 A^a \omega^b \omega_{[a;b]} + \frac{1}{9} \Theta \dot{\Theta} \omega^2 \dot{u}^2 - \\ - \frac{1}{3} \omega^2 \Theta \dot{u}^4 \frac{\rho + p}{p'} \left(p''' \frac{\rho + p}{p'} + p'' \frac{p' - p''(\rho + p)}{p'^2} \right) - \frac{1}{3} \omega^2 \dot{u}^2 p' (\square \Theta + \ddot{\Theta}) = 0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Gleichung (4.139) kann mit Hilfe von (6.19) umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 A^a \Theta_{;a} \left(2 p' - \frac{1}{6} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + \Theta A^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) - \\ - \frac{1}{6} \omega^4 \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \dot{u}^2 \dot{u}^a \omega^b \omega_{[a;b]} - \frac{1}{2} \dot{u}^4 \omega^2 + \left(p' + \frac{1}{3} \right) A^a \dot{u}^b \Theta_{;(a;b)} = 0 \end{aligned} \quad (6.28)$$

und dann mittels Gleichung (6.21) zu

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 A^a \Theta_{;a} \left(2p' - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + \Theta A^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) - \\ - \frac{1}{6} \omega^4 \dot{u}^2 + \left(p' + \frac{1}{3} \right) A^a \dot{u}^b \Theta_{;(a;b)} = 0. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Die Umformung von Gleichung (4.140) ergibt

$$\begin{aligned} \Theta \omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + \frac{\omega^4 \Theta}{3} \left(7p' - \frac{13}{3} \right) + \\ + \frac{1}{9} \Theta \dot{\Theta} \omega^2 + \omega^a A^b \omega_{[a;b]} - \frac{1}{3} p' \omega^2 (\square \Theta + \ddot{\Theta}) + \frac{2}{3} \omega^2 \Theta p'' \frac{\rho + p}{p'} - \\ - \frac{2}{3} \omega^2 \dot{u}^2 \Theta \left(p' - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \omega^2 \dot{u}^a \Theta_{;a} \left(3p' + \frac{1}{3} - 2p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) - \\ - \frac{1}{3} \Theta \dot{u}^2 \omega^2 \frac{\rho + p}{p'} \left(p''' \frac{\rho + p}{p'} + p'' \frac{p' - p''(\rho + p)}{p'^2} \right) + \\ + \left(p' + \frac{1}{3} \right) \omega^a \omega^b \Theta_{;a;b} - \frac{1}{3} \omega^2 \Theta \dot{u}^a_{;a} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Gleichung (4.141) kann mit Hilfe von (6.6) umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \Theta \omega^a A^b \dot{u}_{(a;b)} \left(p' + \frac{1}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) - \frac{5}{2} A^a A^b \omega_{a;b} - \\ - \frac{1}{2} \dot{u}^2 \omega^a \omega^b \omega_{(a;b)} + \left(p' + \frac{1}{3} \right) \omega^a A^b \Theta_{;(a;b)} = 0. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Darüber hinaus ist es möglich, die in Abschnitt 4.12 bezüglich der Divergenz des elektrischen Anteils des Weyltensors gewonnenen Gleichungen weiter umzuformen. Aus Gleichung (4.142) folgt mittels (4.120)

$$\begin{aligned} 2\dot{u}^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)} + \frac{1}{2} \dot{\Theta} \dot{u}^2 \left(p' + 1 - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + \\ + \Theta^2 \dot{u}^2 \left(p' - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} p'' \frac{\rho + p}{p'} - \frac{1}{2} p''^2 \frac{(\rho + p)^2}{p'^2} + \frac{1}{2} p''' \frac{(\rho + p)^2}{p'} \right) + \\ + \Theta \dot{u}^a \Theta_{;a} \left(-\frac{2}{9} + \frac{2}{3} p' + \frac{1}{2} p'^2 - \frac{1}{2} (\rho + p) p'' \right) + \\ + \frac{1}{2} \dot{u}_a \square \dot{u}^a + A^a \Theta_{;a} \left(\frac{9}{4} p'^2 - \frac{3}{2} p' - \frac{1}{4} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Aus Gleichung (4.143) ergibt sich

$$0 = \omega_a \square \dot{u}^a + 4\omega^a \omega^b \omega_{a;b}. \quad (6.33)$$

Aus Gleichung (4.144) erhält man mittels Gleichung (4.121)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}A_a \square \dot{u}^a + \omega^2 \Theta_{;a} \dot{u}^a \left(\frac{3}{2}p' - \frac{9}{4}p'^2 + \frac{13}{12} \right) + \\ & + \Theta \omega^2 \dot{u}^2 \left(3p' - \frac{9}{4}p'^2 - \frac{3}{4}p'' \frac{\rho + p}{p'} + \frac{5}{12} + \frac{9}{4}(\rho + p)p'' \right) + \\ & + \frac{1}{2} \Theta A^a \Theta_{;a} \left(\frac{4}{3}p' - (\rho + p)p'' + p'^2 \right) + 2A^a \omega^b \omega_{(a;b)} = 0. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Für die Divergenzgleichungen des magnetischen Anteils des Weyltensors gelten dann die nachfolgenden Beziehungen. Aus Gleichung (4.92) folgt mittels (6.17)

$$\begin{aligned} & A_s \square \omega^s - 4\omega^a A^b \dot{u}_{(a;b)} = 0 \\ & \stackrel{(6.6)}{\iff} A_s \square \omega^s + 4\dot{u}^a A^b \omega_{(a;b)} = 0. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Aus Gleichung (4.93) folgt

$$\begin{aligned} & \dot{u}_s \square \omega^s - 4\omega^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} = 0 \\ & \stackrel{(6.7)}{\iff} \dot{u}_s \square \omega^s + 4\dot{u}^a \dot{u}^b \omega_{(a;b)} = 0 \end{aligned} \quad (6.36)$$

sowie aus Gleichung (4.94)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\omega_a \square \omega^a - 2\omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} + \omega^a \dot{u}^b \omega_{[a;b]} + \omega^2 \left(\frac{1}{2} \dot{\Theta} (p' + 3) - \right. \\ & \left. - 2\omega^2 - \dot{u}^2 + \frac{1}{2}(\rho + 3p) + \Theta^2 \left(\frac{1}{2}p'^2 - \frac{1}{6}p' - \frac{1}{2}p''(\rho + p) + \frac{1}{3} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.37)$$

All diese Bemühungen zeigen, dass zwar eine Reihe von Vereinfachungen und zusätzlichen Bedingungen gefunden werden konnten, nichtsdestotrotz bleibt das System unter den gegebenen Bedingungen nicht auflösbar, d.h. es ist weder ein Widerspruch zu konstruieren, noch zeigt sich, dass dieses System erfüllbar ist. Hauptprobleme sind das Auftreten von kovarianten Wellenoperatoren, für die das Lösungsverhalten unbekannt ist, und bei der Ableitung neuer Zwangsgleichungen treten Terme höherer Ordnung auf, so dass diese weder auflösbar sind, noch klar ist ob dies wirklich neue Zwangsbedingungen liefert. Im Appendix 8.3 ist ein weiterer Versuch geschildert, diese Schwierigkeiten durch Propagation der Größe $\square \omega^s$ zu umgehen, jedoch tritt auch dort das Problem höherer Ableitungen auf.

Um das Problem weiter zu behandeln, wird daher der Gradient der Expansion angesetzt als

$$\Theta_{;a} = -\dot{\Theta} u_a + a \dot{u}_a + b A_a. \quad (6.38)$$

Hierin bezeichnen a und b zunächst beliebig komplizierte Funktionen. Diese Wahl ist unter der Voraussetzung, dass $\omega_a \dot{u}^a = 0$ und somit auch $\Theta_{;a} \omega^a = 0$ gilt (siehe Gleichung (6.8)), ohne Einschränkungen gültig.

Insbesondere ist jetzt zu beachten, dass $\Theta_{;a}$ ein Gradientenfeld ist. Daraus folgt für die zweite kovariante Ableitung die Bedingung $\Theta_{[a;b]} = 0$, was sich auf den Ansatz (6.38) überträgt. Man kann diese Bedingungen bezüglich der Basisvektorfelder auswerten und erhält

$$0 = \omega^a u^b \Theta_{[a;b]} = a \omega^a u^b \dot{u}_{[a;b]} + b \omega^a u^b A_{[a;b]} \quad (6.39)$$

$$0 = \dot{u}^a u^b \Theta_{[a;b]} = \frac{1}{2} \left(-\dot{\Theta} \dot{u}^2 + \dot{a} \dot{u}^2 - (\dot{\Theta})_{;a} \dot{u}^a \right) + a \dot{u}^a u^b \dot{u}_{[a;b]} + b \dot{u}^a u^b A_{[a;b]} \quad (6.40)$$

$$0 = A^a u^b \Theta_{[a;b]} = \frac{1}{2} \left(\dot{b} \omega^2 \dot{u}^2 - A^a (\dot{\Theta})_{;a} \right) + a A^a u^b \dot{u}_{[a;b]} + b A^a u^b A_{[a;b]} \quad (6.41)$$

$$0 = \dot{u}^a A^b \Theta_{[a;b]} = \frac{1}{2} \left(a_{;b} A^b \dot{u}^2 - b_{;a} \dot{u}^a \omega^2 \dot{u}^2 \right) + \dot{\Theta} \omega^2 \dot{u}^2 - a \Theta p' \omega^2 \dot{u}^2 + b \dot{u}^a A^b A_{[a;b]} \quad (6.42)$$

$$0 = \omega^a A^b \Theta_{[a;b]} = b \omega^a A^b A_{[a;b]} - \frac{1}{2} b_{;a} \omega^a \omega^2 \dot{u}^2 \quad (6.43)$$

$$0 = \dot{u}^a \omega^b \Theta_{[a;b]} = \frac{1}{2} a_{;b} \omega^b \dot{u}^2 + b \dot{u}^a \omega^b A_{[a;b]}. \quad (6.44)$$

Die Bedingungen (6.39, 6.40, 6.41) können weiter umgeformt werden. Man erhält dann, dass Gleichung (6.39) für alle a, b identisch erfüllt ist. In Gleichung (6.40) und (6.41) können die Gleichungen (6.13) und (4.129) sowie der Ansatz (6.38) eingesetzt werden, so dass sich ergibt

$$0 = \dot{a} + a \Theta \left(\frac{2}{3} - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + p' a^2 - b^2 p' \omega^2 - \frac{1}{2} (9p' - 1) \omega^2 b \quad (6.45)$$

$$0 = \dot{b} + b \Theta \left(p' - p'' \frac{\rho + p}{p'} \right) + 2abp' + \frac{9p' - 1}{2} a - \frac{\Theta}{2} \left(\frac{\rho + p}{p'} p'' - 9p' + 1 \right). \quad (6.46)$$

Auch Gleichung (6.44) kann mit Hilfe von (6.6) vereinfacht werden zu

$$0 = \frac{1}{2} a_{;b} \omega^b \dot{u}^2 + b \omega_{(a;b)} \dot{u}^a A^b. \quad (6.47)$$

Darüber hinaus können aus den Gleichungen (6.20), (6.23) und (6.24) Bedingungen für die Koeffizienten a, b gewonnen werden. Hierbei sieht man, dass Gleichung (6.20) für alle a, b identisch erfüllt ist. Aus Gleichung (6.23) erhält man

$$0 = \frac{1}{2} a (1 - p') + \frac{2}{3} abp' - \frac{4}{3} p'' \frac{\rho + p}{p'} \quad (6.48)$$

und aus Gleichung (6.24)

$$0 = \frac{1}{2} \dot{\Theta} \omega^a \dot{u}^b A_{(a;b)} + a A^a A^b \omega_{a;b} - b \omega^2 \dot{u}^a A^b \omega_{(a;b)}. \quad (6.49)$$

Insbesondere an Gleichung (6.48) kann man sehen, dass die beiden Koeffizienten im Gradienten von Θ nicht unabhängig sind. Dieser Umstand wurde indirekt in Kapitel 5 ausgenutzt. Hier folgt umgekehrt, dass wenn $a = 0$ ist, dann ist $p' = \text{const}$. Im folgenden Abschnitt wird davon Gebrauch gemacht.

Man könnte nun versuchen, diese Ergebnisse allgemein auszunutzen. Wie die folgende Untersuchung zeigen wird, ist dies jedoch schon in spezielleren Fällen mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden².

6.1 Die Zustandsgleichung $p = \alpha\rho$

Um die weitere Untersuchung zu ermöglichen, soll angenommen werden, dass die Zustandsgleichung der Raumzeit gegeben ist durch

$$p = \alpha\rho, \quad (6.50)$$

wobei α eine Konstante ist. Es folgt umgekehrt, dass $p' = \alpha$ und $p'' = 0$ gilt. Daher ergibt Gleichung (6.48)

$$0 = a \left(1 - \alpha + \frac{4}{3} b \alpha \right), \quad (6.51)$$

so dass entweder $a = 0$ und b zunächst beliebig ist (Fall **2**), oder aber $b = \frac{3}{4}(1 - 1/\alpha)$ und a beliebig ist (Fall **1**).

Zunächst soll der Fall **1** untersucht werden. Hier ist zunächst a beliebig und für b gilt

$$b = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) = \text{const}. \quad (6.52)$$

Dies kann in Gleichung (6.46) eingesetzt werden, wodurch man die Größe a bestimmen kann

$$a(3\alpha - 1) = -\frac{\Theta}{8}(21\alpha - 5), \quad (6.53)$$

so dass man für $\alpha \neq 1/3$ erhält

$$a = -\frac{\Theta}{8} \frac{21\alpha - 5}{3\alpha - 1} = \beta\Theta \quad (6.54)$$

²Es sei bemerkt, dass man neben den im Folgenden auftretenden Problemen noch die Unbestimmtheit der Zustandsgleichung beachten muss.

mit

$$\beta = -\frac{1}{8} \frac{21\alpha - 5}{3\alpha - 1}. \quad (6.55)$$

Im Fall, dass $\alpha = 1/3$ ist (dies entspricht der Zustandsgleichung für Strahlung), ergibt Gleichung (6.53)

$$\Theta = 0, \quad (6.56)$$

so dass mögliche Lösungen nicht expandierend sind, d.h. die *SFC* ist gültig. Dies wurde schon von Treciokas und Ellis [79] im Rahmen der kinetischen Theorie für allgemeinere Raumzeiten bewiesen.

Somit ist a durch Gleichung (6.53) bestimmt und es ist zu prüfen ob dies mit den anderen Gleichungen konsistent ist. Setzt man die Gleichungen (6.52) und (6.54) in Gleichung (6.47) ein, folgt, da auch $\Theta_{;e}\omega^e = 0$ ist,

$$0 = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \dot{u}^a A^b \omega_{(a;b)}. \quad (6.57)$$

Daher kann nur $\alpha = 1$ gelten (Zeldovich-Fluid) Fall **I**, oder aber

$$0 = \dot{u}^a A^b \omega_{(a;b)} \quad (6.58)$$

(Fall **II**). Auf gleichem Wege erhält man aus Gleichung (6.43)

$$0 = \omega^a A^b A_{[a;b]} \quad (6.59)$$

oder aber erneut $\alpha = 1$, d.h. Fall **I**.

Betrachtet man nun Gleichung (6.45), erhält man durch Einsetzen von a und b

$$0 = \left(\dot{\Theta} + \frac{2}{3}\Theta^2 - \frac{\alpha\Theta^2}{8} \frac{21\alpha - 5}{3\alpha - 1}\right) \frac{21\alpha - 5}{3\alpha - 1} + \omega^2 \left(\frac{63\alpha}{2} - 39 + \frac{15}{2\alpha}\right), \quad (6.60)$$

was sich im Fall **I**, d.h. $\alpha = 1$, zu

$$\dot{\Theta} = \frac{1}{3}\Theta^2 \quad (6.61)$$

vereinfacht. Aus Gleichung (6.42) ergibt sich unter Ausnutzung der Gleichung (6.38)

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{3}{64} \left(\frac{21\alpha - 5}{3\alpha - 1}\right) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \omega^2 \dot{u}^4 + \dot{\Theta} \omega^2 \dot{u}^2 - \\ & - \left(\frac{21\alpha - 5}{3\alpha - 1}\right) \frac{\Theta^2 \omega^2 \dot{u}^2}{8} + \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \dot{u}^a A^b A_{[a;b]}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Dies wird im Fall **I** zu

$$\dot{\Theta} = \Theta^2. \quad (6.63)$$

Das ergibt mit Gleichung (6.61)

$$\frac{1}{3}\Theta^2 = \Theta^2, \quad (6.64)$$

was impliziert, dass die Expansion verschwinden muss. Damit ist die *SFC* unter den gegebenen Annahmen auch für die Zeldovich-Flüssigkeit gezeigt (d.h. Fall **I** ist bewiesen).

Es verbleiben somit die Gleichungen (6.52, 6.53, 6.58, 6.59, 6.60, 6.62) sowie die Gleichung (6.49), die sich aufgrund von (6.58) vereinfacht zu

$$0 = \frac{1}{2}\dot{\Theta}\omega^a\dot{u}^b A_{(a;b)} + aA^a A^b \omega_{a;b}. \quad (6.65)$$

Weiterhin folgt aus Gleichung (6.58) mit Hilfe der Gleichung (6.17)

$$0 = \dot{u}^a A^b \omega_{a;b} \quad (6.66)$$

und damit aus Gleichung (6.6)

$$0 = \dot{u}_{(a;b)}\omega^a A^b. \quad (6.67)$$

Wenn man Gleichung (6.67) ausschreibt, umformt und Gleichung (6.66) beachtet, folgt dann

$$0 = A_{b;a}\omega^a \dot{u}^b. \quad (6.68)$$

Die Propagation der Gleichungen (6.66) und (6.67) wurde schon allgemein behandelt und ergab keine neuen Bedingungen. Eine neue und einfache Bedingung ist hingegen Gleichung (6.59). Deren Propagation ergibt unter Beachtung der anderen Nebenbedingungen

$$0 = \alpha b \omega^2 \omega^a \dot{u}^b A_{[a;b]}. \quad (6.69)$$

Da $\alpha\omega^2 \neq 0$ sein soll, verbleiben die Möglichkeiten $b = 0$ (dies korrespondiert mit $\alpha = 1$, d.h. der Zeldovich-Flüssigkeit, die gerade ausgeschlossen wurde) und

$$0 = \omega^a \dot{u}^b A_{[a;b]}, \quad (6.70)$$

welches die in diesem Rahmen einzige Möglichkeit ist. Zusammen mit Gleichung (6.68) impliziert dies auch

$$0 = \omega^a \dot{u}^b A_{(a;b)}. \quad (6.71)$$

Nutzt man nun Gleichung (6.25) unter Verwendung des Ansatzes (6.38) und Gleichung (6.71) aus, erhält man

$$0 = \Theta \dot{u}^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (1 + \beta), \quad (6.72)$$

dies ist die erste der maxwellartigen Feldgleichungen (6.25) - (6.31) und die weiteren lauten

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta \dot{u}^4}{3} \left(7\alpha - \frac{1}{3} + 2\alpha\beta^2 + \beta^2 + 9\alpha\beta - \frac{4}{3}\beta - \frac{2}{3}b\alpha\beta \right) + \\ & + \Theta \dot{u}^a \dot{u}^b \dot{u}_{a;b} (1 + \beta) \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) + b \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \dot{u}^a \dot{u}^b A_{a;b} - \\ & - \frac{\Theta \dot{u}^2 \omega^2}{3} \left(2 + \frac{7}{3}\alpha - 2\alpha^2 b \right) - \frac{\dot{u}^2 \Theta \dot{u}^a{}_{;a}}{3} \left(\alpha\beta + \alpha + \frac{1}{3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (6.73)$$

$$\begin{aligned} & A^a A^b A_{a;b} \left(2 + b \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \right) + \Theta A^a A^b \dot{u}_{a;b} (1 + \beta) \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) + \\ & + \frac{\dot{u}^4 \omega^2 \Theta}{3} \left(\frac{2}{3} - 2\alpha - 3\alpha\beta - \frac{1}{3}\beta - \alpha\beta^2 - \frac{2}{3}b\alpha\beta - 3\beta \right) - \\ & - 2\omega^2 A^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} - \frac{\Theta \dot{u}^2 \omega^2 \dot{u}^a{}_{;a}}{3} \left(\alpha\beta + \alpha + \frac{1}{3} \right) + \\ & + \frac{\dot{u}^2 \omega^4 \Theta}{3} \left(\frac{5}{3} - \alpha + 2b\alpha^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (6.74)$$

$$\begin{aligned} & \dot{u}^4 \omega^2 \left(2b\alpha + \frac{1}{2}b\beta \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \right) + \Theta (1 + \beta) \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) A^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} - \\ & - \frac{\omega^4 \dot{u}^2}{6} + b \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) A^a \dot{u}^b A_{(a;b)} = 0, \end{aligned} \quad (6.75)$$

$$\begin{aligned} & \Theta \omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} (1 + \beta) \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) + b \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \omega^a \omega^b A_{a;b} + \\ & + \frac{\omega^2 \dot{u}^2 \Theta}{3} \left(3\beta - \alpha\beta^2 - 2\alpha - \frac{2}{3} - 3\alpha\beta - \frac{1}{3}\beta - \frac{2}{3}b\alpha\beta \right) - \\ & - \frac{\Theta \omega^2 \dot{u}^a{}_{;a}}{3} \left(\alpha\beta + \alpha + \frac{1}{3} \right) + \frac{\omega^4 \Theta}{9} (21\alpha - 13 + 2b\alpha^2) = 0, \end{aligned} \quad (6.76)$$

$$-\frac{5}{2} A^a A^b \omega_{a;b} - \frac{1}{2} \dot{u}^2 \omega^a \omega^b \omega_{a;b} + b \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \omega^a A^b A_{(a;b)} = 0. \quad (6.77)$$

Darüber hinaus ergibt Gleichung (6.71) eingesetzt in Gleichung (6.65) dann

$$0 = a A^a A^b \omega_{a;b}. \quad (6.78)$$

Daher verbleiben die Möglichkeiten $a = 0$ (Fall **i**) oder aber

$$0 = A^a A^b \omega_{a;b} \quad (6.79)$$

(Fall **ii**).

Betrachtet man Fall **i**, so ergibt sich für α , da $\Theta \neq 0$ sein soll, aus Gleichung (6.54)

$$\alpha = \frac{5}{21}. \quad (6.80)$$

Dies erfüllt Gleichung (6.60) identisch und Gleichung (6.62) vereinfacht sich zu

$$0 = \dot{\Theta}\omega^2\dot{u}^2 - \frac{12}{5}\dot{u}^a A^b A_{[a;b]}. \quad (6.81)$$

Aus Gleichung (6.11) erhält man dann

$$0 = A^a \omega^b \omega_{[a;b]}. \quad (6.82)$$

Darüber hinaus ergibt Gleichung (6.72)

$$0 = \dot{u}^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)} \quad (6.83)$$

und somit mittels Gleichung (6.7)

$$0 = \dot{u}^a \dot{u}^b \omega_{a;b}. \quad (6.84)$$

Betrachtet man Gleichung (6.77) in diesem Fall

$$\left(\frac{24}{35} - \frac{5}{2}\right) A^a A^b \omega_{a;b} - \left(\frac{1}{2} + \frac{24}{35}\right) \dot{u}^2 \omega^a \omega^b \omega_{a;b} = 0 \quad (6.85)$$

und bildet deren Propagation, erhält man keine neuen Zwangsbedingungen. Im Prinzip verhält sich dieser Fall, da $a = 0$ ist, ähnlich dem Fall **2**, wobei hier einige weitere Gleichungen zur Verfügung stehen und die Zustandsgleichung bereits festgelegt ist.

Wie der Vergleich mit der Bedingungen (6.58, 6.67, 6.83, 6.84) mit den Relationen (4.85, 4.81, 4.78, 4.86) zeigt, konnte das Verschwinden einiger Komponenten des Weyltensors abgeleitet werden. Man erhält

$$H_{ab} \omega^a A^b = 0 \quad (6.86)$$

$$E_{ab} \dot{u}^a A^b = 0 \quad (6.87)$$

$$E_{ab} \omega^a \dot{u}^b = 0 \quad (6.88)$$

$$H_{ab} \dot{u}^a \dot{u}^b = 0. \quad (6.89)$$

Es ist auch zu beachten, dass Gleichung (6.85) zwei Komponenten des magnetischen Anteils des Weyltensors miteinander koppelt. Aus den anderen maxwellartigen Feldgleichungen können mittels Propagation dann weitere Bedingungen abgeleitet werden, deren Konsistenz noch zu prüfen wäre. Dieser Fall soll hier jedoch nicht weiter diskutiert werden und bleibt offen.

Im Fall **ii** folgt dann mit Gleichung (6.59)

$$0 = \omega^a A^b A_{(a;b)}. \quad (6.90)$$

Nutzt man nun die Gleichung (6.77) mit dem Ansatz (6.38) unter Beachtung von (6.67), (6.78) und (6.90) aus, erhält man

$$0 = \dot{u}^2 \omega^a \omega^b \omega_{a;b}, \quad (6.91)$$

so dass, da $\dot{u}^2 \neq 0$ sein soll,

$$0 = \omega^a \omega^b \omega_{a;b} \quad (6.92)$$

gilt. Die Propagation von Gleichung (6.79) und Gleichung (6.92) ergibt nichts Neues. Betrachtet man jetzt Gleichung (6.72), ergeben sich drei Lösungsmöglichkeiten $\beta = -1$, was impliziert $\alpha = 1$, dann $\alpha = -1/3^3$ oder aber

$$0 = \dot{u}^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)}. \quad (6.93)$$

Die erste Möglichkeit korrespondiert mit dem schon bewiesenen Fall der Zeldovich-Flüssigkeit.

Die zweite Variante führt in Gleichung (6.76) zu

$$\omega^2 \dot{u}^2 \left(2\dot{u}^2 + \frac{\omega^2}{6} \right) = 0. \quad (6.94)$$

Die Klammer kann nicht Null werden, da beide Terme positiv sein müssen. Somit folgt, dass $\omega^2 \dot{u}^2 = 0$ und die *SFC* gilt.

Es verbleibt daher Gleichung (6.94) was mittels (6.7) auch

$$0 = \dot{u}^a \dot{u}^b \omega_{a;b} \quad (6.95)$$

impliziert.

Somit konnten einige Aussagen über die Struktur des Weyltensors abgeleitet werden. Es ergibt sich zwangsläufig, dass bestimmte Komponenten des Weyltensors identisch verschwinden müssen. Aus dem Vergleich der Ergebnisse (6.58, 6.67, 6.79, 6.92, 6.93, 6.95) mit den Relationen (4.85, 4.81, 4.88, 4.83, 4.78, 4.86) erhält man

$$H_{ab} \omega^a A^b = 0 \quad (6.96)$$

$$E_{ab} \dot{u}^a A^b = 0 \quad (6.97)$$

$$H_{ab} A^a A^b = 0 \quad (6.98)$$

$$H_{ab} \omega^a \omega^b = 0 \quad (6.99)$$

$$E_{ab} \omega^a \dot{u}^b = 0 \quad (6.100)$$

$$H_{ab} \dot{u}^a \dot{u}^b = 0. \quad (6.101)$$

³Für einen kurzen Verweis zu derartigen Zustandsfunktionen, sei auf einige Seiten später verwiesen.

Es verbleiben zur Untersuchung die maxwellartigen Feldgleichungen (6.74) - (6.77). Anhand der Gleichung (6.77) wird im Folgenden gezeigt wie dies geschehen kann. Zuerst ist es nützlich zu bemerken, dass Gleichung (6.60) einen Ausdruck für $\dot{\Theta}$ in Abhängigkeit von ω und Θ liefert. Dies kann in die Raychaudhuri-Gleichung (4.75) eingesetzt werden, so dass man einen Ausdruck für $\dot{u}^a_{;a}$ in Abhängigkeit von ω , Θ und ρ sowie der Zustandsgröße α erhält

$$\dot{u}^a_{;a} = -\Theta^2 \left(\frac{1}{3} + \alpha\beta \right) + \frac{\omega^2}{8\beta} \left(\frac{63\alpha}{2} - 39 + \frac{15}{2\alpha} - 16\beta \right) + \frac{\rho}{2}(1 + 3\alpha), \quad (6.102)$$

welche man in Gleichung (6.77) einsetzen kann, wodurch man erhält

$$\Theta \omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} (1 + \beta) \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) + b \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \omega^a \omega^b A_{a;b} + C = 0. \quad (6.103)$$

Hierin bezeichnen C und die in Kürze eingeführten Größen D, E, F, G, H, I Funktionen, die von $\omega, \Theta, \rho, \dot{u}, \alpha$ abhängen. Deren genaue Gestalt ist im Anhang 8.4 angegeben.

Bildet man nun die Propagation der Gleichung (6.103), ergibt sich

$$D + \omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} E \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) - b \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \frac{\omega^2}{2} \omega^a \dot{u}^b \omega_{a;b} = 0, \quad (6.104)$$

wobei Gleichung (6.103) wieder zur Vereinfachung verwendet wurde. Die Ableitung von C führt wiederum nur zu Ausdrücken, die von $\omega, \Theta, \rho, \dot{u}, \alpha$ abhängen, denn die auftretenden Ableitungen der Größen können durch die entsprechenden Relationen (4.43, 6.60, 4.14, 4.130) substituiert werden. Daher ist Gleichung (6.104) eine neue Bedingung, die ebenfalls zu lösen ist. Anstatt dies zu versuchen, wird wiederum die Propagation von (6.104) bestimmt

$$F + \omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} G \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) - b^2 \alpha \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \frac{\omega^2}{2} \omega^a A^b \omega_{a;b} = 0, \quad (6.105)$$

wobei die Gleichungen (6.103) und (6.104) zur Vereinfachung benutzt wurden. Diese Bedingung ist ebenso zu erfüllen. Die Propagation von (6.105) liefert dann

$$H + \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} = 0, \quad (6.106)$$

was im Prinzip eine weitere Komponente des elektrischen Anteils des Weyltensors festlegt. (Es ist dann auch zu zeigen, dass $I \neq 0$ ist.) Da auch die Gleichungen (6.103), (6.104) und (6.105) Aussagen über die Weyltensorkomponenten enthalten, können diese im Prinzip angegeben werden. Andere Ansätze führen demnach definitiv nicht zu Lösungen, da die

gerade abgeleiteten Gleichungen verletzt werden würden. Das heißt aber nicht, dass bei geeigneter Wahl dies wirklich Lösungen der maxwellartigen Feldgleichungen sind.

Dies wird ersichtlich wenn man Gleichung (6.106) noch einmal ableitet und wiederum Gleichung (6.106) verwendet, was

$$\dot{H} + \left(\alpha + \frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} \Theta \dot{u}^2 \omega^2 I - \alpha IC - \frac{H\dot{I}}{I} - 2H\Theta(\alpha - 1) = 0 \quad (6.107)$$

ergibt. Hier ist bemerkenswert, dass dies eine Gleichung ist, die nur noch von $\rho, \omega, \Theta, \dot{u}, \alpha$ abhängt und somit die kinematischen Invarianten ω, Θ, \dot{u} in ihrer direkten Abhängigkeit von den Quellen ρ, α zeigt. Dabei treten alle Größen in Produkten der neunten Ordnung auf, wenn man diese Größen als dimensionsbehaftet ansieht.

Darüber hinaus ist es möglich, die Gleichung (6.107) noch mehrmals weiter abzuleiten, so dass sich eine Reihe weiterer derartiger Gleichungen ergibt, wobei zu zeigen wäre, ob diese alle miteinander widerspruchsfrei in Einklang zu bringen sind. Das ist vermutlich nicht der Fall, da die Anzahl dieser algebraischen Bedingungen groß ist. Dies liegt vor allen Dingen daran, dass ähnliche Untersuchungen für die noch nicht betrachteten maxwellartigen Feldgleichungen durchgeführt werden können. Man kann auch versuchen, die kinematischen Größen und die Energiedichte aus den Gleichungen zu eliminieren, so dass man letztendlich ein Polynom für α erhält, dessen Nullstellen dann mögliche Lösungen beschreiben. Dass für alle derartige Gleichungen wenigstens eine Nullstelle übereinstimmt, erscheint unwahrscheinlich. Es herrscht daher der Anschein, dass der hier behandelte Fall, in dem der Gradient der Expansion eine Komponente in \dot{u}_a -Richtung besitzt, ausgeschlossen ist. Der explizite Beweis kann hier nicht gegeben werden, denn die Bestimmung von Gleichung (6.107) ergibt einen Ausdruck der für Betrachtungen „per Hand“ wesentlich zu umfangreich ist und aufgrund seiner Größe bei der Benutzung von Computeralgebrasystemen zu deren Absturz führt.

Es ist nun angezeigt, den Fall **2**, d. h. $a = 0$, zu untersuchen. In diesem Fall ergibt sich aus Gleichung (6.45)

$$0 = b(b\alpha + \frac{1}{2}(9\alpha - 1)), \quad (6.108)$$

so dass entweder $b = 0$ (Fall **A**) sein muss, oder aber $b = 1/2(1/\alpha - 9)$ (Fall **B**) ist. Zuerst beweist man schnell den Fall **A**, da aus Gleichung (6.46) folgt

$$0 = \Theta/2(1 - 9\alpha), \quad (6.109)$$

so dass dann nur die Möglichkeit bleibt, dass $\alpha = 1/9$ ist. Die Richtigkeit der *SFC* für diese Zustandsgleichung wurde schon von Van den Bergh in [81] bewiesen. Damit ist dieser Teil bewiesen.

Im Fall **B**, d.h.

$$b = 1/2(1/\alpha - 9), \quad (6.110)$$

ist Gleichung (6.46) identisch erfüllt. Hingegen liefert Gleichung (6.47)

$$0 = (1/\alpha - 9)\dot{u}^a A^b \omega_{(a;b)}, \quad (6.111)$$

so dass wiederum $\alpha = 1/9$ gelten muss, was ausgeschlossen ist (siehe [81]), oder aber

$$0 = \dot{u}^a A^b \omega_{(a;b)} \quad (6.112)$$

gilt. Ebenso erhält man aus Gleichung (6.43)

$$0 = \omega^a A^b A_{[b;a]} \quad (6.113)$$

und aus Gleichung (6.42)

$$0 = \dot{\Theta} \omega^2 \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - 9 \right) \dot{u}^a A^b A_{[a;b]}. \quad (6.114)$$

Aus Gleichung (6.6) folgt dann mittels (6.17) und (6.112)

$$\omega^a A^b \dot{u}_{(a;b)} = 0 \quad (6.115)$$

sowie dann einfach

$$\dot{u}^a \omega^b A_{b;a} = 0. \quad (6.116)$$

Die Propagation der Gleichung (6.113) liefert die Bedingung

$$0 = \alpha b \omega^2 \omega^a \dot{u}^b A_{[a;b]}. \quad (6.117)$$

Der Fall, dass $\alpha \omega^2 = 0$ ist, ist ausgeschlossen. Die Aussage, dass $b = 0$ ist, ergibt wiederum $\alpha = 1/9$, was gerade die *SFC* erfüllt. Es verbleibt somit

$$0 = \omega^a \dot{u}^b A_{[a;b]} \quad (6.118)$$

und daher mit Hilfe von (6.116) auch

$$0 = \dot{u}^a \omega^b A_{(a;b)}. \quad (6.119)$$

Weiterhin folgt aus Gleichung (6.11) für $a = 0$

$$0 = A^a \omega^b \omega_{[a;b]}. \quad (6.120)$$

Nun ist es nützlich, sich den maxwellartigen Feldgleichungen (6.25)-(6.31) zuzuwenden. Diese nehmen mittels der obigen Bedingungen die Form an:

$$\Theta \dot{u}^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) = 0, \quad (6.121)$$

$$\begin{aligned} \Theta \dot{u}^4 \left(\frac{7}{3} \alpha - \frac{1}{9} \right) + \Theta \dot{u}^a \dot{u}^b \dot{u}_{a;b} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) + b \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \dot{u}^a \dot{u}^b A_{a;b} - \\ - \omega^2 \dot{u}^2 \Theta \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{9} \alpha - \frac{2}{3} \alpha^2 b \right) - \frac{\Theta \dot{u}^2}{3} \dot{u}^a{}_{;a} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (6.122)$$

$$\begin{aligned} 2A^a A^b A_{a;b} + b \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) A^a A^b A_{a;b} + \frac{2\omega^2 \dot{u}^4 \Theta}{3} \left(\frac{1}{3} - \alpha \right) + \\ + \frac{\omega^4 \dot{u}^2 \Theta}{3} \left(\frac{5}{3} - \alpha + 2\alpha^2 b \right) - \frac{\Theta \omega^2 \dot{u}^2}{3} \dot{u}^a{}_{;a} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) + \\ + \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \Theta A^a A^b \dot{u}_{a;b} - 2\omega^2 A^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} = 0, \end{aligned} \quad (6.123)$$

$$\begin{aligned} 2\alpha b \dot{u}^4 \omega^2 + \Theta \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) A^a \dot{u}^b \dot{u}_{(a;b)} - \frac{\omega^4 \dot{u}^2}{6} + \\ + b \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) A^a \dot{u}^b A_{(a;b)} = 0, \end{aligned} \quad (6.124)$$

$$\begin{aligned} \Theta \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \omega^a \omega^b \dot{u}_{a;b} + \frac{\omega^4 \Theta}{3} \left(7\alpha - \frac{13}{3} + 2\alpha^2 b \right) - \\ - \frac{2\omega^2 \dot{u}^2 \Theta}{3} \left(\alpha - \frac{1}{3} \right) + b \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \omega^a \omega^b A_{a;b} - \\ - \frac{\omega^2 \Theta}{3} \dot{u}^a{}_{;a} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (6.125)$$

$$-\frac{5}{2} A^a A^b \omega_{a;b} - \frac{1}{2} \dot{u}^2 \omega^a \omega^b \omega_{a;b} + b \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \omega^a A^b A_{(a;b)} = 0, \quad (6.126)$$

wobei auch Gleichung (4.69) verwendet wurde.

Betrachtet man Gleichung (6.121), ergeben sich zwei Möglichkeiten für deren Lösung. Die Erste ist

$$\alpha = -\frac{1}{3}, \quad (6.127)$$

welche als Zustandsgleichung $p = -\rho/3$ ungewöhnlich wirkt, jedoch schon im Rahmen von sogenannten Quintessenz-Modellen oder k -Inflationsmodellen betrachtet wurde (siehe z. B. [1, 15]). Hier ergibt sich jedoch einfach aus (6.125)

$$\omega^2 = 24\dot{u}^2 \quad (6.128)$$

und aus (6.121)

$$0 = \dot{u}^2 \Theta \left(8\dot{u}^2 + \frac{23}{3}\omega^2 \right), \quad (6.129)$$

so dass mittels (6.128) folgt

$$\dot{u}^4 \Theta = 0. \quad (6.130)$$

Dies zeigt wiederum die Gültigkeit der *SFC* im betrachteten Fall. Es ist daher die andere Möglichkeit der Lösung von Gleichung (6.120)

$$\dot{u}^a \omega^b \dot{u}_{(a;b)} = 0 \quad (6.131)$$

weiter zu untersuchen. Es ergibt sich direkt aus Gleichung (6.7)

$$\dot{u}^a \dot{u}^b \omega_{a;b} = 0. \quad (6.132)$$

Aus Gleichung (6.126) erhält man somit durch Umformung des letzten Terms

$$\dot{u}^2 \omega^a \omega^b \omega_{a;b} \left(\left(\alpha + \frac{1}{3} \right) b - 1 \right) - A^a A^b \omega_{a;b} \left(\left(\alpha + \frac{1}{3} \right) b + 5 \right) = 0. \quad (6.133)$$

Die Propagation dieser Gleichung ergibt dann keine neuen Zwangsbedingungen.

Bis zum jetzigen Punkt der Betrachtung konnten einige Bedingungen an die konforme Struktur der möglichen Raumzeiten gewonnen werden. Wenn man die Gleichungen (6.112, 6.115, 6.131, 6.132) mit den Relationen (4.87, 4.79, 4.78, 4.86) vergleicht, erhält man, dass folgende Weyltensorkomponenten identisch verschwinden müssen

$$H_{ab} \dot{u}^a A^b = 0 \quad (6.134)$$

$$E_{ab} \omega^a A^b = 0 \quad (6.135)$$

$$E_{ab} \dot{u}^a \omega^b = 0 \quad (6.136)$$

$$H_{ab} \dot{u}^a \dot{u}^b = 0. \quad (6.137)$$

Insbesondere zeigt die Gleichung (6.133), dass die Weyltensorkomponenten $H_{ab} \omega^a \omega^b$ und $H_{ab} A^a A^b$ (man beachte die Relationen (4.83, 4.88)) nicht unabhängig von einander gewählt werden können. Darüber hinaus ist klar, dass der Gradient der Expansion nur einen Anteil in A_a -Richtung haben kann (neben der zeitlichen Änderung). Aber es ist zu unterstreichen, dass man nun nicht zu weiteren Resultaten gelangen kann. Dies soll kurz plausibel gemacht werden.

Man kann im Prinzip nach der immer wieder benutzten Methode die Gleichungen (6.122)-(6.125) weiteren Propagationen unterziehen. Hierbei tritt jedoch folgendes Problem auf:

In den Gleichungen treten Terme auf, die aus den Gradienten der kinematischen Größen gebildet und mit Θ gemischt sind. Diese ergeben bei der Ableitung dann auch Ausdrücke, die $\dot{\Theta}$ enthalten. Für diese besteht hier im Gegensatz zu Fall **1** (dort Gleichung (6.60)) keine Möglichkeit der Substitution durch Terme, die nicht Ableitungen enthalten. Bestenfalls kann man die Raychaudhuri-Gleichung (4.75) benutzen, erhält dann aber Terme, die $\dot{u}^a{}_{;a}$ enthalten. Für diese ist auch keine bessere Beschreibung möglich. Andersherum kann man die Raychaudhuri-Gleichung (4.75) verwenden, um die $\dot{u}^a{}_{;a}$ enthaltenden Terme aus den Gleichungen (6.122, 6.123, 6.125) zu substituieren, man erhält dann Terme, die unter anderem $\dot{\Theta}$ enthalten. Wenn man die Gleichungen dann genügend oft weiter ableitet, erhält man somit eine Differentialgleichung, die sehr hohe Ableitungsstufen von Θ enthält, die man vermutlich nicht lösen kann, im Gegensatz zu algebraischen Relationen zwischen den kinematischen Invarianten und den Quellen wie in den vorangegangenen Betrachtungen. Bemerkenswert ist, dass sich ein Teil der inhomogenen Wellengleichungen (6.35, 6.36) durch (6.115, 6.132) zu homogenen Wellengleichungen

$$A_a \square \omega^s = 0 \quad (6.138)$$

$$\dot{u}_a \square \omega^a = 0 \quad (6.139)$$

vereinfacht haben. Leider hilft dies auch nicht, da man auch hier kein Lösungsverfahren kennt.

Es sei hier daher eine weitere Zusatzannahme gemacht, die eine Lösung des Problems erlaubt. Folgend aus der obigen Diskussion fordert man

$$\dot{u}^a{}_{;a} = 0. \quad (6.140)$$

Dies vereinfacht die Raychaudhuri-Gleichung (4.75) zu

$$\dot{\Theta} = 2\omega^2 - \frac{1}{3}\Theta^2 - \frac{1}{2}\rho(1 + 3\alpha). \quad (6.141)$$

Weiterhin vereinfachen sich die Gleichungen (6.14) - (6.16) zu

$$0 = \omega^a \omega^b \omega_{a;b} \quad (6.142)$$

$$4A^a \omega^b \omega_{b;a} = \Theta \omega^2 \dot{u}^2 (1 - 9\alpha) \quad (6.143)$$

$$4\omega^a \dot{u}^b \omega_{a;b} = -\frac{1}{4\alpha}(9\alpha - 1)^2 \omega^2 \dot{u}^2 - \dot{u}^2 \left(\left(3 + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\rho}{2} + 2\omega^2 - \frac{1}{3}\Theta^2 \right). \quad (6.144)$$

Bildet man die Propagation der Gleichung (6.143) und benutzt dann die Gleichungen (6.143, 6.144), um die Ableitungen des Rotationsfeldes zu eliminieren, sowie die Gleichungen (6.141, 4.43, 4.130, 4.14), um die anderen Ableitungen zu eliminieren, erhält man

$$-\frac{4\alpha}{3}\Theta^2 - \omega^2 \left(8\alpha + \frac{32}{3} + (9\alpha - 1)^2 \right) + 2\rho(3\alpha + 1) = 0. \quad (6.145)$$

Bildet man nun die Propagation von Gleichung (6.145), erhält man unter Ausnutzung der üblichen Bedingungen

$$-\omega^2 \left(\left(\alpha - \frac{2}{3} \right) \left(8\alpha + \frac{32}{3} + (9\alpha - 1)^2 \right) + \frac{8}{3}\alpha \right) + \frac{4}{9}\alpha\Theta^2 - 3\rho \left(\alpha + \frac{1}{3} \right)^2 = 0. \quad (6.146)$$

Aus Gleichung (6.145) folgt

$$\frac{4}{3}\alpha\Theta^2 = -\omega^2 \left(8\alpha + \frac{32}{3} + (9\alpha - 1)^2 \right) + 2\rho(3\alpha + 1), \quad (6.147)$$

so dass sich Gleichung (6.146) vereinfachen lässt zu

$$-\omega^2 \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \left(8\alpha + \frac{32}{3} + (9\alpha - 1)^2 \right) + \frac{8}{3}\alpha \right) + \rho(1 - 3\alpha) \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) = 0. \quad (6.148)$$

Die Propagation der letzten Gleichung ergibt dann

$$2\omega^2 \left(\alpha - \frac{2}{3} \right) \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \left(8\alpha + \frac{32}{3} + (9\alpha - 1)^2 \right) + \frac{8}{3}\alpha \right) - \rho(1 + \alpha)(1 - 3\alpha) \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) = 0. \quad (6.149)$$

Man kann nun ω^2 aus Gleichung (6.149) mit Hilfe von Gleichung (6.148) eliminieren. Dies ergibt

$$\rho(1 - 3\alpha) \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{3} - 3\alpha \right) = 0 \quad (6.150)$$

und man kann die möglichen Werte für α ablesen, so dass $\rho \neq 0$ ist. Die Möglichkeiten $\alpha_1 = -\frac{1}{9}$ und $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$ wurden schon ausgeschlossen, so dass nur noch $\alpha_3 = \frac{1}{3}$ zu untersuchen ist. Aber man findet sogleich, dass dann aus Gleichung (6.149) folgt, dass $\omega^2 = 0$ ist. Damit folgt wiederum die *SFC*.

Für diesen Beweis war die Betrachtung der maxwellartigen Feldgleichungen nicht mehr notwendig. Andererseits ist die Bedingung (6.140) eine sehr starke, so dass man über Verallgemeinerungen, die (6.140) abschwächen, wenig erfährt.

6.2 Folgerungen aus diesen Betrachtungen

Auch für diesen Beweis wird auf die Annahme von Symmetrien oder auf Einschränkungen der konformen Krümmung verzichtet. Weiterhin sei bemerkt, dass der betrachtete Fall dem allgemeinen stark ähnelt. Die Vereinfachungen, die durch die Annahme $\dot{u}^a\omega_a = 0$ erzielt werden, erweisen sich als marginal zur allgemeinen Lösung des Problems. Mithin

verschwinden nur bestimmte Terme und es gilt $\Theta_{;a}\omega^a = 0$, was auch nicht sonderlich hilfreich ist.

Darüber hinaus ergibt die zeitliche Entwicklung der Zwangsbedingungen (4.29)-(4.31) zwar zunächst einige neue Bedingungen, deren weitere Propagation führt dann aber zu Termen höherer Differentiationsstufe. Auch die Betrachtung der maxwellartigen Feldgleichungen ist nicht gewinnbringend.

Diese Probleme können dann teilweise, mit Hilfe einer Annahme für den Gradienten der Expansion (6.38), umgangen werden. Das führt zu einer Reihe verwertbarer Relationen (6.39)-(6.49), wodurch dann detaillierte Untersuchungen, für den Fall $p = \alpha\rho$ mit $\alpha = \text{const}$, ermöglicht werden. Als Konsequenz ergibt sich eine defizile Fallunterscheidung, die hauptsächlich in zwei Richtungen verläuft. Die erste Variante ist, dass der Gradient der Expansion neben der zeitlichen Entwicklung Komponenten in \dot{u}^a - und A^a -Richtung aufweist. Hierfür können bestimmte Werte von α (d.h. $\alpha = 1/3$ und $\alpha = 1$) definitiv ausgeschlossen und ein plausibles Argument gefunden werden, dass dieser Fall vollständig ausgeschlossen ist, so dass ein weiterer Spezialfall der *SFC* bewiesen wurde.

Für den Fall, dass der Gradient neben der zeitlichen Änderung nur eine Komponente in A^a -Richtung besitzt, können nur bestimmte Werte von α ausgeschlossen (d.h. $\alpha = 1/9$ und $\alpha = -1/3$) und gewisse Bedingungen an die konforme Struktur der Raumzeit abgeleitet werden. Dagegen ist die zusätzliche Forderung $\dot{u}^a{}_{;a} = 0$ sofort in Widerspruch mit den Annahmen zu bringen. Für die Bestimmung von möglichen Lösungen der einsteinschen Feldgleichungen, die der *SFC* widersprechen, erscheint dieser Fall als ein vielversprechender Kandidat.

Diese nicht auszuschließende Möglichkeit ist nicht abwegig. Wie schon erwähnt wurde, zeigt die Arbeit [65], dass räumlich homogene, konform-stationäre Modelle mit $\rho = -p$ existieren, welche der Bedingung $\dot{u}^a\omega_a = 0$ genügen. Konsequenterweise haben diese Modelle keinen Gradienten der Expansion. Lässt man nun die Einschränkungen der räumlichen Homogenität und der Konformstationarität fallen, erscheint es möglich, dass man auch die Zustandsgleichung $\rho = -p$ ändern kann.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Die Arbeit widmet sich der Untersuchung scherungsfreier Fluide in der Allgemeinen Relativitätstheorie und dabei insbesondere der Suche nach rotierenden und expandierenden Lösungen beziehungsweise dem Ausschluss derselben. Nach der Einführung eines geeigneten, allgemeingültigen Fluidformalismus, der neben den einsteinschen Feldgleichungen die Ricci- und Bianchi-Identität ausnutzt (siehe z. B. auch [55, 40, 29, 30, 27]), wird dieser zunächst zur Untersuchung von scherungsfreien Raumzeiten mit verschwindender Divergenz des Weyltensors für verschiedene thermodynamische Modelle benutzt.

Für die lineare und erweiterte Thermodynamik zeigt sich, dass die Struktur der möglichen Raumzeiten sehr einfach ist. Für eine genaue Charakterisierung siehe die Diagramme 3.1 und 3.2. Die meisten der verbleibenden Raumzeiten besitzen keine ausgezeichneten Vektorfelder, d.h. weder Rotation noch Beschleunigung sind möglich und auch die Struktur der Quellen ist sehr einfach, der Wärmestrom ist unterdrückt und räumliche Gradienten der Energiedichte und des Druckes verschwinden. Diese Raumzeiten können daher als weitgehend homogen und isotrop bezeichnet werden, was ohne die Forderung von Symmetrien an die Mannigfaltigkeiten erreicht wurde. Überdies sind viele dieser Modelle auch konformflach. Raumzeiten mit ausgezeichneten kinematischen Vektorfeldern besitzen dagegen eine festgelegte Zustandsgleichung. Diese Zustandsgleichung ist, wie auch bei einigen der oben genannten Modellen, jene der kosmologischen Konstante mit $\rho = -p$. Gerade diese Quelle kann als eine Art „natürlicher Zustand“ der Quellen bezeichnet werden, welcher die kinematische Struktur am wenigsten einschränkt.

Überraschenderweise sind die Aussagen der erweiterten Thermodynamik detaillierter als die der linearen Thermodynamik.

Aber es sei kritisch angemerkt: Diese Untersuchungen geben eine Aussage über das Ver-

halten von Gravitationstheorie und Thermodynamik zueinander. Sie zeigen, dass beide Theorien nicht im eigentlichen Sinn vereinigt sind. Dem Gravitationsfeld können keine thermodynamische Eigenschaften zugeordnet werden. Man kann nur die Folgen verschiedener thermodynamischer Modelle für eine Raumzeitklasse untersuchen und erhält dann entsprechende Resultate. Dies ist daher wichtig zu bemerken, da zur Klasse der hier behandelten Raumzeiten die Friedmann-Robertson-Walker-Modelle, die äußere Schwarzschildmetrik und die Kerr-Modelle gehören. Insbesondere den letzten Beiden schreibt man über andere Methoden Entropie und Temperatur zu (siehe beispielsweise [33]). Auf diesen Punkt wird am Ende der Diskussion zurückgekommen.

Die weitere Untersuchung ist der Beschreibung von idealen Fluiden gewidmet, die scheinungsfrei sind, rotieren und eine Expansion besitzen, wobei an die konforme Geometrie keine Bedingungen gestellt werden. Nach einleitenden Bemerkungen, die den Wissenstand auf der Suche nach derartigen Modellen oder deren allgemeinen Ausschluss zusammenfassen und der Konstruktion eines geeigneten Basissystems, können entscheidende Relationen, die für derartige Raumzeiten gelten müssen und Erhaltungssätze gefunden werden (siehe Kapitel 4.3 und 4.4). Dies schliesst an die Ergebnisse der Arbeiten [35, 67, 73, 75] an. Ein geometrischer Weg, der Identitäten des Weyltensors benutzt, führt dann zu den gleichen Ergebnissen und erweitert somit die in [55] erhaltenen Resultate.

In den Kapiteln 4.7 und 4.8 werden die divergenzartigen Anteile der maxwellartigen Feldgleichungen untersucht und es wird gezeigt, dass diese in der Form von inhomogenen, kovarianten Wellengleichungen geschrieben werden können. Leider kann diese interessante Tatsache nicht ausgenutzt werden, da keine Lösungsmechanismen für derartige Gleichungen bekannt sind. Dies eröffnet jedoch eine andere Betrachtungsmöglichkeit der *SFC* im Rahmen der einsteinschen Gravitationstheorie und ihrer Grenzfälle, welcher hier nur kurz angesprochen werden soll. Die kovarianten Wellengleichungen gehen in der linearisierten, einsteinschen Theorie in normale Wellengleichungen über, die sich durch die retardierten Potentiale exakt lösen lassen. Es wäre dann zu zeigen, ob diese Lösungen selbstkonsistent sind. In jedem Fall würde dies erhellen ob die *SFC* einen vordringlich relativistischen Grund hat (heißt die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen) oder in der Nichtlinearität der einsteinsche Feldgleichungen begründet ist.

Im Abschnitt 4.9 wird bewiesen, dass mit Hilfe der in den Kapiteln 4.3 und 4.4 erhaltenen Relationen die zeitliche Entwicklungsgleichung für den magnetischen Anteil des Weyltensors, unabhängig von weiteren Annahmen an den magnetischen und elektrischen Anteil des Weyltensors identisch erfüllt ist (siehe Satz 10). Dagegen zeigen die Ergebnisse im Kapitel 4.10, welche für die zeitliche Entwicklung des elektrischen Anteils des Weyltensors zu einem komplizierten Gleichungssystem führen und einen Vergleich mit den maxwellschen

Gleichungen nahe legen, der am Ende des genannten Kapitels erfolgt.

Um die maxwellartigen Feldgleichungen ausnutzen zu können ist es notwendig, die Wärmestromgleichung weiter zu zerlegen und deren Evolution zu betrachten und geeignete Umformungen zu finden, die Terme höherer kovarianter Ableitung in Terme geringerer Differentiationsstufe überführt, welche dann durch bekannte Ausdrücke zu beschreiben sind. Dies geschieht in den Kapiteln 4.11 und 4.12.

Nach dieser weitgehenden Umformulierung der vorhandenen Gleichungen wird in Kapitel 5 bewiesen, dass Raumzeiten mit gradientenfreier Expansion, nicht gleichzeitig rotieren und expandieren können, wobei keine Aussagen über Homogenität oder Isotropie der Raumzeit oder der konformen Struktur zugrundegelegt wurden. Die in diesem und im folgenden Kapitel gezeigten Beweise basieren auf der Widerspruchsannahme. Es wird angenommen, dass es scherungsfreie ideale Fluidlösungen der einsteinschen Feldgleichungen gibt mit der Eigenschaft, dass $\omega_{\Theta} \neq 0$ und $\dot{u} \neq 0$ und dann gezeigt, dass dies zum Widerspruch führt, wodurch eine der Annahmen falsch ist. Interessanterweise erhält man zunächst eine Einschränkung der möglichen Zustandsfunktionen. Nach der Anwendung eines Propagationsmechanismus auf verschiedenartige Zwangsbedingungen ergeben sich neue Zwangsbedingungen, die beginnen, die konforme Struktur der Raumzeit festzulegen. Mittels dieser Bedingungen gelingt dann die Vereinfachung der verbliebenen, untersuchbaren maxwellartigen Feldgleichungen und schließlich die Reduzierung der Lösbarkeitsbedingungen auf Differentialgleichungen für die Zustandsfunktion, welche schließlich zum Widerspruch führen. Somit ist ein weiterer Spezialfall der *SFC* bewiesen worden. Die physikalischen Konsequenzen dieser Aussage werden diskutiert. Darüber hinaus ist dies von Interesse für störungstheoretische Untersuchungen von langsam rotierenden Lösungen und deren Kollapsverhalten (für einen Überblick siehe z. B. [7] und die darin zitierte Literatur), da es zeigt, dass es nicht möglich ist rotierende Lösungen mit ein wenig Expansion zu modellieren.

Im letzten Kapitel wird dann dieselbe Strategie auf die Situation angewendet, in der Rotationsvektor und Beschleunigungsvektor orthogonal sind. Auch jetzt werden keine weiteren Annahmen zu Symmetrien der Raumzeit oder der konformen Struktur gemacht. Jedoch ist hier die Lage eine andere als im vorangegangenen Fall: Zunächst ergeben die Propagation der Zwangsbedingungen wenig verwertbare Informationen. Die neuen Zwangsbedingungen sind nicht auflösbar, d.h. sie enthalten Terme höherer Ableitung oder Produkte von Termen geringerer Ordnung die nicht durch bekannte Terme darstellbar sind. Überdies ist und bleibt die Zustandsgleichung vollständig unbestimmt. Ein Weg diese Probleme teilweise zu umgehen, ist der allgemeingültige Ansatz für den Gradienten der Expansion, der einige Vereinfachungen und Einschränkungen erlaubt. Unter der Annahme, dass die Zustandsgleichung eine einfache ist, d.h. $p = \alpha\rho$ mit $\alpha = const$, kann dann für eine Reihe

von Spezialfällen die *SFC* vollständig bewiesen werden und für andere Fälle plausible Argumente gefunden werden, dass die *SFC* korrekt ist. Aber auch für die Zustandsgleichung $p = \alpha\rho$ verbleiben für viele Werte von α Unklarheiten, die auf die Nichtrückführbarkeit von Termen höherer Ableitung auf Terme niedriger Ordnung zurückzuführen sind. Jedoch erhält man Aussagen über die mögliche Weylkrümmung der Raumzeit, was sich im Verschwinden bestimmter Komponenten des Weyltensors in Bezug auf die kinematischen Vektorfelder und Relationen der Weyltensorkomponenten untereinander niederschlägt. Für diesen Teil konnte die *SFC* teilweise bestätigt, bzw. Hinweise auf die Konstruktion von Gegenbeispielen abgeleitet werden.

Gerade der Fall, dass Beschleunigungs- und Rotationsvektor zueinander senkrecht stehen, zeigt den Kern des Problems: Die Anzahl der Relationen, die Terme höherer Ableitungsstufe in Terme niedriger Ableitungsstufe überführt, ist zu gering. Bei der Ableitung der Zwangsbedingungen höherer Ordnung zeigt sich überdies, dass dieser Fall dem allgemeinen Fall weitgehend entspricht. Die Orientierung von Beschleunigung und Rotation ist hier zwar fest gewählt und führt zum Verschwinden von bestimmten Ausdrücken, im allgemeinen Fall treten dann jedoch nur weitere Terme auf, da dann $\dot{u}^a\omega_a \neq 0$ gilt, aber es kommen keine anderen Probleme hinzu.

Die hier erzielten Resultate zur konformen Struktur und die Ergebnisse zu bestimmten Petrovtypen [9, 10, 11, 12, 13] bzw. rein elektrischen oder magnetischen Weyltensoren [19, 25], legen die Vermutung nahe, dass eine Art Goldberg-Sachs-Theorem¹ (siehe z. B. [14]) für Kongruenzen zeitartiger Vektorfelder mit gewissen Eigenschaften und der Quelle der idealen Flüssigkeit existiert. Bis zum jetzigen Zeitpunkt ist es jedoch unbekannt. Dies stellt eine „aufgeweichte“ Variante der *SFC* dar.

Nichtsdestotrotz sind hier noch einige Lösungsmöglichkeiten nicht berücksichtigt worden, die auf rein mathematischem Wege zu gewissen Fortschritten führen könnten. Zunächst ergeben sich, mit der hier benutzten Methode, zumindest teilweise recht einfach wirkende Formulierungen von Differentialgleichungen für den metrischen Tensor (beispielsweise Gleichung (6.132)), deren Integration bei geeigneter Koordinatenwahl gelingen könnte. Hier sollte auch bedacht werden, dass die Metrik von scherungsfreien Raumzeiten im Allgemeinen bekannt ist [17]. Von generellem Interesse sollte die Untersuchung des Lösungsverhaltens von kovarianten Wellengleichungen sein, was auch für die Beschreibung von anderen

¹Das Goldberg-Sachs-Theorem ist für Vakuum-Raumzeiten bewiesen und besagt: Ist der Riemanntensor vom Petrov-Typ II und eine Nullbasis sei so gewählt, dass l_a der doppelten Nullrichtung entspricht und es gilt $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$, dann ist $\kappa = \sigma = 0$. Andererseits gilt auch: Wenn $\kappa = \sigma = 0$ gilt, ist $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ und der Riemanntensor ist vom Petrov-Typ II.

Eine Konsequenz dieses Theorems ist die Existenz einer scherungsfreien Kongruenz von Nullgeodäten.

Problemen, wie beispielsweise Gravitationswellen wesentlich sein dürfte.

Abschließend seien noch einige Bemerkungen zum Verhältnis von Thermodynamik und Gravitationstheorie erlaubt. Wenn man die Annahme der Zustandsgleichung fallen lässt und diese aus den dynamischen Gleichungen gewinnen muss, erlaubt dies zumindest die teilweise Überführung der Probleme bei der Lösung der dynamischen Gleichung auf die Zustandsfunktion. Diese Zustandsfunktion kann damit hoch kompliziert werden, was beispielsweise an dem Auftauchen von dritten Ableitungen der Zustandsfunktion in einigen der maxwellartigen Gleichungen zu ersehen ist². Solange man jedoch derartige Zustandsfunktionen durch thermodynamische oder materialtheoretische Betrachtungen nicht aus- oder wenigstens eingrenzen kann, ist wenig Fortschritt zu erwarten. Dies ist nicht als Kritik an der Thermodynamik und Materialtheorie zu verstehen, die erheblich komplexere Beschreibungen als die der oben genannten Zustandsgleichung kennt, sondern vielmehr an der Gravitationstheorie, die fast ausschließlich einfache Zustandsgleichungen der Form $p = \alpha\rho$ mit $\alpha = \text{const}$ benutzt.

Die vorliegende Untersuchung zeigt zudem das tiefe Ineinandergreifen von Gravitationsfeld und Struktur der Quellen. Der Gravitationstheorie wird hier der Vorrang eingeräumt und aus ihrer Bindung an die einsteinschen Feldgleichungen im riemannschen Raum lassen sich weitreichende Schlüsse ziehen, die bis auf die Struktur der Quellen zurückzuverfolgen sind und auch zum Ausschluss bestimmter Lösungsklassen führen können. Präziser formuliert kann man mittels der Gravitationstheorie aus einer bestimmten Materialklasse bei vorgegebener Prozessführung verträgliche und unverträgliche Materialien auswählen. Die Definition der idealen Flüssigkeit ist dabei an die Definition des thermodynamischen Gleichgewichts (d.h. keine Entropieproduktion) gebunden, welches hier nur als ein thermodynamisches Gleichgewicht ohne Gravitationsfeld zu verstehen ist. Dieses wird durch das betrachtete Modell auf die Raumzeit mit Gravitation übertragen und für die gegebene Prozessführung untersucht. Das führt dazu, dass nur bestimmte Materialien der Materialklasse in diesem Gleichgewicht sein können. Dem Gravitationsfeld wird dabei keine thermodynamische Eigenschaft zugesprochen³. Dies wirkt letztlich unbefriedigend.

Beide Theorien als fundamentale Beschreibung ansehend, sollten auch dem Gravitationsfeld thermodynamische Eigenschaften und Gesetze zugeordnet sein oder andersherum der

²Ein einfaches Beispiel für dieses Zusammenspiel von dynamischen Gleichungen und Zustandsgleichungen kennt man aus den Friedmann-Robertson-Walker Modellen. Die Wahl einer Zustandsgleichung (beispielsweise Strahlung) impliziert dann ein wohldefiniertes Verhalten des Skalenparameters als Funktion der Zeit, welcher nur noch von der räumlichen Krümmung und der konstanten Gesamtenergiedichte abhängt. Andererseits impliziert die Wahl der Skalenparameterfunktion eine bestimmte Zustandsgleichung.

³Es wirkt als Bühne für thermodynamische Prozesse, auf der bestimmte Stücke spielbar sind und andere nicht.

Thermodynamik gravitative Größen eingepägt werden. Dies kann dadurch geschehen, dass Krümmungsterme oder zweite kovariante Ableitungen in das gibbssche Gesetz und die Carnot-Clausius-Bedingung aufgenommen werden. Das Äquivalenzprinzip wird an dieser Stelle nicht direkt berührt, da es zunächst nur für fundamentale Größen (Teilchen, elektromagnetisches Feld,...) formuliert ist und Aussagen über die Bewegungsgleichungen dieser trifft, in denen keine expliziten Krümmungsterme auftreten dürfen. Vielmehr würde die Aufnahme von Krümmungstermen in das gibbssche Gesetz und die Carnot-Clausius-Bedingung zeigen, ob ein gravitativer Beitrag in thermodynamischen Gesetzen enthalten sein muss oder das Äquivalenzprinzip auch auf thermodynamische Beziehungen auszudehnen ist. Das entspricht auch der in [6] dargestellten Argumentation. Von diesem Standpunkt aus wirken die in Kapitel 3 behandelten thermodynamischen Modelle als untauglich. Im Gegensatz dazu kann die Untersuchung zur Thermodynamik Schwarzer Löcher (siehe z. B. [33]) vielleicht erste Anhaltspunkte liefern - Eigenschaften der konformen Krümmung werden thermodynamischen Größen zugeordnet.

Danksagung

Ich möchte zu guter Letzt allen Danken, die einen Beitrag an der Entstehung dieser Arbeit geleistet haben.

Zuallererst gebührt mein Dank meiner Familie und meinen Eltern, die mich in jeder Hinsicht unterstützt haben und deren Liebe und Geduld.

Meinen Freunden - die ich nicht alle aufzählen möchte - danke ich für die Zeit, Freude und Ablenkung in nicht immer einfachen Zeiten.

Besonderer Dank gebührt meiner Arbeitsgruppe und insbesondere Prof. Borzeszkowski für eine angenehme Lehrzeit und die vielen Diskussionen zum Thema der Arbeit und aller weiteren Fragestellungen die wir führten. Vor allen Dingen danke ich für die Gewährung der wissenschaftlichen Freiheit. Hier möchte ich auch Prof. Hellwig, Dr. Hasse, Dr. Obukhov, Dr. Perlick und Dr. Scherfner für die kontinuierliche Zusammenarbeit auf vielen Gebieten danken.

Der Arbeitsgruppe von Prof. Muschik danke ich für die wesentlichen Diskussionen zum Zusammenhang zwischen Thermodynamik und Relativitätstheorie.

Meinen Freunden und Kollegen Christo und Sebastian danke ich für die vielen Stunden die wir in Diskussionen über physikalischen und nicht-physikalischen Fragen verbracht haben und Vieles mehr.

Herzlichen Dank

Kapitel 8

Anhang

8.1 Beweis einiger Identitäten

Zur Ableitung der einzelnen Gleichungen sind eine Reihe von immer wiederkehrenden Identitäten notwendig, deren Ableitung kurz separat geschildert werden soll.

Eine häufig verwendete Relation ist

$$\omega^f \eta_{fbpt} u^b \dot{u}^p = \frac{1}{2} \eta_{fbpt} \eta^{fklm} u_k \omega_{lm} u^b \dot{u}^p = \frac{1}{2} (\dot{u}^p \omega_{pt} - \dot{u}^p \omega_{tp}) = -A_t.$$

Für die Ableitung dieser Gleichung benötigt man für den ersten Schritt die Definition von ω^a (2.24), dann die Umformungsrelationen für den totalantisymmetrischen Tensor (siehe z. B. [76]) und die Orthogonalitätsrelationen, sowie im letzten Schritt die Definition des Vektors A^a . Es gilt also

$$\omega^f \eta_{fbpt} u^b \dot{u}^p = -A_t. \quad (8.1)$$

Für die Identität

$$u_l \eta^{klab} \dot{u}_{a;b} = 2\omega^k p' \Theta \quad (8.2)$$

benötigt man im Wesentlichen nur die Gleichung (4.25), die einzusetzen ist

$$\begin{aligned} u_l \eta^{klab} \dot{u}_{a;b} &= u_l \eta^{klab} (p'_{,b} \Theta u_a + p' (\Theta_{,b} u_a + \Theta u_{a;b}) - p_{,a;b} (\rho + p)^{-1} + \\ &\quad + p_{,a} (\rho + p)_{,b} (\rho + p)^{-2}) = u_l \eta^{klab} p' \Theta \omega_{ab} = 2\omega^k p' \Theta. \end{aligned}$$

Der größte Teil der eingesetzten Gleichung verschwindet wegen des antisymmetrischen Tensors, offensichtlich sind der erste und zweite Term, vom dritten Term bleibt nach dem Aus Schreiben der Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes nur dessen antisymmetrischer Anteil (die Rotation) übrig, der entsprechende Anteil der Beschleunigung fällt dem antisymmetrischen Tensor zum Opfer. Die Rotation des Gradienten des Druckes verschwindet ebenso.

Der letzte Term verschwindet unter der Benutzung von $p_{,a} = p'_{\rho,a}$. Das Ergebnis folgt aus (2.24).

Weiterhin wird eine geeignete Darstellung abgeleitet als

$$\eta_{ersd}\omega^{s;d} = u_{e;d}\omega^d_r + u_e\omega^d_{r;d} + \Theta\omega_{re} + \dot{\omega}_{re} + u_{r;d}\omega_e^d + u_r\omega_e^d_{;d}, \quad (8.3)$$

was unter Verwendung der Definition der Rotation (2.24) und den Umformungsrelationen des totalantisymmetrischen Tensors folgt.

Die Identität

$$\eta_{ersd}u^r\omega^{s;d} = 2\omega^2u_e + A_e - \omega_e^d_{;d} \quad (8.4)$$

folgt aus der Ableitung

$$\begin{aligned} \eta_{ersd}u^r\omega^{s;d} &= \frac{1}{2}\eta_{ers}^d\eta^{sklm}u^r(u_{k;d}\omega_{lm} + u_k\omega_{lm;d}) = \\ &= \frac{1}{2}u^r(-u_e\omega_r^m{}_{;m} - \dot{\omega}_{er} - u_r\omega_{de}^d + u_e\omega^d_{r;d} + \dot{\omega}_{re} + u_r\omega_e^d_{;d}) = \\ &= u^r(u_e\omega^d_{r;d} + \dot{\omega}_{re} + u_r\omega_e^d_{;d}) = 2u_e\omega^2 + A_e - \omega_e^d_{;d}. \end{aligned}$$

Der erste Schritt benutzt die Definition der Rotation (2.24), im Folgenden werden die Umformungsrelationen für den totalantisymmetrischen Tensor benötigt. Der letzte Schritt benutzt dann die Orthogonalitätsrelationen, die Definition der Zerlegung des Geschwindigkeitsfeldes sowie die Darstellung (4.51).

Die Identität

$$A^b\dot{u}^s u^p \eta_{bspq} = \dot{u}_q(\dot{u}^p \omega_p) - \dot{u}^2 \omega_q \quad (8.5)$$

ergibt sich wiederum unter Ausnutzung der Definition des A^a Vektors und der Rotation

$$A^b\dot{u}^s u^p \eta_{bspq} = \omega^{bk}\dot{u}_k\dot{u}^s u^p \eta_{bspq} = \eta^{bklm}\omega_l u_m \dot{u}^s u^p \eta_{bspq} \dot{u}_k = \dot{u}_q(\dot{u}^p \omega_p) - \dot{u}^2 \omega_q$$

sowie wiederum den Eigenschaften des antisymmetrischen Tensors.

Die Identität

$$A_f \eta^{flab} u_l \omega_b = \omega^2 \dot{u}^a - \omega^a (\dot{u}^p \omega_p) \quad (8.6)$$

folgt im Wesentlichen wiederum aus (2.24) und der Ausnutzung von (8.8).

$$\begin{aligned} A_f \eta^{flab} u_l \omega_b &= \frac{1}{2} A_f \eta^{flab} u_l \eta_{brst} u^r \omega^{st} = -\frac{1}{2} A_f u_l u^r \omega^{st} \eta^{bfla} \eta_{brst} = \\ &= -\frac{1}{2} (A_f \omega^{af} - A_f \omega^{fa}) = A_f \omega^{fa} = -\omega^a (\dot{u}^p \omega_p) + \omega^2 \dot{u}^a. \end{aligned}$$

Die ersten Schritte nutzen die Definition der Rotation (2.24) und die Eigenschaften des totalantisymmetrischen Tensors aus. Der letzte Schritt erfolgt unter Benutzung von Identität (8.8).

Die Identität

$$\eta^{flat}\omega_{at} = 2(\omega^l u^f - \omega^f u^l) \quad (8.7)$$

folgt unter Nutzung von (2.24) und den Eigenschaften des totalantisymmetrischen Tensors aus

$$\eta^{flat}\omega_{at} = \eta^{flat}\eta_{atrs}\omega^r u^s = 2(\omega^l u^f - \omega^f u^l).$$

Die Identität

$$\omega_{df}\omega^{fk} = \omega_d\omega^k - \omega^2 h^k_d \quad (8.8)$$

folgt wiederum aus der Definition der Rotation (2.24) und der Ausnutzung der Eigenschaften des totalantisymmetrischen Tensors, die Ableitung ist hier nicht angegeben, die Richtigkeit kann auch aus [74], [73] entnommen werden.

Im Rahmen der Behandlung der Wärmestromgleichung wird die Identität

$$\omega^{re}\omega_e^a{}_{;a} = \dot{u}^a\omega_a\omega^r - \omega^2\dot{u}^r + h^{rk}\omega_{k;a}\omega^a - h^{rk}\omega_{t;k}\omega^t \quad (8.9)$$

benötigt. Man zeigt diese wie gewöhnlich, indem man für beide Rotationstensoren die Darstellung als Rotationsvektor benutzt und die kovariante Ableitung ausschreibt. Man erhält dann unter Ausnutzung der Produkte der Levi-Civita-Symbole aus der rechten Seite

$$= -\omega_t\omega^{t;r} + \omega_b\omega^{t;b}u_t u^r - \omega_t u_a\omega^{t;a}u^r + \omega^r\dot{u}_t\omega^t - \omega^2\dot{u}^r + \omega_a\omega^{r;a}, \quad (8.10)$$

was dann mittels der Projektoren geschrieben werden kann als

$$= \dot{u}^a\omega_a\omega^r - \omega^2\dot{u}^r + h^{rk}\omega_{k;a}\omega^a - h^{rk}\omega_{t;k}\omega^t. \quad (8.11)$$

Dies beendet den Beweis.

8.2 Die Umformung höherer kovarianter Ableitungen

Während der Berechnung der zweiten kovarianten Ableitung der hier auftretenden Vektorfelder ω_a, \dot{u}_a, A_a ist eine Reihe von Umformungen von Nutzen, die insbesondere mit den aus vorherigen Schritten bekannten Darstellungen der Zeitentwicklung der auftretenden Vektorfelder zusammenhängen. Beispielsweise sei folgender Ausdruck untersucht:

$$\omega^s\dot{u}^t(\omega_{(s;t)}) \cdot = \frac{1}{2}\omega^s\dot{u}^t(\omega_{s;t;k}u^k + \omega_{t;s;k}u^k). \quad (8.12)$$

Die Frage ist nun, wie man die zweiten Ableitungen geeignet umformt, was mittels der Ricci-Identität für das Vektorfeld ω_a erfolgt

$$= \frac{1}{2} \omega^s \dot{u}^t (\omega_{s;k;t} u^k + R_{slkt} \omega^l u^k + \omega_{t;k;s} u^k + R_{tlks} u^k \omega^l). \quad (8.13)$$

Offensichtlich verschwindet der zweite Term in der Klammer aufgrund der Antisymmetrie des Krümmungstensors. Die anderen Terme müssen weiter umgeformt werden mittels Hereinziehens des Geschwindigkeitsfeldes und der Dekomposition des Krümmungstensors (2.16), es folgt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \omega^s \dot{u}^t ((\dot{\omega}_s)_{;t} - \omega_{s;k} u_{;t}^k + (\dot{\omega}_t)_{;s} - \omega_{t;k} u_{;s}^k) + \\ &+ \frac{1}{2} \omega^s \dot{u}^t \omega^l u^k (C_{tlks} + \frac{1}{2} (g_{tk} R_{ls} - g_{ts} R_{lk} - g_{lk} R_{ts} + g_{ls} R_{tk}) - \\ &\quad - \frac{1}{6} (g_{tk} g_{ls} - g_{ts} g_{lk})). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Für die $\dot{\omega}^a$ enthaltenen Terme kann nun die Darstellung dieser Größe (4.50) benutzt und diese dann ausdifferenziert werden. Die Terme, die Produkte von $\omega_{a;b}$ und $u_{a;b}$ enthalten, werden mit Hilfe der Zerlegung des Geschwindigkeitsfeldes weiterzerlegt und vereinfacht. Für den Term, der den Weyltensor enthält, wird dessen Zerlegung (2.47) benutzt und für die Terme, die die Riccitensorkomponenten enthalten, werden die Feldgleichung herangezogen und deren entsprechende Komponenten betrachtet. In der hier betrachteten Gleichung verschwinden diese Komponenten alle identisch. Man erhält

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} (\dot{u}^e \omega_e)^2 + \omega^2 (\Theta(p' - \frac{2}{3}))_{;t} \dot{u}^t + \Theta(p' - \frac{2}{3}) \omega_{s;t} \omega^s \dot{u}^t + \right. \\ &+ (\dot{u}^e \omega_e) (\Theta(p' - \frac{2}{3}))_{;s} \omega^s + \Theta(p' - \frac{2}{3}) \omega_{t;s} \omega^s \dot{u}^t - \frac{1}{6} \Theta \dot{u}^k \omega^s \omega_{s;k} - \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} A^k \omega^s \omega_{s;k} - \frac{1}{6} \Theta \omega^k \dot{u}^t \omega_{t;k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \omega^l u^k \omega^s \dot{u}^t (0 + (g_{tk} E_{ls} - g_{ts} E_{lk} - g_{lk} E_{ts} + g_{ts} E_{tk}) + \right. \\ &\quad \left. + (\eta_{tlpq} u^p H^q_k u_s - \eta_{tlpq} u^p H^q_s u_s) + (\eta_{kspq} u^p H^q_t u_l - \eta_{kspq} u^p H^q_l u_t) \right). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Für die Terme, welche Komponenten des Weyltensors enthalten, werden nun die Orthogonalitätsrelationen und die Zerlegung in die entsprechenden Komponenten benutzt. Die weiteren Terme werden vereinfacht und zusammengefaßt. Es folgt

$$\begin{aligned} &= \frac{\Theta}{3} (\dot{u}^e \omega_e)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \Theta_{;t} \dot{u}^t (p' - \frac{2}{3}) - \frac{1}{2} \omega^2 \dot{u}^2 \Theta \frac{\rho+p}{p'} p'' + \\ &\quad + \Theta(p' - 1) \omega_{(s;t)} \omega^s \dot{u}^t + \frac{1}{2} (\dot{u}^k \omega_k) \Theta_{;s} \omega^s (p' - \frac{2}{3}) - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\dot{u}^k \omega_k)^2 \Theta p'' \frac{\rho+p}{p'} - \frac{1}{2} A^k \omega^s \omega_{s;k} - \frac{1}{2} A^q \omega^s H_{qs}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Dieses Ergebnis kann dann eingesetzt werden.

Die anderen Projektionen des Ausdrucks $(\omega_{(s;t)})$ können ebenso behandelt werden, es treten dann im Allgemeinen andere Terme auf.

In ähnlicher Weise können die zweiten kovarianten Ableitungen von \dot{u}_a und A_a umgeformt werden.

8.3 Propagation des auf die Rotation angewandten Wellenoperators

Im Folgenden soll der Ausdruck $(\square\omega^a)_{;k}u^k$ untersucht werden, wenn er anschliessend mit einem zu u^a orthogonalen Vektorfeld überschoben wird.¹ Ziel ist, eine Darstellung zu finden, die sich möglichst weitgehend auf bekannte Terme bezieht. Zuerst ist offensichtlich, dass gilt

$$(\square\omega^a)_{;k}u^k = (R^a{}_{mkl}\omega^{m;l} + R^l{}_{mkl}\omega^{a;m} + \omega^{a;l}{}_{;k;l})u^k, \quad (8.17)$$

d. h. die Anwendung der Ricci-Identität auf die Ableitung des Rotationsvektors. Der erste Term lässt sich mit den vorher schon benutzten Standardverfahren umformen und der zweite Term ergibt sich unter Ausnutzung der Feldgleichungen, so dass man erhält

$$\begin{aligned} (\square\omega^a)_{;k}u^k &= -\frac{1}{3}\Theta\omega_l E^{al} + \eta^a{}_{mrs}u^r H^s{}_l \omega^{m;l} - \frac{1}{36}\Theta\rho\omega^a + \\ &+ \frac{5}{12}p\Theta\omega^a + \frac{1}{2}\Theta(\rho + 3p)(p' - \frac{2}{3})\omega^a + \omega^{a;l}{}_{;k;l}u^k. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Der umständliche Teil ist der letzte Term, man kann diesen wie folgt zerlegen

$$\omega^{a;l}{}_{;k;l}u^k = \square(\dot{\omega}^a) + (R^a{}_{bk}{}^l\omega^b u^k)_{;l} - (\omega^a{}_{;k}u^{k;l})_{;l} - \omega^{a;l}{}_{;k}u^k{}_{;l}. \quad (8.19)$$

Der erste Term ist wiederum durch die Kenntnis von $\dot{\omega}^a$ einfach zu bilden². Es ist

$$\begin{aligned} \square(\dot{\omega}^a) &= (p' - \frac{2}{3})\omega^a \square\Theta + \Theta\omega^a \square p' + \Theta(p' - \frac{2}{3})\square\omega^a + \\ &+ 2 \left(\Theta^{;l}(p')_{;l}\omega^a + (p' - \frac{2}{3})\Theta^{;l}\omega^a{}_{;l} + \Theta(p')_{;l}\omega^{a;l} \right). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Die Klammerterme können dann leicht weiter vereinfacht werden. Der zweite Term in (8.19) kann zunächst in gewohnter Art und Weise zerlegt werden, um dann ausdifferenziert zu werden, man erhält

$$\begin{aligned} (R^a{}_{bkl}\omega^b u^k)_{;l} &= -u^{a;l}E_{bl}\omega^b + \eta^a{}_{brs}u^{r;l}H^s{}_l \omega^b + \omega^a{}_s H^{sl}{}_{;l} + \\ &+ \eta^a{}_{brs}u^r H^{sl}\omega^b{}_{;l} - \frac{\rho}{18}\Theta\omega^a - \frac{p}{6}\Theta\omega^a. \end{aligned} \quad (8.21)$$

¹Diese Ableitung ist nur für den Fall, dass $\omega^a \dot{u}_a = 0$ gilt, korrekt.

²Man beachte, dass der Wellenoperator kein linearer Operator ist.

Im dritten Term von Gleichung (8.19) wird zunächst der Gradient der Vierergeschwindigkeit in seine Bestandteile zerlegt und dann vollständig ausdifferenziert. Mittels der Ricci-Identität können dann Terme mit zweiten Ableitungen geeignet transformiert werden, so dass folgt

$$\begin{aligned}
(\omega^a{}_{;k}u^{k;l})_{;l} &= \omega^b E_{bk}\omega^{ka} + \omega^a{}_{;k}\omega^{kl}{}_{;l} + \frac{1}{3}\Theta{}^{:l}\omega^a{}_{;l} + \\
&+ \frac{1}{3}\Theta\Box\omega^a + \frac{1}{3}\left(2\Theta\dot{\Theta}(p' - \frac{2}{3})\omega^a + \Theta^2 p''\dot{\rho}\omega^a + \Theta^3(p' - \frac{2}{3})^2\omega^a\right) - \\
&- \Theta{}_{;k}\dot{u}^k(p' - \frac{2}{3})\omega^a - \Theta p''\rho{}_{,k}\dot{u}^k\omega^a - \Theta(p' - \frac{2}{3})\omega^a{}_{;k}\dot{u}^k + \\
&+ \omega^a{}_{;l}A^l + \frac{1}{3}\theta\omega^a{}_{;l}\dot{u}^l - \eta^a{}_{brs}u^r H^s{}_k\omega^b\dot{u}^k - \omega^a{}_{;k}\ddot{u}^k - \Theta\omega^a{}_{;k}\dot{u}^k.
\end{aligned} \tag{8.22}$$

Für den letzten Term in (8.19) zerlegt man zunächst den Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes und wertet dann die einzelnen Produktterme aus, die Ricci-Identität beseitigt dann wieder besonders unangenehme Terme, so dass dann ist

$$\begin{aligned}
\omega^{a;l}{}_{;k}u^k{}_{;l} &= \omega^b E_{bl}\omega^{al} + \frac{1}{3}\left(\dot{\Theta}(p' - \frac{2}{3}) + \Theta p''\dot{\rho} + \Theta^2(p' - \frac{2}{3})^2\right)\omega^a - \\
&- \dot{u}^k\Theta{}_{;k}(p' - \frac{2}{3})\omega^a - \dot{u}^k\rho{}_{,k}p''\Theta\omega^a - \Theta(p' - \frac{2}{3})\omega^a{}_{;k}\dot{u}^k + \omega^{a;l}A_l + \frac{1}{3}\Theta\Box\omega^a.
\end{aligned} \tag{8.23}$$

Diese einzelnen Terme können aufsummiert werden, so dass letztlich die zeitliche Entwicklung gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
(\Box\omega^a)_{;k}u^k &= -\frac{2}{3}E^{al}\omega_l - \omega^{al}\omega^b E_{bl} + \omega^a{}_s H^{sl}{}_{;l} + \omega^{as}H_{sk}\dot{u}^k + \\
&+ \Theta\omega^a\left(\frac{(\rho+3p)p'}{2} - \frac{5}{12}\rho - \frac{3}{4}p\right) + \frac{1}{3}\Theta^2\omega^a\left((\rho+p)p'' - (p' - \frac{2}{3})^2\right) + \\
&+ \dot{\Theta}\Theta\omega^a\left(2(\rho+p)p'' - \frac{4}{3}p' + p'^2 + \frac{4}{9}\right) - \omega^a{}_{;k}\omega^{kl}{}_{;l} - \omega^a{}_{;l}A^l + \\
&+ \Theta^3\omega^a\left(2p''(\rho+p)p' - (\rho+p)p'' - \frac{1}{3}(p' - \frac{2}{3})^2\right) - \frac{1}{3}\dot{\Theta}(p' - \frac{2}{3})\omega^a + \\
&+ \omega^{a;l}\Theta{}_{;l}\left(3p' - \frac{5}{3}\right) + (p' - \frac{2}{3})\omega^a\Box\Theta + \Theta\omega^a\Box p' + \Theta(p' - \frac{4}{3})\Box\omega^a - \\
&- \Theta\dot{u}^2\omega^a\left(2p''\frac{\rho+p}{p'} - p' + \frac{2}{3}\right) + 2\omega^a\Theta{}_{;k}\dot{u}^k\left(p' - \frac{2}{3} - \frac{(\rho+p)p''}{p'}\right) - \\
&- \Theta\omega^{a;l}\dot{u}_l\left(\frac{3(\rho+p)p''}{p'} + 1 - 3p'\right) + 2\eta^a{}_{mrs}u^r H^s{}_l\omega^{m;l} + \eta^a{}_{brs}\omega^{rl}H^s{}_l\omega^b.
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Der vorletzte Term kann in folgender Art umgeschrieben werden

$$\eta^a{}_{mrs}u^r H^s{}_l\omega^{m;l} = (\eta^a{}_{mrs}u^r\omega^m)_{;l}H^s{}_l - \eta^a{}_{brs}\omega^{rl}H^s{}_l\omega^b, \tag{8.25}$$

so dass der letzte Term dem letzten in Gleichung (8.24) entspricht. Der andere ist dann definitionsgemäß die Ableitung des Rotationstensors und der magnetische Anteil des Weyl-tensors kann dann eingesetzt werden, so dass sich ergibt

$$\eta^a{}_{mrs} u^r H^s{}_l \omega^{m;l} = \omega^{am;n} \omega_{(m;n)} + A^a{}_{;l} \omega^l - \omega^{as} \dot{u}_{s;l} \omega^l - \omega^{as} \omega_{s;l} \dot{u}^l. \quad (8.26)$$

Der letzte Term aus der vorherigen Gleichung wurde nicht geschrieben, da dieser, wie im Folgenden gezeigt, identisch Null ist:

$$\eta^a{}_{brs} \omega^{rl} \omega^b = -g^{al} \omega^2 u_s - u^a \omega^l \omega_s + u^a \omega^2 g_s^l + \omega^a \omega^l u_s. \quad (8.27)$$

Der erste und der letzte Term verschwinden, da dieser Ausdruck mit $H^s{}_l$ überschoben wird und die anderen Terme sind Null, da mit einem Vektor orthogonal zu u^a überschoben wird, so dass auch der letzte Term in (8.24) verschwindet.

Aber man hat mit einem Term dieser Gleichung weiterhin Schwierigkeiten, die nicht zu überbrücken sind, dies ist $\omega^{am;n} \omega_{(m;n)}$. Hierfür können die Ableitungsterme nicht „entwirrt“ werden.

8.4 Koeffizienten für den senkrechten Fall

Im Fall, dass Rotations- und Beschleunigungsvektor senkrecht stehen und eine Zustandsgleichung zu Hilfe genommen wurde, konnte eine weitergehende Lösung des Problems erzielt werden. Hier wurde insbesondere im Fall, dass der Gradient der Expansion einen Anteil in \dot{u}_a -Richtung aufweist eine Lösbarkeitsbedingung angegeben. Zu deren Auswertung eine Reihe von Koeffizienten eingeführt wurden, die hier rekursiv angegeben werden sollen

$$C := \frac{\omega^2 \Theta}{3} \left(K \dot{u}^2 + \left(\alpha + \alpha\beta + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{3} + \alpha\beta \right) \Theta^2 - \right. \quad (8.28) \\ \left. - \frac{1 + 3\alpha}{2} \left(\alpha\beta + \alpha + \frac{1}{3} \right) - L\omega^2 \right),$$

$$D := \dot{C} - C\Theta \left((1 + \beta)\alpha - 4\alpha - \frac{8}{3} + \alpha\beta \right) + \quad (8.29) \\ + \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{3} \Theta^2 (1 + \beta) - b\omega^2 \right) \dot{u}^2 \omega^2,$$

$$E := (1 + \beta) \dot{\Theta} - b\omega^2 \left(\frac{1}{2} + \alpha b \right) + \Theta^2 \left(-(1 + \beta)^2 \alpha + \quad (8.30) \right. \\ \left. + (3\alpha - 2 + \alpha\beta)(1 + \beta) - (1 + \beta) \left(4\alpha - \frac{8}{3} + \alpha\beta \right) \right),$$

$$F := \dot{D} + E \left(\frac{1}{3} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \Theta \dot{u}^2 \omega^2 - \alpha C \right) - \quad (8.31)$$

$$- 2\Theta D \left(\frac{5\alpha}{2} - \frac{5}{3} + \frac{\alpha\beta}{2} \right) - \frac{b}{2} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \left(\alpha - \frac{2}{3} \right) (1+b) \Theta \dot{u}^2 \omega^4,$$

$$G := \dot{E} + E \Theta \left(\frac{4}{3} - 2\alpha - \alpha(1+\beta) \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \right), \quad (8.32)$$

$$H := \dot{F} + \frac{G}{3} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \Theta \dot{u}^2 \omega^2 - \alpha GC - \quad (8.33)$$

$$- \frac{\alpha b^3}{2} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \left(\alpha - \frac{2}{3} \right) \dot{u}^2 \omega^6 + \alpha^2 \omega^2 b^2 D - \Theta F (6\alpha - 4 + \alpha\beta),$$

$$I := \dot{G} + \Theta G (2 - 4\alpha - \alpha\beta) + \alpha^2 b^2 E \omega^2. \quad (8.34)$$

Hierin bezeichnen die Abkürzungen

$$K := \frac{8\beta}{3} - \alpha\beta^2 - 2\alpha - \frac{2}{3} - 3\alpha\beta - \frac{2b\alpha\beta}{3}, \quad (8.35)$$

$$L := \frac{\alpha\beta + \alpha + \frac{1}{3}}{8\beta} \left(\frac{63\alpha}{2} - 39 + \frac{15}{2\alpha} - 16\beta \right) - \frac{1}{3} (21\alpha - 13 + 2b\alpha^2). \quad (8.36)$$

Literaturverzeichnis

- [1] Armendariz-Picon, C., Damour, T. und Mukhanov, V. (1999) k -Inflation, *Phys. Lett.* **B458**, 209-218.
- [2] Banerji, S. (1968) Homogeneous cosmological models without shear, *Prog. Theor. Phys.* **39**, 365-371.
- [3] Barrow, J.D., Juskiewicz, R. und Sonoda, D. (1985) Universal rotation: how large can it be?, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **213**, 917-943.
- [4] Belinskii, V. A., Nikomarov, E. S. und Khalatnikov, I. M. (1979), Investigation of the cosmological evolution of viscoelastic matter with causal thermodynamics, *Sov. Phys. JETP* **50**, 213-221.
- [5] Bonner, W. B. und Ellis, G. F. R. (1986) Observational homogeneity of the universe, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **218**, 605-614.
- [6] v. Borzeszkowski, H.-H. und Chrobok, T. (2003) Are there thermodynamical degrees of freedom of gravitation?, *Found. Phys.* **33**, 529-539.
- [7] Bruni, M., Gualtieri, L. und Sopuerta, C. F. (2003) Two-parameter nonlinear space-time perturbations: gauge transformations and gauge invariance, *Class. Quant. Grav.* **20**, 535-556.
- [8] Bunn, E., Ferreira, P. und Silk, J. (1996) How anisotropic is our universe, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2883-2886.
- [9] Carminati, J. (1987) Shear-free perfect fluids in general relativity. I. Petrov type N Weyltensor, *J. Math. Phys.* **28**, 1848-1853.
- [10] Carminati, J. (1988) Type-N, shear-free, perfect fluid spacetimes with a barotropic equation of state, *Gen. Rel. Grav.* **20**, 1239-1248.

-
- [11] Carminati, J. (1990) Shear-free perfect fluids in general relativity. II. Aligned, Petrov type III spacetimes, *J. Math. Phys.* **31**, 2434-2440.
- [12] Carminati, J. und Cyganowski, S. (1996) Shear-free perfect fluids in general relativity. III. Petrov type III spacetimes, *Class. Quantum Grav.* **13**, 1805-1817.
- [13] Carminati, J. und Cyganowski, S. (1997) Shear-free perfect fluids in general relativity. IV. Petrov type III spacetimes, *Class. Quantum Grav.* **14**, 1167-1181.
- [14] Chandrasekhar, S. (1983), *Mathematical Theory of Black Holes*, Clarendon Press, Oxford.
- [15] Chimento, L. P., Jakubi, A. S., Pavon, D. und Zimdahl, W. (2003) Interacting quintessence solution to the coincidence problem, *Phys. Rev.* **D67**, 083513.
- [16] Chrobok, T. (1999) *Eine Untersuchung kosmologischer Modelle mit Rotation hinsichtlich Beobachtungsmöglichkeiten*, Diplomarbeit, TU Berlin.
- [17] Chrobok, T., Obukhov, Yu. N. und Scherfner, M. (2001), On the construction of shearfree cosmological models, *Mod. Phys. Lett.* **A 16** 1321-1325.
- [18] Coley, A. A. (1991) Fluid spacetimes admitting a conformal killing vector parallel to the velocity vector, *Class. Quantum Grav.* **8**, 955-968.
- [19] Collins, C. B. (1984) Shear-free perfect fluids with zero magnetic Weyl tensor, *J. Math. Phys.* **25**, 995-1000.
- [20] Collins, C. B. (1986) Shear-free perfect fluids in general relativity, *Can. J. Phys.* **64**, 191-199.
- [21] Collins, C. B. (1988) Homogeneous and hypersurface-homogeneous shear-free perfect fluids in general relativity, *Gen. Rel. Grav.* **20**, 847-855.
- [22] Collins, C.B. und Hawking, S.W. (1973) The rotation and distortion of the universe, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **162**, 307-320.
- [23] Collins, C. B. und Wainwright, J. (1983) Role of shear in general-relativistic cosmological and stellar models, *Phys. Rev.* **D27**, 1209-1218.
- [24] Collins, C. B. und White A. J. (1984) A class of shear-free perfect fluids in general relativity II, *J. Math. Phys.* **25**, 1460-1472.

- [25] Cyganowski, S. und Carminati, J. (2000) Shear-free perfect fluids in general relativity: Gravito-magnetic spacetimes, *Gen. Relativ. Grav.* **32**, 221-233.
- [26] Dirac, P. A. M. (1964) *Lectures on Quantum mechanics*, Academic Press, New York.
- [27] Ehlers, J. (1961) Beiträge zur relativistischen Mechanik kontinuierlicher Medien, *Abh. d. Math.-Nat. Kl. Mainz Nr.* **11**. (auch in *Gen. Rel. Grav.* **25**, 1225-1266 (1993)).
- [28] Ellis, G. F. R. (1967) Dynamics of pressure-free matter in General Relativity, *J. Math. Phys.* **8**, 1171-1194.
- [29] Ellis, G. F. R. (1971) Relativistic Cosmology, in: Proc. Int. School of Physics „Enrico Fermi“ Course XLVIII - General Relativity and Cosmology (Varena, 1969), Ed. R. K. Sachs, Academic Press, New York, 104-182.
- [30] Ellis, G. F. R. (1973) Relativistic Cosmology, *Cargèse Lectures in Physics* **6**, Ed. E. Schatzman, Gordon and Breach, New York, 1-60.
- [31] Fabris, J. C., Gonçalves, S. V. B. und Tomimura, N. A. (2000), An analysis of cosmological perturbations in hydrodynamical and field representations, *Class. Quant. Grav.* **17**, 2983-2998.
- [32] Friedlander, F. G. (1975) *The wave equation on a curved space-time*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [33] Frolov, V. P. und Novikov, I. D. (1998) *Black Hole Physics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [34] Gamov, G. (1946) Rotating Universe?, *Nature* **158**, 549.
- [35] Glass, E. N. (1975) The Weyl tensor and shear-free perfect fluids. *J. Math. Phys.* **16**, 2361-2663.
- [36] Gliner, E. B. (1966) Algebraic Properties of the Energy-momentum Tensor and vacuum-like states of matter, *J. Exp. Theor. Phys.* **22**, 378-382.
- [37] Gödel, K. (1949) An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 447-450.
- [38] Gödel, K. (1950) Rotating universes in general relativity theory, *Proc. Int. Cong. Math.* (Cambridge, Mass.); (*American Math. Soc., Providence*) **1**, 175-181 (1952).

- [39] Goenner, H. (1996) *Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*, Spektrum, Heidelberg, 142-144.
- [40] Hawking, S. W. (1966) Perturbations of an Expanding Universe, *Astrophys. J.* **145**, 544-554.
- [41] Hawking, S.W. (1969) On the rotation of the universe, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **142**, 129-141.
- [42] Helgason, S. (1962) *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York.
- [43] Hiscock, W. A. und Salmonson, J. (1991) Dissipative Boltzmann-Robertson Walker cosmologies, *Phys. Rev.* **D43**, 3249-3258.
- [44] Hiscock, W. A. und Lindblom, L. (1983) Stability and causality in dissipative relativistic fluids, *Annals of Physics* **151**, 466-496.
- [45] Heckmann, O. und Schücking, E. (1959) Newtonsche und Einsteinsche Kosmologie, *Handbuch der Physik LIII*, editiert von S. Flügge, Springer, Berlin etc., 489-537.
- [46] Hehl, F. W., van der Heyde, P., and Kerlick, G. D. (1976) General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects, *Rev. Mod. Phys.* **48**, 393-416.
- [47] Israel, W. (1976) Nonstationary irreversible thermodynamics: a causal relativistic theory, *Annals of Physics* **100**, 310-331.
- [48] Israel, W. und Stewart, J. M. (1979) Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory, *Annals of Physics* **118**, 341-372.; Israel, W. und Stewart, J. M. (1979) On transient relativistic thermodynamics and kinetic theory I, II, *Proc. R. Soc. Lond.* **A357**, 59-75, **A365**, 43-52.
- [49] King, A. R., und Ellis G. F. R. (1973) Tilted homogeneous cosmological models, *Commun. Math. Phys.* **31**, 209-242.
- [50] Klich, F. (2002) *Über eine Vermutung zu scherungsfreien idealen Fluiden in der Allgemeinen Relativitätstheorie*, Diplomarbeit, TU Berlin.
- [51] Kobayashi, S. und Nomizu, K. (1969) *Foundations of differential geometry: Vol.II*, John Wiley& Sons, New York.
- [52] A. Kogut, G. Hinshaw, und Banday, A. (1997) Limits to global rotation and shear from the COBE DMR four year sky maps, *Phys. Rev.* **D55**, 1901-1905.

- [53] Korotkii, V. A. und Obukhov, Yu. N. (1991) Kinematic analysis of cosmological models with rotation, *Sov. Phys. JETP* **72** (1), 11-14.
- [54] Kramer, D., Stephani, H., Herlt, E. und MacCallum, M. (1980) *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [55] Kundt, W. und Trümper, M. (1962) Beiträge zur Theorie der Gravitations-Strahlungsfelder, *Abh. d. Math.-Nat. Kl. Mainz* Nr. **12**.
- [56] Lanczos, K. (1924) Über eine stationäre Kosmologie im Sinne der Einsteinschen Gravitationstheorie, *Zeitschrift für Physik* **21**, 73-110.
- [57] Lang, J. M. und Collins, C. B. (1988) Observationally homogeneous shear-free perfect fluids, *Gen. Rel. Grav.* **20**, 683-710.
- [58] Liebscher D.-E. (1994) *Kosmologie*, Barth, Leipzig und Heidelberg.
- [59] Mashhoon, B. (1975) Influence of gravitation on the propagation of electromagnetic radiation, *Phys. Rev.* **D10**, 2679-2684.
- [60] Matte, A. (1953) Sur de nouvelles solutions oscillatoires des equations de la gravitation, *Cand. J. Math.* **5**, 1-16.
- [61] Müller, I., und Ruggeri, T. (1993) *Extended Thermodynamics*, Springer, New York etc..
- [62] Muschik, W., Papenfuß C. and Ehrentraut, H., A Sketch of Continuum Thermodynamics. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **96**, 255-290 (2001).
- [63] Neugebauer, G. (1980) *Relativistische Thermodynamik*, Akademie-Verlag, Berlin.
- [64] Obukhov, Yu. N. (1998) On physical foundations and observational effects of cosmic rotation, in: "Colloquium on Cosmic Rotation" (Berlin, Feb. 1998), Eds. Scherfner, M., Chrobok, T. und Shefaat, M., Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin, 2000, 23-96; E-print archive: astro-ph/0008106.
- [65] Obukhov, Yu. N., Chrobok, T. und Scherfner, M. (2002) Shear-free rotating inflation, *Phys. Rev.* **D66**, 043518.
- [66] Romano, V. und Pavón, D. (1993) Causal dissipative Bianchi cosmology, *Phys. Rev.* **D47**, 1396-1403.

- [67] Sanz, J. L. (1982) Dynamical importance of vorticity and shear in the universe, *J. Math. Phys.* **23**, 1732-1736.
- [68] Scherfner, M., Chrobok, T., und Shefaat, M. (eds.) (2000) “*Colloquium on Cosmic Rotation*” (Berlin, Feb. 1998), Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin, 2000.
- [69] Scherfner, M. (2001) *Zur Konstruktion kosmologischer Raumzeit-Modelle unter Verwendung kinematischer Invarianten*,. Dissertation, TU Berlin.
- [70] Schouten, J. A. (1954) *Ricci-Calculus*, Springer, Berlin.
- [71] Schrödinger, E. (1950) *Space-Time Structure*, Cambridge U. P., Cambridge.
- [72] Schücking, E. (1957) Homogene scherungsfreie Weltmodelle in der relativistischen Kosmologie, *Die Naturwissenschaften* **19**, 507.
- [73] Senovilla, J. M. M., Sopuerta, C. F. und Szekeres, P. (1998) Theorems on shear-free perfect fluids with their Newtonian analogues, *Gen. Rel. Grav.* **30**, 389-411.
- [74] Sopuerta, C. F. (1996) Covariant study of a conjecture on shear-free barotropic perfect fluids, *Class. Quantum Grav.* **15**, 1043-1062.
- [75] Sopuerta, C. F. (1996) *Applications of timelike and null congruences to the construction of cosmological and astrophysical models*, Ph. D. Thesis (Universitat de Barcelona).
- [76] Stephani, H. (1991) *Allgemeine Relativitätstheorie*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- [77] Stewart, J.M. (1977) On transient relativistic thermodynamics and kinetic theory, *Proc. R. Soc. Lond.* **A 357**, 59-75.
- [78] Tauber, G. E. und Weinberg, J. W. (1961) Internal state of a gravitating gas, *Phys. Rev.* **122**, 1342-1365.
- [79] Treciokas, R. und Ellis, G. F. R. (1971), Isotropic solutions of the Einstein-Boltzmann Equations, *Commun. Math. Phys.* **23**, 1-22.
- [80] Trümper, M. (1965) On a special class of type-I gravitation-fields, *J. Math. Phys.* **6**, 584-589.
- [81] Van den Bergh (1999) The shear-free perfect fluid conjecture, *Class. Quantum Grav.* **16**, 117-129.

-
- [82] White, A. J. (1981) Shear-free perfect fluids in general relativity, *M. Math. thesis* (University of Waterloo, Canada).
- [83] White, A. J. und Collins, C. B. (1984) A class of shear-free perfect fluids in general relativity I, *J. Math. Phys.* **25**, 332-337.
- [84] Zakari, M. und Jou, D. (1993) Equations of state and transport equations in viscous cosmological models, *Phys. Rev.* **D48**, 1597-1601.
- [85] Zakharov, V. D. (1973) *Gravitational waves in Einstein's theory*, John Wiley & Sons, New York.
- [86] Zimdahl, W., Pavón, D. und Jou, D. (1993) Cosmological perturbations in a universe with particle production, *Class. Quant. Grav.* **10**, 1775-1789.
- [87] Zimdahl, W. und Pavón, D. (1994) Fluid cosmology with decay and production of particles, *Gen. Rel. Grav.* **26**, 1259-1265.