

Finite Schalenelemente mit einer Einsdirektorkinematik

von
Dipl.-Ing. Thomas Wenzel

Von der Fakultät V
Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Verleihung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigte Dissertation

Berlin 2003
D 83

Promotionsausschuß:

Vorsitzender: Professor Dr.-Ing. J. Thorbeck
Berichter: Professor Dr.-Ing. H. Schoop
Professor Dr.-Ing. G. Brunk

Tag der Einreichung: 11.09.2003
Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 31.10.2003

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Technischen Universität Berlin in der Zeit von November 1998 bis Oktober 2003.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. H. Schoop, der mir in allen Fragen ein stets offener und gleichzeitig kritischer Diskussionspartner war. Als mein akademischer Lehrer hat er wesentlichen Einfluß auf meine wissenschaftliche Ausbildung genommen und mich dabei sowohl großzügig gefördert wie auch hartnäckig gefordert. Für die offene und von persönlichem Vertrauen geprägte Atmosphäre bin ich ihm sehr dankbar.

Ich möchte mich auch bei Herrn Professor Dr.-Ing. G. Brunk für die Übernahme des zweiten Berichts bedanken. Sein hohes Interesse an meiner Arbeit sowie deren akribische Durchsicht mündeten in vielen Fachgesprächen in wertvolle Hinweise, die letztlich meinem vertieften Verständnis sowie dem Duktus dieser Arbeit sehr dienlich waren.

Außerdem danke ich Herrn Professor Dr.-Ing. J. Thorbeck für das Interesse, das er meiner Arbeit entgegengebracht hat sowie seine Bereitschaft, den Vorsitz im Promotionsausschuß zu übernehmen.

Dank gebührt auch meinen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Mechanik, die in maßgeblicher Weise die sehr gute Arbeitsatmosphäre mitgestalteten, in der diese Arbeit entstehen konnte. Mein besonderer Dank gilt hierbei meinem Freund und Kollegen Dipl.-Ing. Jörg Hornig, der jederzeit in kompetenter Weise zur Diskussion bereit war und ebenfalls auf stets humorvolle Art in das Ökosystem unserer Bürogemeinschaft einzugreifen wußte.

Einen nicht unerheblichen Anteil an einer selbstkritischen Reflexion der deutschen Sprache sowie deren sinnvollen Gebrauches meinerseits hatte Werner Murach. Hierfür sei ihm recht herzlich gedankt.

Schließlich möchte ich mich ganz besonders bei meiner Frau Kirsten bedanken, die mich stets auf liebevolle Weise zu unterstützen wußte. Gerade in Stunden wissenschaftlicher Ratlosigkeit schuf sie eine Atmosphäre des emotionalen Ausgleichs, ohne die diese Arbeit nicht hätte gelingen können.

Zusammenfassung

Die Methode der Finiten Elemente (FE) stellt ein weitverbreitetes und universell einsetzbares Werkzeug zur Lösung von Systemen partieller Differentialgleichungen dar. Beim Einsatz der FE-Methode in der Strukturmechanik liegt das Hauptaugenmerk des Elementdesigns auf der kinematischen Modellbildung.

In dieser Arbeit wird im Sinne eines *robusten* Elementes angestrebt, mit möglichst wenigen Knotenfreiwerten ein möglichst leistungsfähiges, d.h. genaues Schalenelement zu entwickeln. Aufbauend auf den Arbeiten von SCHOOP (1989) und VERHOEVEN (1992) wird vor dem Hintergrund des in Kapitel 2 erörterten Stabilitätsfalls im kontinuumsmechanischen Direktormodell eine geometrisch nichtlineare Einsdirektorformulierung in LAGRANGEScher Darstellung gewählt.

In Kapitel 4 werden ein Vierecks- und ein Dreiecksschalenelement vorgestellt, die beide für räumliche Referenzkonfigurationen eingesetzt werden können. Sämtliche Verzerrungen werden über Skalarprodukte der Knotenfreiwerte definiert, so daß eine globalkartesische Beschreibung möglich wird. Insbesondere müssen weder Shiftertensor noch ko-/kontravariant notierte Stoffgesetze bemüht werden. Die Membraneigenschaften des Viereckselements werden zusätzlich mit Hilfe der *enhanced assumed strain*-Methode (EAS) nach SIMO UND ARMERO (1992) verbessert. Alternativ zur klassischen EAS-Formulierung wird eine eigene Umsetzung des EAS-Gedankens entwickelt, die sich bei linear elastischem Materialverhalten als effizienter in der Programmtechnik erweist. Da die Anwendung der Elemente primär auf die Statik dünner Flächentragwerke abzielt, wird ein ebener Spannungszustand angenommen (ESZ). Auf die Einbeziehung von Querschubverzerrungen in die Kinematik wird daher verzichtet.

Die vorgestellten Elemente werden anhand der in Kapitel 3 diskutierten Stoffgesetze ausführlich getestet. Insbesondere können im Hinblick auf inelastisches Materialverhalten durch Verwendung eines Iterations- und Kondensationsalgorithmus auch dreidimensionale Materialgesetze implementiert werden, die dann numerisch der Bedingung des ebenen Spannungszustandes angepaßt werden.

Eine Auswahl von Beispielen in Kapitel 5 validiert schließlich die vorgestellte FE-Methode.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	VI
Tabellenverzeichnis	VII
1 Einleitung	1
1.1 Stand der Entwicklung	1
1.2 Gliederung und Ziel der Arbeit	4
2 Schalenbeschreibung	5
2.1 Deformationsanalyse	5
2.1.1 Nablaoperator	6
2.1.2 Deformationsgradient	7
2.2 Verzerrungen	7
2.2.1 Verzerrungsableitungen	9
2.3 Spannungstensoren	9
2.4 Schnittlasten	10
2.5 Prinzip der virtuellen Arbeiten	10
2.5.1 Innere Arbeit	11
2.5.2 Äußere Arbeit	11
2.5.3 Gleichgewichtsbedingungen	12
2.6 Stabilitätsfälle in der Direktorplattentheorie	15
2.6.1 Auswirkung der Lasteinleitung anhand des Balkens	18
3 Materialgesetze	21
3.1 Hyperelastizität (3D)	21
3.1.1 ST. VENANT-KIRCHHOFF Material	23
3.1.2 NEO-HOOKE Material	24
3.2 Hyperelastizität (2D)	24
3.2.1 ST.VENANT-KIRCHHOFF Material	24
3.2.2 NEO-HOOKE Material	25
3.3 Elasto-Plastizität	26
3.4 Multiplikative Elasto-Plastizität (3D)	26

3.4.1	Prädiktor-Korrektor-Verfahren	29
3.4.2	Berücksichtigung der Verfestigung	31
3.5	Elasto-Plastizität (2D)	31
3.5.1	Berücksichtigung der Verfestigung	34
4	Finite Elemente	37
4.1	Lockingeffekte	39
4.2	Viereckselement	41
4.2.1	Deformationsgradient	43
4.2.2	Membranverzerrung	44
4.2.3	Methode der angenommenen Verzerrungen (EAS)	44
4.2.4	Verschiedene Ansätze	51
4.2.5	EAS in Anlehnung an die Literatur	55
4.2.6	Vergleich der Varianten	57
4.2.7	Stabilitätsprobleme bei EAS	58
4.2.8	Stabilitätsanalyse	58
4.2.9	Biegeverzerrung	63
4.2.10	Beschreibung endlicher Drehungen	64
4.2.11	Einsdirektorkinematik	67
4.2.12	<u>D</u> iscrete <u>K</u> IRCHHOFF <u>T</u> heory (DKT)	69
4.3	Dreieckselement	75
4.3.1	Deformationsgradient	77
4.3.2	Membranverzerrung	77
4.3.3	Biegeverzerrung	78
5	Ergebnisse	81
5.1	Linear elastische Beispiele, Knick- und Beulprobleme	81
5.1.1	Zugscheibe	82
5.1.2	Scheibenbiegung	83
5.1.3	Schubbiegung	84
5.1.4	Balkenknickung	85
5.1.5	Beulen einer Rechteckplatte	87
5.1.6	Reine Torsion einer Quadratplatte	88
5.1.7	Pinched Cylinder	89
5.1.8	Pinched Hemisphere	91
5.1.9	COOKs Scheibe	93
5.1.10	RAASCHs Haken	95
5.2	Nichtlinear elastische Beispiele	98
5.2.1	Pinched Hemisphere	98
5.2.2	COOKs Scheibe	99
5.2.3	Orthotrope Kreisplatte	101
5.3	Elasto-plastische Beispiele	103

<i>Inhaltsverzeichnis</i>	III
5.3.1 Rechteckplatte unter Eigengewicht	103
5.3.2 Kreisplatte unter Eigengewicht und Druck	105
6 Schlußbemerkungen	109
6.1 Diskussion	109
6.2 Fazit	109
Literaturverzeichnis	109
A Differentialgeometrie	121
B Gleichgewichtsaussagen	125
C Ebener Spannungszustand	127
D Fließspannung und Fließdehnung	129
E Ableitungen der $\tilde{\epsilon}$	131
F Transformation des Direktors	133
G RODRIGUES Darstellung mit Einsdirektoren	139
H Symbolverzeichnis	145
H.1 Lateinische Symbole	145
H.2 Griechische Symbole	150
H.3 Sonstige Symbole	153

Abbildungsverzeichnis

2.1	Ortsvektoren der Schale	6
2.2	Äußere Lasten am Volumendifferential	12
2.3	Spannungen im Gleichgewicht	13
2.4	Gleichgewicht am Vertikalschnitt	14
2.5	Platte unter Transversallast	16
2.6	Modellierung der Belastung	17
3.1	Einachsiger Zugversuch	22
3.2	Konfigurationen	27
3.3	Alte und neue Fließfläche	29
4.1	Vierecksgeometrie und Ansatzfunktion $N_3(\xi, \eta)$	42
4.2	Verzerrtes Element unter <i>infinitesimaler</i> Starrkörperrotation	59
4.3	Q1E4-Element als Scheibe	60
4.4	Längenverhältnisse	60
4.5	Längenverhältnisse (ST. VENANT-KIRCHHOFF)	61
4.6	Moden des Q1E4-Elementes	61
4.7	Längenverhältnisse (NEO-HOOKE)	62
4.8	Eigenwerte im Vergleich	63
4.9	Ebene Drehung	65
4.10	Direktorparametrisierung	67
4.11	Relative Knotenneigungen Γ_n	70
4.12	Relative Knotenneigungen γ_n	71
4.13	Seitenmittenansatzfunktion N_1^*	72
4.14	Seitenbiegewinkel der RKF	73
4.15	Seitenbiegewinkel der AKF	73
4.16	Dreiecksgeometrie und Ansatzfunktion $L_2(\xi, \eta)$	76
4.17	Relative Neigungen $\Gamma_{\alpha n}$ am Knoten n	78
5.1	Diskretisierungen der Zugscheibe	82
5.2	Lastfall reine Scheibenbiegung	83
5.3	Konvergenz bei Scheibenbiegung	84
5.4	Lastfall Schubbiegung	84

5.5	Konvergenz	85
5.6	2. EULER Fall	86
5.7	Konstante Torsion	88
5.8	Geometrie und Belastung am Pinched Cylinder	89
5.9	Konvergenz im Vergleich (Q1 und Q1E4)	90
5.10	Konvergenz im Vergleich mit der Literatur	91
5.11	Pinched Hemisphere	91
5.12	Konvergenzstudie Pinched Hemisphere	92
5.13	Geometrie für Cook's Membrane	94
5.14	Konvergenz im Vergleich	94
5.15	RAASCH Haken	96
5.16	Geometrie des RAASCH Hakens	96
5.17	Konvergenz	97
5.18	Last-Verformungskurve (Pinched Hemisphere)	99
5.19	Konvergenz im Vergleich (ST. VENANT-KIRCHHOFF Material)	99
5.20	Konvergenz von 2D- und 3D-Formulierung (NEO-HOOKE Material)	100
5.21	Konvergenz verschiedener EAS-Varianten	101
5.22	Waferplatte unter Einzelkraft	102
5.23	Verwendete Netze	102
5.24	Verformungs-Lastkurve (Waferplatte)	102
5.25	Rechteckplatte	103
5.26	Q1 und Q1E4 im Vergleich	104
5.27	Last-Verformungskurve	104
5.28	Deformierte Platte bei $q = 55 \cdot \Delta q = 5.5$	105
5.29	Kreisplatte und Eingabedaten	105
5.30	Last-Verformungskurve der Kreisplatte	106
5.31	Be- und entlastete Konfiguration	107
5.32	Anzahl plastischer Schichten	107
A.1	GAUSSScher Satz für Flächen	123
F.1	Drehung um die Achse e_3	134
F.2	Drehung um die \bar{e}_2 -Achse	134
F.3	Zurückdrehung um die \bar{e}_3 -Achse	135
F.4	Direktordarstellung nach der Transformation	137
F.5	Direktordarstellung nach der Transformation und einer Belastung	137
G.1	Ebene Drehung des Direktors	140

Tabellenverzeichnis

4.1	EAS nach Kapitel 4.2.3	54
4.2	EAS nach BISCHOFF UND RAMM (1997)	56
4.3	EAS im Vergleich	57
5.1	u_E im Vergleich	83
5.2	P_{kr} bei Einspannung	86
5.3	p^{kr} für verschiedene Netze	87
5.4	konstantes Torsionsmoment	89
5.5	Legende zu Abb. (5.10)	90
5.6	Legende zu Abb. (5.12)	92
5.7	u_A, v_B im Vergleich beim (8x8)-Netz	93
5.8	Legende zu Abb. (5.14)	95
5.9	w_A im Vergleich für ein (8x8)-Netz	95
5.10	Verschiedene Elemente im Vergleich	97
5.11	Mittendurchsenkung nach Be- und Entlastung	106
G.1	Update des Drehtensors nach BETSCH, MENZEL & STEIN (1998) . .	142

Kapitel 1

Einleitung

Wie häufig in der Physik stellt die Strukturmechanik dem Ingenieur die Aufgabe, Systeme partieller Differentialgleichungen mit problemspezifischen Randbedingungen zu lösen. Da diese Differentialgleichungen bei den in der Ingenieurpraxis auftretenden komplexen Geometrien nicht mehr analytisch lösbar sind, besteht ein großer Bedarf an computergestützten Näherungsverfahren. Hierbei hat sich in der Strukturmechanik im wesentlichen die Finite-Elemente-Methode durchgesetzt. Dies ist u.a. darauf zurückzuführen, daß die entstehenden Systemmatrizen für gewöhnlich symmetrisch sind und eine Bandstruktur aufweisen. Bei geeigneter Netzgenerierung ist die Bandbreite recht gering. Zusätzlich ist die Finite-Elemente-Methode problemlos anwendbar auf inelastisches Materialverhalten und eignet sich ebenfalls für die Ankoppelung von Kontaktproblemen.

1.1 Stand der Entwicklung

Angefangen mit den ersten Veröffentlichungen von TURNER ET AL. (1956) ging die Entwicklung der FE-Methode einher mit der rasanten Entwicklung leistungsfähiger Computer. Den englischsprachigen Begriff *finite element* prägte CLOUGH (1960), auch wenn ARGYRIS (1954) zeitgleich die Grundlagen der Methode veröffentlicht hatte. Dieser jedoch hatte den prägenden Namen *finite element* nicht benutzt. Während TURNER ET AL. (1956) nur die Membranverzerrungen behandelten, also quasi das erste Scheibenelement entwickelten, präsentierten ADINI UND CLOUGH (1961) das erste Plattenelement. Einen Überblick zur weiteren Entwicklung der FE-Methode vermitteln z.B. die Arbeiten von MACNEAL (1998), ZIENKIEWICZ (2000) oder YANG ET AL. (2000). Insbesondere YANG ET AL. (2000) verweisen auf eine Fülle von repräsentativen Literaturstellen.

Der Begriff der *Schale* läßt sich qualitativ zunächst als flächenhafte Struktur definieren. Diese zeichnet sich dadurch aus, daß eine ihrer charakteristischen Abmessungen wesentlich geringer ist als die beiden anderen. Damit ist ihre Geometrie im Raum

beschreibbar durch eine Mittelfläche und die zugehörige Dicke. Hieraus erklärt sich, daß die kontinuumsmechanische Modellbildung, die der Strukturanalyse von Schalen zugrundeliegt, eine zweidimensionale Theorie ist. Diese führt dann infolge bestimmter kinematischer Annahmen und Näherungen zur jeweiligen Schalentheorie. Wie das Wort *jeweilig* anklingen läßt, gibt es im Gegensatz zur elementaren Balkentheorie nicht *die* Schalentheorie, sondern je nach Annahmen existiert eine Fülle von Schalentheorien. Der klassische Direktoransatz nach NAGHDI (1956) stellt einen asymptotischen Übergang zum dreidimensionalen Kontinuum dar, wenn man tatsächlich unendlich viele Glieder bei der Reihenentwicklung in Dickenrichtung der Schale mitnimmt. Führt man die Geradlinigkeitshypothese ein, erhält man bei Vernachlässigung der Dickenverzerrung in der Kinematik die schubelastische MINDLIN-REISSNER-Theorie der Schalen. Fordert man zusätzlich Schubstarrheit, gelangt man zur Schalentheorie nach KIRCHHOFF-LOVE. Die klassische Direktortheorie nach NAGHDI (1972) oder GREEN UND ZERNA (1950) dient vielen Autoren als Vorlage für die Entwicklung von Finiten Elementen: BÜCHTER (1992), BETSCH UND STEIN (1996), SCHOOP (1989), EBERLEIN (1997), BISCHOFF (1999), SANSOUR (1996), PARISCH (1995), SIMO UND FOX (1989), HARNAU UND SCHWEIZERHOF (2002) und viele andere lehnen sich mit ihren Arbeiten an diese Theorie an.

Mit der exakten kinematischen Definition GREEN-LAGRANGEScher Verzerrungen ist insbesondere die Darstellung finiter Rotationen bereits in den 1980er Jahren Stand der Technik geworden - siehe z.B. SCHOOP (1987). Hinsichtlich der Koexistenz von sogenannten *degenerierten* Elementen, die aus der dreidimensionalen Kontinuums-theorie herrühren, und den auf einer klassischen Schalentheorie basierenden Formulierungen sei hier auf das Kapitel 4 dieser Arbeit verwiesen - siehe auch HUGHES (1987) oder CRISFIELD (1986).

Da die rein verschiebungsbasierten Elemente einige Unzulänglichkeiten aufweisen, wurden bereits von ZIENKIEWICZ, TAYLOR & TOO (1971) reduzierte Integrationstechniken vorgeschlagen, mit denen die als *Locking* bekannten Phänomene behoben werden sollten. Außerdem wurden diese reduzierten Integrationstechniken vielfach angestrebt, um Rechenleistung und -zeit einzusparen. So wurde z.B. von HUGHES, COHEN & HAROUN (1978) gezielt ein Vierknotenelement mit Einpunktintegration vorgestellt. Da sich infolge der reduzierten Integration ein Rangdefekt der Elementsteifigkeitsmatrix einstellt, sind Stabilisierungstechniken erforderlich, um Nullenergieeigenformen des Elementes auszuschließen - siehe z.B. BELYTSCHKO UND TSAY (1983) und BELYTSCHKO ET AL. (1984).

Ein weiterer Schritt zur Verbesserung der Genauigkeit wurde von TAYLOR, BERESFORD & WILSON (1976) getan, deren QM6 Element das Locking des bilinearen Standardelements mittels der Methode der *inkompatiblen Moden* verbessert ohne dabei Nullenergieeigenformen zu erzeugen. Einen systematischen Ansatz zur Verbesserung der reinen Weggrößenformulierung stellt die gemischte oder gemischt-hybride Methode auf Basis erweiterter Variationsprinzipie dar (z.B. nach HELLINGER-REISSNER

oder HU-WASHIZU). Hierbei werden anstelle des Verschiebungsfeldes bzw. der Lage im Raum ebenfalls die Verzerrungs- und/oder Spannungsgrößen als unabhängige Variablen variiert. Verallgemeinerte Variationsprinzipien werden u.a. von FELIPPA UND MILITELLO (1990) und TONG (1988) diskutiert. Bei den gemischten Variationsprinzipien werden dann Spannungsfreiwerte eingeführt und Spannungsansätze implementiert - siehe HARBORD (1972). Die gemischt-hybriden Formulierungen eliminieren die Spannungsfelder und die inkompatiblen Verzerrungsfelder auf Elementebene, so daß die ursprüngliche Mehrfeldformulierung dann auf eine Einfeldformulierung zurückgeführt werden kann. Dies erweist sich insbesondere dann als vorteilhaft, wenn eine Stabilitätsuntersuchung in Betracht kommt. Diese kann bei einer reinen Weggrößenformulierung bzw. bei einer gemischt-hybriden Formulierung, in der Verzerrungs- und Spannungsfreiwerte eliminiert wurden, sofort anhand der Eigenwerte der Systemsteifigkeitsmatrix durchgeführt werden. Bei einer gemischten Formulierung muß die Stabilitätsuntersuchung der eigentlichen Rechnung nachgeschaltet werden, da die Systemsteifigkeitsmatrix in diesem Fall nicht mehr positiv definit zu sein braucht.

Einer der vielversprechendsten Ansätze, die Leistungsfähigkeit des Vierknotenstandardelementes (Q1) zu erhöhen, ist die auf SIMO UND RIFAI (1990) zurückgehende *enhanced assumed strain* Methode, kurz EAS genannt. Diese Methode beinhaltet als Sonderfall die bereits von TAYLOR, BERESFORD & WILSON (1976) vorgeschlagene Methode der *inkompatiblen Moden*. Sie eröffnet gleichzeitig eine systematische Ableitung der aus Verzerrungsansätzen resultierenden Elementmatrizen auf Basis des Dreifeldenergiefunctionals nach WASHIZU (1982). Die Freiwerte dieser inkompatiblen Verzerrungsmoden werden dann auf Elementebene kondensiert und somit erhält man wieder eine Einfeldformulierung im Sinne des klassischen Prinzips der virtuellen Arbeiten. Der EAS-Ansatz wird meist angewendet auf die Membranverzerrungen $\epsilon_{\alpha\beta}$ und/oder die Dickenverzerrungen ϵ_{33} - sofern diese in der Kinematik berücksichtigt werden. Mittlerweile existieren viele Elementvarianten, die diesen Gedanken umsetzen. Die Forschung auf diesem Gebiet ist bei weitem noch nicht als abgeschlossen anzusehen, da gegen die von WRIGGERS UND REESE (1996) nachgewiesenen Instabilitäten noch keine universell einsetzbaren, d.h. für beliebige Elementgeometrien und Materialmodelle verwendbaren Stabilisierungstechniken existieren. Diskutiert werden diese Probleme u.a. von WALL, BISCHOFF & RAMM (2000) und REESE (2002).

Bei schubelastischen Elementformulierungen hat sich die *assumed natural strain* Formulierung etabliert, kurz ANS genannt. Die Methode geht zurück auf die Arbeiten von HUGHES UND TEZDUYAR (1981) und DVORKIN UND BATHE (1984). Sie dient der Abmilderung des Querschublockings und bedarf im Gegensatz zur EAS-Methode keiner zusätzlichen Freiwerte. Vielmehr werden die Stützwerte für die Interpolation der Schubverzerrungen $\epsilon_{\alpha 3}$ direkt aus dem Verschiebungszustand an als *sampling points* bezeichneten Punkten ermittelt. Wesentlich hierfür ist, daß die Lage dieser Kollokationspunkte nicht beliebig ist. Vielmehr wählt man diese gerade dort, wo die das Locking verursachenden parasitären Schubverzerrungen verschwinden und

interpoliert von dort aus ins Element.

Eine ähnliche Methode ist die *discrete shear gap method* nach BLETZINGER, BISCHOFF & RAMM (2000), kurz DSG genannt. Diese Methode weist Ähnlichkeit mit der ANS-Methode auf: Ebenfalls werden Schubverzerrungen an diskreten Punkten aus den Knotenfreiwerten ermittelt und anschließend ins Element interpoliert. Der Unterschied zur ANS-Methode ist jedoch, das die Kollokationspunkte beliebig gewählt werden können und nicht a priori bekannt sein müssen, wodurch das Verfahren unabhängig wird von Elementform und verwendetem Interpolationsgrad. Nach BISCHOFF (1999) existiert bislang noch keine variationelle Absicherung der DSG-Methode.

Hinsichtlich der Umsetzung der ANS- oder DSG-Methode ist jedoch zu beachten, daß diese Konzepte sich nicht eignen in Kombination mit der in dieser Arbeit umgesetzten discrete KIRCHHOFF theory (DKT).

1.2 Gliederung und Ziel der Arbeit

Die wesentliche Motivationsgrundlage dieser Arbeit ist die Entwicklung effizienter Elementformulierungen für Schalenstrukturen mit geometrisch und physikalisch nicht-linearem Verhalten. Die Anwendungsmöglichkeiten dieser Elemente sind vielfältig und erstrecken sich über die gesamte Palette des Ingenieurwesens.

Hierbei knüpfen die präsentierten Elemente an die Arbeiten von SCHOOP (1989) und VERHOEVEN (1992) an.

Diese Arbeit gliedert sich im wesentlichen in vier Teile. Im Kapitel 2 wird zunächst die der Kinematik zugrunde liegende Schalentheorie referiert. Am Ende des Kapitels wird ein Stabilitätsfall der Direktortheorie aufgezeigt, der begründet, weshalb auf die Einsdirektorkinematik ausgewichen wurde: Die Koppelung von transversaler Normalkraft und Biegemomenten soll verhindert werden. Für die später durchzuführenden Beispielrechnungen werden in Kapitel 3 die zugrunde gelegten Materialgesetze erläutert. Insbesondere werden exemplarisch analytische Lösungen für die Sonderfälle des zweidimensionalen NEO-HOOKE Stoffgesetzes sowie eine zweidimensionale Elasto-Plastizität nach VON-MISES erarbeitet. Das Kapitel 4 bildet den Kern der Arbeit; hier wird ausführlich die Elementkinematik für die vorgestellten Dreiecks- und Viereckselemente diskutiert. Zur Validierung der Formulierung wird in Kapitel 5 eine Fülle von Ergebnissen linearer und nichtlinearer Beispielrechnungen zusammengestellt. Das Kapitel 6 schließt mit einem kurzen Fazit.

Kapitel 2

Schalenbeschreibung

Die hier präsentierte Schalentheorie beschreibt die Deformation der Schale vollständig nichtlinear, d.h. es werden eine Referenz- und eine Bezugskonfiguration eingeführt, mit Hilfe derer sich GREEN-LAGRANGE Verzerrungen definieren lassen. Ein Übergang zur geometrisch linearen Theorie ist dann formal immer durch eine Linearisierung möglich; der Spezialfall der Theorie I. Ordnung ist also stets enthalten. Die geometrische Beschreibung des Schalentragwerks wird, wie in der Theorie der Flächen-tragwerke üblich, durch eine Mittelfläche und den Schalenraum charakterisiert. Hierzu wird die auf NAGHDI (1956) zurückgehende Direktorthorie in der von SCHOOP (1987) formulierten Form verwendet. Auf eine ausführliche, einführende Darstellung der kontinuumsmechanischen Grundlagen wird an dieser Stelle verzichtet. Es existiert hierzu eine Fülle von Literatur, beispielsweise TRUESDELL UND TOUPIN (1960), TRUESDELL UND NOLL (1965), BECKER UND BÜRGER (1975), ERINGEN (1967) oder OGDEN (1984). Es werden lediglich im Anhang A einige Grundbegriffe der Differentialgeometrie zusammengestellt, sofern diese im folgenden benötigt werden.

2.1 Deformationsanalyse

Die Schalenbeschreibung wird in eine Beschreibung von Mittelfläche und Schalenraum aufgeteilt. Zur Definition der GREEN-LAGRANGE Verzerrungen ist die Definition von Konfigurationen des Schalenkontinuums erforderlich. Läßt sich in der Referenzkonfiguration, in der die Schale eine konstante Dicke h aufweist, jedem materiellen Punkt \mathbf{R} der Schale (dargestellt als Funktion der Flächenkoordinaten q^α , $\alpha = 1, 2$) ein Normalenvektor \mathbf{n} zuordnen, so erhält man als Beschreibung eines beliebigen Punktes $\mathbf{X}(q^\alpha, \zeta)$ im Schalenraum die Darstellung:

$$\mathbf{X}(q^\alpha, \zeta) = \mathbf{R}(q^\alpha) + \zeta \mathbf{n}; \quad -\frac{h}{2} \leq \zeta \leq \frac{h}{2}. \quad (2.1)$$

Zur Beschreibung der aktuellen, deformierten Konfiguration wird in analoger Weise der Ansatz gewählt

$$\mathbf{x}(q^\alpha, \zeta) = \mathbf{r}(q^\alpha) + \zeta \mathbf{d}; \quad -\frac{h}{2} \leq \zeta \leq \frac{h}{2} \quad (2.2)$$

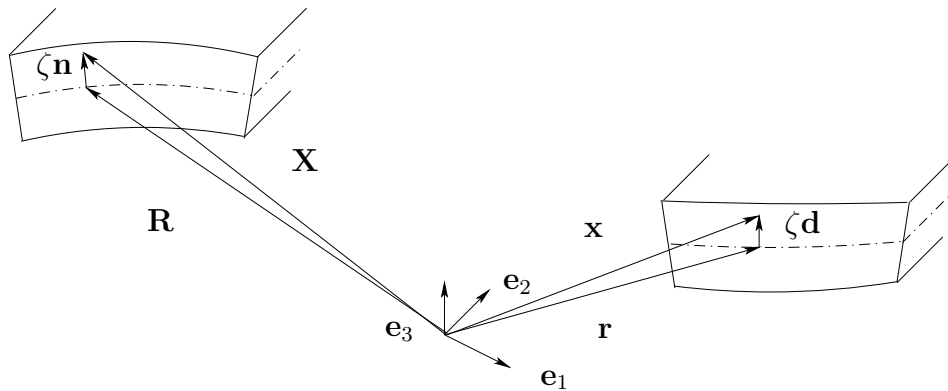


Abbildung 2.1: Ortsvektoren der Schale

Der Vektor \mathbf{d} wird in der Literatur üblicherweise als *Direktor* bezeichnet. Die Gl. (2.2) stellt zugleich eine Deformationshypothese dar: Der Term $\zeta \mathbf{d}$ bedeutet, daß Verwölbungen im aktuellen Querschnitt nicht möglich sind, weshalb diese Hypothese auch als *Geradlinigkeitshypothese* bezeichnet wird. Mit den in Gl. (2.2) eingeführten Größen stehen in jedem Flächenpunkt sechs Parameter zur kinematischen Beschreibung zur Verfügung. Insbesondere ist an dieser Stelle noch keine Einschränkung hinsichtlich der Querschubverformung gemacht, denn \mathbf{d} ist im allgemeinen nicht orthogonal zur aktuellen Mittelfläche. Eine derartige Restriktion, bei der in jedem Zustand \mathbf{d} senkrecht zur aktuellen Tangentialebene steht, wird in der Schalentheorie üblicherweise als KIRCHHOFF-LOVE-Hypothese bezeichnet. Vernachlässigte man bereits an dieser Stelle die Dickenverzerrung der Schale in der kinematischen Modellierung, gelangte man zu einer Schale im Sinne der Theorie nach MINDLIN-REISSNER. Die vorgestellte Theorie ermöglicht es, mit Hilfe der Beschreibung durch zwei vollständige Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{d} auch noch Dickenverzerrungen der Schale zu erfassen.

2.1.1 Nablaoperator

Die Definition der Verzerrungen erfolgt mit Hilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} bzw. des Nablaoperators ∇ . Der Nablaoperator im Schalenraum gemäß Gl. (A.14) wird angenähert durch

$$\nabla = (\boldsymbol{\delta} + \zeta \mathbf{B}) \cdot \nabla_2 + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \zeta}. \quad (2.3)$$

Hierbei bedeutet ∇_2 den ebenen Anteil des Nablaoperators, $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{1} - \mathbf{n} \circ \mathbf{n}$ den planaren Anteil des Einheitstensors der Tangentialebene und \mathbf{B} den Haupttensor. Mit der kontravarianten Basis \mathbf{G}^α gilt

$$\nabla_2 = \mathbf{G}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}. \quad (2.4)$$

2.1.2 Deformationsgradient

Der Deformationsgradient kann mit Gl. (2.3) definiert werden als

$$\mathbf{F} = \mathbf{x} \circ \nabla = (\mathbf{r} + \zeta \mathbf{d}) \circ \nabla \stackrel{\text{Gl. (2.3)}}{=} (\mathbf{r} + \zeta \mathbf{d}) \circ \left[(\boldsymbol{\delta} + \zeta \mathbf{B}) \cdot \nabla_2 + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right]. \quad (2.5)$$

Damit erhält man für den Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \underbrace{\mathbf{r} \circ \nabla_2 + \zeta (\mathbf{r} \circ \mathbf{B} \cdot \nabla_2)}_{\mathbf{F}_2} + \underbrace{\zeta^2 (\mathbf{d} \circ \mathbf{B} \cdot \nabla_2)}_{\sim 0} + \mathbf{d} \circ \mathbf{n}. \quad (2.6)$$

Üblicherweise wird der Term $O(\zeta^2)$ vernachlässigt. Der Teil \mathbf{F}_2 unter der geschweiften Klammer bedeutet den ebenen Anteil, der Teil $\mathbf{d} \circ \mathbf{n}$ den Normalenanteil von \mathbf{F} , wobei \mathbf{F}_2 sowohl Anteile in der Tangentialebene als auch im Schalenraum beinhaltet.

2.2 Verzerrungen

Der GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensor \mathbf{E} läßt sich mit Gl. (2.6) bilden als

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{F}_2^T \cdot \mathbf{F}_2 - \boldsymbol{\delta})}_{\text{planare Verzerrungen}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{n} \circ \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{d} + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{d} \circ \mathbf{n})}_{\text{Querschubverzerrungen}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{n} \circ \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} \circ \mathbf{n} - \mathbf{n} \circ \mathbf{n})}_{\text{Dickenverzerrungen}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Zunächst wird nur der Anteil der planaren Verzerrungen in Gl. (2.7) betrachtet. Das Ersetzen des Ausdrucks \mathbf{F}_2 durch Terme in \mathbf{r} und \mathbf{d} und das Sortieren nach Potenzen von ζ schließlich liefern für die GREEN-LAGRANGE Verzerrungen den Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}_2^T \cdot \mathbf{F}_2 - \boldsymbol{\delta}) \\ &= \frac{1}{2}(\nabla_2 \circ \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \circ \nabla_2 - \boldsymbol{\delta}) \\ &\quad + \zeta \left(\frac{1}{2}(\nabla_2 \circ \mathbf{r} \cdot (\mathbf{d} \circ \nabla_2 + \mathbf{r} \circ \nabla_2 \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla_2 \circ \mathbf{r} + \nabla_2 \circ \mathbf{d}) \cdot \mathbf{r} \circ \nabla_2) \right) \\ &\quad + \zeta^2 \left(\frac{1}{2}(\mathbf{B} \cdot \nabla_2 \circ \mathbf{r} + \nabla_2 \circ \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{d} \circ \nabla_2 + \mathbf{r} \circ \nabla_2 \cdot \mathbf{B}) \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Im Sinne von WEMPNER (1969) werden die Glieder $O(\zeta^2)$ vernachlässigt. Diese Näherung ist bei dünnen Schalen homogenen Querschnitts sinnvoll. Insbesondere bei Sandwichschalen ist sie jedoch unzulässig - siehe KÜHHORN UND SCHOOP (1992). Damit lassen sich die planaren Anteile der Verzerrungen vereinfachen. Identifiziert man die Terme in ζ^0 mit den Membranverzerrungen (der Mittelfläche) \mathbf{E}_2^0 und die Terme in ζ^1 mit den Biegeverzerrungen (im Schalenraum) \mathbf{E}_2^1 , so ergibt sich formal die Aufteilung

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2^0 + \zeta \mathbf{E}_2^1. \quad (2.9)$$

Zusammengefaßt erhält man somit die *Membranverzerrungen* der Schalenmittelfläche zu

$$\mathbf{E}_2^0 = \frac{1}{2} (\nabla_2 \circ \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \circ \nabla_2 - \boldsymbol{\delta}), \quad (2.10)$$

die *Biegeverzerrungen* als

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2^1 = & \frac{1}{2} \left[\nabla_2 \circ \mathbf{r} \cdot (\mathbf{d} \circ \nabla_2 + \mathbf{r} \circ \nabla_2 \cdot \mathbf{B}) \right. \\ & \left. + (\mathbf{B} \cdot \nabla_2 \circ \mathbf{r} + \nabla_2 \circ \mathbf{d}) \cdot \mathbf{r} \circ \nabla_2 \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

die *Querschubverzerrungen* [siehe Gl. (2.7)] zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp = & \frac{1}{2} \left[\mathbf{n} \circ (\nabla_2 \circ \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) + (\nabla_2 \circ \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) \circ \mathbf{n} \right] \\ & + \zeta \frac{1}{2} \left[\mathbf{n} \circ ((\mathbf{B} \cdot \nabla_2 \circ \mathbf{r} + \nabla_2 \circ \mathbf{d}) \cdot \mathbf{d}) \right. \\ & \left. + ((\mathbf{B} \cdot \nabla_2 \circ \mathbf{r} + \nabla_2 \circ \mathbf{d}) \cdot \mathbf{d}) \circ \mathbf{n} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

und die *Dickenverzerrungen* [siehe Gl. (2.7)] zu

$$\mathbf{E}_{33} = \frac{1}{2} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} - 1) \mathbf{n} \circ \mathbf{n}. \quad (2.13)$$

Für die Querschubverzerrungen \mathbf{E}_\perp wird analog zur Abschätzung der Biegeverzerrungen nach WEMPNER (1969) der lineare Anteil in ζ^1 vernachlässigt. D.h., es werden im Mittel konstante Schubverzerrungen unterstellt, sog. Schubmomente hingegen untersagt. Damit folgt aus Gl. (2.12) für den Querschub

$$\mathbf{E}_\perp = \frac{1}{2} \left[\mathbf{n} \circ (\nabla_2 \circ \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) + (\nabla_2 \circ \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) \circ \mathbf{n} \right]. \quad (2.14)$$

Schließlich werden noch die kovarianten Tensorkomponenten der einzelnen Verzerrungen angegeben. Mit den Metrikkomponenten $G_{\alpha\beta}$ und den Komponenten des Haupt-

tensors b_β^γ folgt aus den Definitionen in Gl. (2.10) bis Gl. (2.13)

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \mathbf{r}_{,\beta} - G_{\alpha\beta}) , \quad (2.15)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}_{,\alpha} \cdot (\mathbf{d}_{,\beta} + b_\beta^\gamma \mathbf{r}_{,\gamma}) + \mathbf{r}_{,\beta} \cdot (\mathbf{d}_{,\alpha} + b_\alpha^\gamma \mathbf{r}_{,\gamma})] , \quad (2.16)$$

$$\epsilon_{3\alpha} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} , \quad (2.17)$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{2} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} - 1) . \quad (2.18)$$

2.2.1 Verzerrungsableitungen

Im folgenden werden noch die Ableitungen bzw. Variationen der Verzerrungen benötigt, da diese zur Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeiten erforderlich sind. Zur besseren Übersicht werden diese für die kovarianten Tensorkomponenten notiert. Bei der Bildung der Arbeitsausdrücke ist dann lediglich darauf zu achten, daß die Schnittkraft- bzw. Spannungstensoren mit ihren kontravarianten Komponenten Eingang in das Energieprinzip finden. Da bei der Bildung des Arbeitsausdruckes im Energieprinzip symmetrische Spannungstensoren verwendet werden, genügt es, lediglich die unsymmetrischen Anteile der variierten Verzerrungen zu notieren. Aus Gl. (2.15) bis Gl. (2.18) folgen damit die (nicht symmetrisierten) Variationen der kovarianten Komponenten des Verzerrungstensors zu

$$\delta \epsilon_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{r}_{,\beta} \quad (2.19)$$

$$\delta \kappa_{\alpha\beta} = \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{r}_{,\beta} + b_\alpha^\gamma (\mathbf{r}_{,\gamma} \cdot \delta \mathbf{r}_{,\beta} + \mathbf{r}_{,\beta} \cdot \delta \mathbf{r}_{,\gamma}) + \mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{d}_{,\beta} \quad (2.20)$$

$$\delta \epsilon_{3\alpha} = \frac{1}{2} \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{r}_{,\alpha} + \frac{1}{2} \mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{d} \quad (2.21)$$

$$\delta \epsilon_{33} = \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{d} \quad (2.22)$$

2.3 Spannungstensoren

In der geometrisch nichtlinearen Theorie existieren verschiedene Möglichkeiten, arbeitskompatible Spannungsmaße zu definieren - siehe MACVEAN (1968). Im Hinblick auf die Formulierung von Arbeitsausdrücken in einem Variationsprinzip ist es beim Gebrauch von GREEN-LAGRANGE Verzerrungen geboten, den 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor einzuführen. Dieser läßt sich analog zum GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensor aufspalten in ebene, Schub- und transversale Anteile¹:

$$\mathbf{S} = \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} \mathbf{G}_\alpha \circ \mathbf{G}_\beta + \tilde{\sigma}^{3\alpha} (\mathbf{n} \circ \mathbf{G}_\alpha + \mathbf{G}_\alpha \circ \mathbf{n}) + \tilde{\sigma}^{33} \mathbf{n} \circ \mathbf{n} . \quad (2.23)$$

¹Es gilt $\tilde{\sigma}^{3\alpha} = \tilde{\sigma}^{\alpha 3}$

Hierbei stellen $\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}$ die planaren Spannungen an einem beliebigen Punkt im Schalenraum dar. Analog zur Gl. (2.9) gilt für die Spannungen

$$\tilde{\sigma}^{\alpha\beta} = \tilde{\sigma}_0^{\alpha\beta} + \zeta \tilde{\sigma}_1^{\alpha\beta}. \quad (2.24)$$

Die Umrechnung zwischen dem referenzbezogenen 2. PIOLA-KIRCHHOFF Tensor \mathbf{S} und dem auf die aktuelle Lage bezogenem EULERSchen Spannungstensor \mathbf{T} ist im Anhang in Gl. (A.21) angegeben.

2.4 Schnittlasten

Als Spannungsergebnisse werden üblicherweise Schnittlasten eingeführt. Im Hinblick auf die Bildung von Arbeitsausdrücken sollen die zu definierenden Schnittlasten ebenfalls als 2. PIOLA-KIRCHHOFF- oder Arbeitsschnittlasten eingeführt werden. Berücksichtigt man Gl. (A.13) zur Berechnung des Volumendifferentials dV und Gl. (2.23) zur Zerlegung des Spannungstensors, so ergeben sich als kontravariante Komponenten der jeweiligen Tensoren folgende Schnittgrößen [mit den Hauptkrümmungen H bzw. K gemäß Gl. (A.10) bzw. Gl. (A.11)]:

$$t^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} (1 - 2H\zeta + \zeta^2 K) d\zeta \quad (2.25)$$

$$m^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} \zeta (1 - 2H\zeta + \zeta^2 K) d\zeta \quad (2.26)$$

$$Q^\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tilde{\sigma}^{\alpha 3} (1 - 2H\zeta + \zeta^2 K) d\zeta \quad (2.27)$$

$$t^3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tilde{\sigma}^{33} (1 - 2H\zeta + \zeta^2 K) d\zeta \quad (2.28)$$

Das Tildesymbol drückt aus, daß es sich um Spannungen im gesamten dreidimensionalen Schalenkontinuum handelt. Man bezeichnet $t^{\alpha\beta}$ üblicherweise als *Membrankrafttensor* und $m^{\alpha\beta}$ als *Momententensor*. Q^α sind die *Querkräfte*, und t^3 heißt *transversale Normalkraft*. Die Tensoren $t^{\alpha\beta}$ und $m^{\alpha\beta}$ sind symmetrisch.

2.5 Prinzip der virtuellen Arbeiten

Im Sinne der Statik gilt als Äquivalenz der Gleichgewichtsbedingungen die Aussage

$$\delta A^i = \delta A^a. \quad (2.29)$$

Die Literatur bezeichnet Gl. (2.29) auch als *schwache* Form des Prinzips.

2.5.1 Innere Arbeit

Berücksichtigt man die in Gl. (2.25) bis Gl. (2.28) eingeführten Definitionen und führt die Variation bzgl. der Verschiebungsgrößen aus, so ergibt sich für die innere virtuelle Arbeit

$$\begin{aligned}\delta A^i &= \int_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \\ &= \int_A [t^{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta} + Q^\alpha 2\delta \epsilon_{3\alpha} + t^3 \delta \epsilon_{33}] dA .\end{aligned}\quad (2.30)$$

Die kovarianten Verzerrungsvariationen können gemäß Gl. (2.19) bis Gl. (2.22) ersetzt werden, so daß man anstelle von Gl. (2.30) erhält

$$\begin{aligned}\delta A^i &= \int_A [[(t^{\gamma\beta} + m^{\alpha\gamma} b_\alpha^\beta + m^{\alpha\beta} b_\alpha^\gamma) \mathbf{r}_{,\gamma} + Q^\beta \mathbf{d} + m^{\alpha\beta} \mathbf{d}_{,\alpha}] \cdot \delta \mathbf{r}_{,\beta} \\ &\quad + [m^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha}] \cdot \delta \mathbf{d}_{,\beta} + [t^3 \mathbf{d} + Q^\alpha \mathbf{r}_{,\alpha}] \cdot \delta \mathbf{d}] dA .\end{aligned}\quad (2.31)$$

Die planaren Anteile aus Membran- und Biegeschnittlasten lassen sich zusammenfassen mit Hilfe der Abkürzung

$$\hat{t}^{\alpha\beta} = t^{\alpha\beta} + m^{\gamma\alpha} b_\gamma^\beta + m^{\gamma\beta} b_\gamma^\alpha .\quad (2.32)$$

Damit nimmt die virtuelle innere Arbeit des Schalenkontinuums folgende Form an:

$$\begin{aligned}\delta A^i &= \int_A [[\hat{t}^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha} + Q^\beta \mathbf{d} + m^{\alpha\beta} \mathbf{d}_{,\alpha}] \cdot \delta \mathbf{r}_{,\beta} \\ &\quad + [m^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha}] \cdot \delta \mathbf{d}_{,\beta} + [t^3 \mathbf{d} + Q^\alpha \mathbf{r}_{,\alpha}] \cdot \delta \mathbf{d}] dA .\end{aligned}\quad (2.33)$$

2.5.2 Äußere Arbeit

An der Schale wird äußere Arbeit durch Volumen-, Flächen- oder Randlasten geleistet. Die Randlasten werden mit \mathbf{M}_R und \mathbf{P}_R bezeichnet, im Gebiet wirken eine Volumenlast \mathbf{q} sowie die Flächenlasten \mathbf{p}^U und \mathbf{p}^L auf die beiden Laibungsflächen. Diese sind dargestellt in Abb. (2.2). Aus den Lasten \mathbf{q} , \mathbf{p}^U und \mathbf{p}^L errechnet man eine Last \mathbf{p}_0 , die an der Mittelflächenverschiebung arbeitet, und eine Last \mathbf{p}_1 , die den Direktor zu drehen oder seine Länge zu ändern bestrebt ist. Es gilt

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}^U + \mathbf{p}^L - Hh(\mathbf{p}^U - \mathbf{p}^L) + h\mathbf{q}\quad (2.34)$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}^U - \mathbf{p}^L - Hh(\mathbf{p}^U + \mathbf{p}^L) - H\frac{h^2}{3}\mathbf{q}\quad (2.35)$$

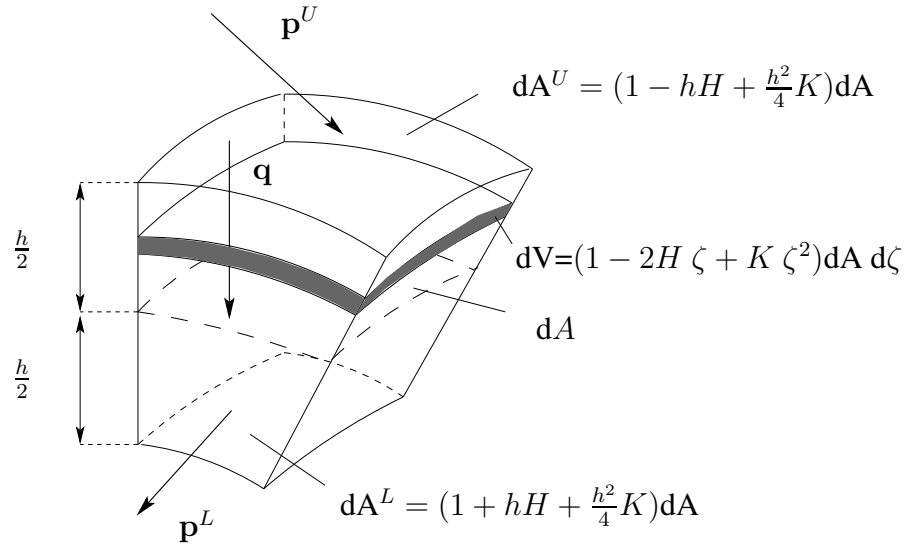


Abbildung 2.2: Äußere Lasten am Volumendifferential

Mit Gl. (2.34) und Gl. (2.35) ergibt sich die virtuelle äußere Arbeit als Flächen- und Randintegral zu

$$\delta A^a = \int_A \left[\mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{h}{2} \mathbf{p}_1 \cdot \delta \mathbf{d} \right] dA + \oint_{\partial A} (\mathbf{P}_R \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{M}_R \cdot \delta \mathbf{d}) ds. \quad (2.36)$$

2.5.3 Gleichgewichtsbedingungen

Die nichtlinearen Gleichgewichtsbedingungen der Schale sowie die zugehörigen Randaussagen lassen sich nun formal mathematisch gewinnen, indem man zunächst Gl. (2.30) und Gl. (2.36) gleichsetzt. Die Anwendung des GAUSSSchen Integralsatzes und das anschließende Sortieren der Terme nach den Variationen $\delta \mathbf{r}$ bzw. $\delta \mathbf{d}$ liefern schließlich die zugehörigen Differentialgleichungen des Variationsproblems, die wegen der Beliebigkeit des Integrationsbereiches in jedem Punkt des betrachteten Gebietes erfüllt sein müssen. Die zugehörigen Randaussagen folgen ebenso automatisch aus der Prozedur der Anwendung des Integralsatzes. Die Feldgleichungen lauten (Herleitung siehe Anhang B)

$$[\hat{t}^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha} + m^{\alpha\beta} \mathbf{d}_{,\alpha} + Q^\beta \mathbf{d}]_{|\beta} + \mathbf{p}_0 = 0 \quad (2.37)$$

$$[m^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha}]_{|\beta} - Q^\beta \mathbf{r}_{,\beta} - t^3 \mathbf{d} + \frac{h}{2} \mathbf{p}_1 = 0 \quad (2.38)$$

und die Randbedingungen

$$\mathbf{P}_R = e_{\perp\beta} (\hat{t}^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha} + m^{\alpha\beta} \mathbf{d}_{,\alpha} + Q^\beta \mathbf{d}) \quad (2.39)$$

$$\mathbf{M}_R = e_{\perp\beta} m^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha} \quad (2.40)$$

Die beiden Gleichungen (2.37) und (2.38) lohnen eine genauere Betrachtung. Sie stellen - unter Berücksichtigung der Näherungen der Abschnitte 2.1 und 2.2 - die differentielle Form des Gleichgewichts der Schale in allgemein nichtlinearer Form dar. Die Gl. (2.37) läßt sich als Kraftgleichgewichtsbedingung interpretieren. Die Ausdrücke $\hat{t}_{\alpha\beta}\mathbf{r}_{,\alpha}$ und $Q^\beta\mathbf{d}$ lassen sich identifizieren als Kräfte in der Tangentialebene der Schale bzw. in Richtung der materiellen Normale, deren Divergenz ins Gleichgewicht eingeht. Augenscheinlich befremdend ist jedoch der Term $m^{\alpha\beta}\mathbf{d}_{,\alpha}$. Weshalb bedarf es des Momentes im Kräftegleichgewicht? Dies zu veranschaulichen fällt leichter, wenn man sich nochmals vor Augen führt, daß die Schnittlasten der Schale gemäß Gl. (2.25) bis Gl. (2.28) als Arbeitsschnittlasten (2. PIOLA-KIRCHHOFFSche Tensoren) definiert sind, das Gleichgewicht aber mit den auf die aktuelle Konfiguration bezogenen *Gleichgewichtsschnittlasten* (EULERSche Tensoren) zu notieren ist. In Abb. (2.3) wird dies in der Seitenansicht eines auf Biegung beanspruchten Quer-

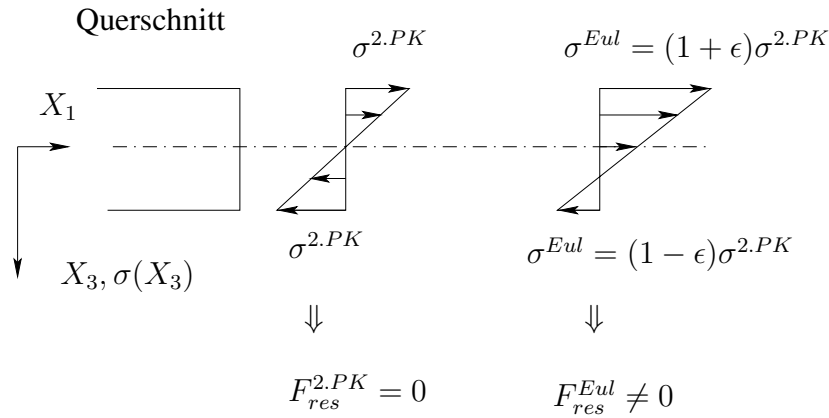


Abbildung 2.3: Spannungen im Gleichgewicht

schnitts verdeutlicht: Die durch das Multiplizieren mit dem Deformationsgradienten entstandene, zur Schalenmitte unsymmetrische Spannungsverteilung ergibt eine resultierende Kraft F_{res} in Richtung der Mittelflächentangente. Diese Kraftwirkung des Momentes kommt in dem Term $m^{\alpha\beta}\mathbf{d}_{,\alpha}$ zum Ausdruck (differentiell betrachtet ist $\mathbf{d}_{,\alpha}$ im Lastfall Biegung tangential an die Mittelfläche gerichtet). Auch die Gl. (2.38) lohnt eine genauere Betrachtung. Man bezeichnet sie zweckmäßigerweise als Kräftepaargleichgewicht. Während die Terme $[m^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\alpha]_{|\beta}$ und $Q^\beta\mathbf{r}_{,\beta}$ recht stark der (für die Platte gültigen) Formel $\nabla_2 \cdot \mathbf{M} = \mathbf{Q}$ ähneln, ist der Term $t^3\mathbf{d}$ nicht so einfach zu deuten. Zur Deutung soll die Gl. (2.38) zunächst linearisiert werden. Mit $\mathbf{r}_{,\alpha} \approx \mathbf{G}_\alpha$, $\mathbf{d} \approx \mathbf{n}$ und $\mathbf{G}_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \mathbf{G}_\lambda + b_{\alpha\beta}\mathbf{n}$ notiert man in physikalischen Zylinderkoordinaten in Dickenrichtung \mathbf{n} die Aussage

$$t_n = \frac{h}{2}p_n - \frac{m_{\varphi\varphi}}{R}. \quad (2.41)$$

t_n bedeutet die transversale Normalkraft, h die Tragwerksdicke und p_n die transversale Druckbelastung (sofern vorhanden). $m_{\varphi\varphi}$ bezeichnet das aus der Dickenin-

tegration der Spannungen $\sigma_{\varphi\varphi}$ resultierende Biegemoment in Umfangsrichtung und R den Krümmungs- bzw. Zylinderradius. Führt man in Gedanken einen vertikalen Schnitt durch die Zylinderschale wie in Abb. (2.4) skizziert, erkennt man, daß das auf den Krümmungsradius R bezogene Biegemoment weder am oberen noch am unteren Schnitt für sich im Gleichgewicht ist. Vielmehr bedarf es der aus den Spannungen σ_n resultierenden transversalen Normalkraft t_n , um das Gleichgewicht am Schnitt wiederherzustellen. D.h. selbst für den unbelasteten Zustand ($p_n = 0$) erfährt die Schale infolge ihrer Krümmung bereits in der linearen Theorie eine Koppelung von Biegung und transversaler Normalkraft.

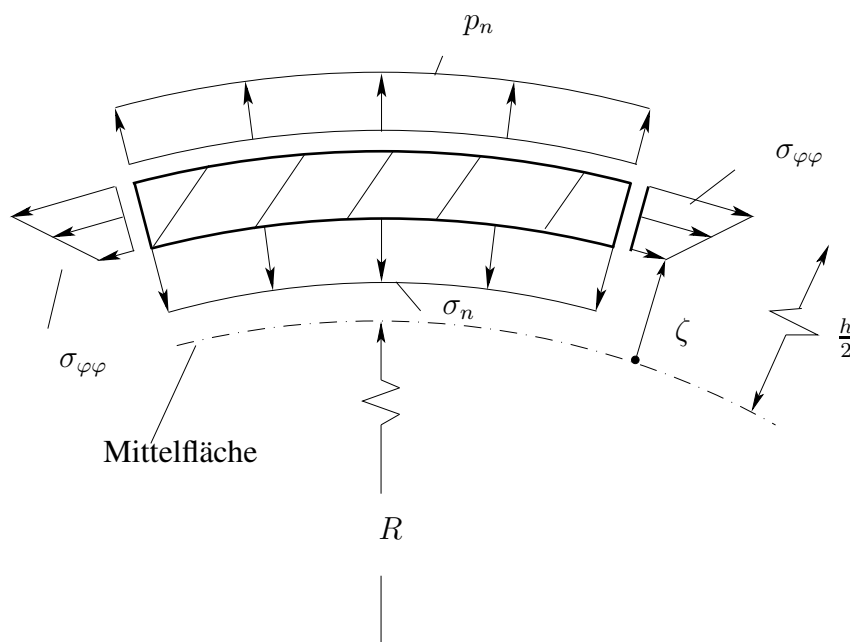


Abbildung 2.4: Gleichgewicht am Vertikalschnitt

Dieser aus der Interaktion von Biegemoment und transversaler Normalkraft herrührende Effekt wird als *Momentenumlenkeffekt* bezeichnet.

Auch die Randbedingungen gemäß Gl. (2.39) und Gl. (2.40) sollen nicht unkommentiert bleiben. Durch die drei Terme von Gl. (2.39) sind alle drei Richtungen von \mathbf{P}_R abgedeckt, wohingegen sich mit \mathbf{M}_R nur Momente aufprägen lassen, die aus Spannungen parallel zur Mittelfläche resultieren, also Biege- oder Torsionsmomente. Dies ist eine Folge aus der kinematischen Restriktion, die Terme in ζ^1 in der Schubverzerrung Gl. (2.12) gemäß WEMPNER (1969) zu vernachlässigen. Damit ist die Aufprägung von Schubmomenten nicht möglich.

2.6 Stabilitätsfälle in der Direktorplattentheorie

Die Gleichgewichtsbedingungen nach Gl. (2.37) und Gl. (2.38) werden für den Fall des ebenen Tragwerks notiert. Bei kartesischer Beschreibung und verschwindenden Krümmungstermen lauten die - nach wie vor nichtlinearen - Gleichgewichtsbedingungen:

$$(t_{\alpha\beta}\mathbf{r}_{,\alpha} + m_{\alpha\beta}\mathbf{d}_{,\alpha} + Q_{\beta}\mathbf{d})_{,\beta} + \mathbf{p}_0 = 0, \quad (2.42)$$

$$(m_{\alpha\beta}\mathbf{r}_{,\alpha})_{,\beta} - Q_{\beta}\mathbf{r}_{,\beta} - t_3\mathbf{d} + \frac{h}{2}\mathbf{p}_1 = 0. \quad (2.43)$$

Für die am Rand der Platte austretenden Kraft- und Momentenvektoren gilt

$$\mathbf{P}_R = e_{\perp\beta} (t^{\alpha\beta}\mathbf{r}_{,\alpha} + m_{\alpha\beta}\mathbf{d}_{,\alpha} + Q_{\beta}\mathbf{d}), \quad (2.44)$$

$$\mathbf{M}_R = e_{\perp\beta} m_{\alpha\beta}\mathbf{r}_{,\alpha}. \quad (2.45)$$

Im Sinne einer Stabilitätsuntersuchung gemäß der Theorie II. Ordnung wird wie in Abb. (2.5) skizziert zunächst der Zustand beidseitigen, konstanten Drucks betrachtet. Infolgedessen stellen sich in transversaler Richtung eine Zusammendrückung $e = \text{konstant}$ ein und in horizontaler Richtung ein konstanter Membrankraftzustand. Diese Zustände werden vorab nach der Theorie I. Ordnung untersucht. Nun werden im Sinne kleiner Störungen $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$ für die Mittelfläche \mathbf{r} und den Direktor \mathbf{d} kinematische Ansätze eingeführt und infinitesimale Nachbarlagen auf Stabilität untersucht:

$$\mathbf{r} \approx \begin{pmatrix} X_1 + u_1 \\ X_2 + u_2 \\ w \end{pmatrix} \quad \mathbf{d} \approx (1 - e) \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Für die Ableitungen folgt dann

$$\mathbf{r}_{,\alpha} = \begin{pmatrix} \delta_{1\alpha} + u_{1,\alpha} \\ \delta_{2\alpha} + u_{2,\alpha} \\ w_{,\alpha} \end{pmatrix} \quad \mathbf{d}_{,\alpha} = (1 - e) \begin{pmatrix} \gamma_{1,\alpha} \\ \gamma_{2,\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Diese Näherungen werden in die Gleichgewichtsaussagen der Gl. (2.42) und Gl. (2.43) eingesetzt. Dabei werden alle nichtlinearen Terme vernachlässigt mit Ausnahme derer, die die Schnittlast t_3 bzw. das Produkt $t_{\alpha\beta}w_{,\alpha}$ enthalten. Es ergeben sich die beiden Gleichungen

$$(t_{\alpha\beta}\mathbf{e}_{\alpha} + t_{\alpha\beta}w_{,\alpha}\mathbf{e}_3 + Q_{\beta}\mathbf{e}_3)_{,\beta} + \mathbf{p}_0 = 0, \quad (2.48)$$

$$(m_{\alpha\beta}\mathbf{e}_{\alpha})_{,\beta} - Q_{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha} - (1 - e)t_3\gamma_{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha} - t_3(1 - e)\mathbf{e}_3 + \frac{h}{2}\mathbf{p}_1 = 0. \quad (2.49)$$

Nun wird als konkretes Randwertproblem eine gelenkig gelagerte Rechteckplatte unter transversaler Kompression nach Abb. (2.5) untersucht. Betrachtet man die Anteile in

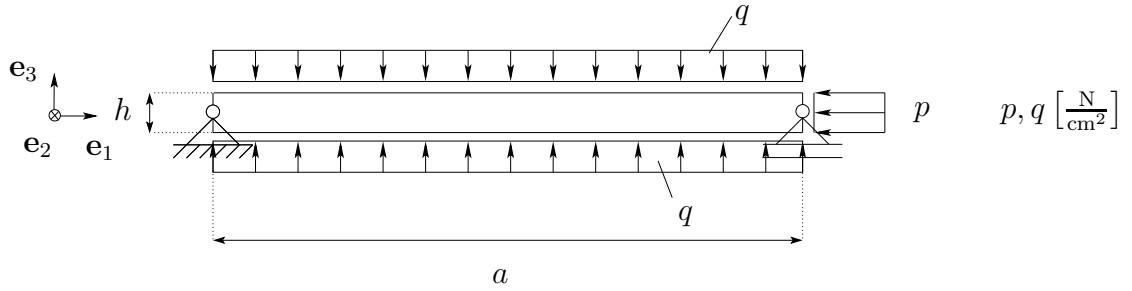


Abbildung 2.5: Platte unter Transversallast

e_3 - und e_α -Richtungen separat und berücksichtigt die Feldlast $\mathbf{p}_0 = p\mathbf{e}_1$ (p als Druckbelastung eingeführt), so ergibt Gl. (2.48) die Gleichungen der Theorie I. Ordnung

$$Q_{\beta,\beta} = -t_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta} = -phw_{,\alpha\alpha}, \quad (2.50)$$

$$t_{\alpha\beta,\beta} = 0. \quad (2.51)$$

Aus Gl. (2.49) folgt mit $\mathbf{p}_1 = 2q\mathbf{e}_3$ (q als Druckbelastung eingeführt)

$$m_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha - t_3(1-e)\gamma_\alpha = 0, \quad (2.52)$$

$$t_3(1-e) = hq. \quad (2.53)$$

Die nochmalige Divergenzbildung von Gl. (2.52) liefert zunächst

$$m_{\alpha\beta,\beta\alpha} - Q_{\alpha,\alpha} - t_3(1-e)\gamma_{\alpha,\alpha} = 0. \quad (2.54)$$

Unter Ausnutzung von Gl. (2.50) und Gl. (2.53), mit der Abschätzung $\gamma_\alpha \approx -w_{,\alpha}$ und dem Materialgesetz der Platte $m_{\alpha\beta} = -K_p w_{,\alpha\beta}$ ergibt sich die Gleichung

$$w_{\alpha\alpha,\beta\beta} + \frac{h(p+q)}{K_p} w_{,\alpha\alpha} = 0. \quad (2.55)$$

Hierbei bedeutet K_p die Plattenbiegesteifigkeit $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$. Die Gl. (2.55) führt auf ein Eigenwertproblem², das z.B. von BRUSH UND ALMROTH (1975) bzw. WIEDEMANN (1986) diskutiert wird. Eine analytische Lösung kann für die allseitig gelenkig gelagerte Platte angegeben werden. Mit dem Ansatz

$$w(x, y) = c_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (2.56)$$

ergibt sich aus der Eigenwertgleichung im Fall $p = 0$ die kritische transversale Belastung q_{kr} zum Ausbeulen der Platte als

$$q_{kr} = \frac{K_p}{h} \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right). \quad (2.57)$$

²Überträgt man Gl. (2.55) auf den Kragbalken, ergeben sich für die Lastfallpaarungen $p = 0, q \neq 0$ bzw. $p \neq 0, q = 0$ dieselben kritischen Lasten p_{kr} bzw. q_{kr} , so daß daraus auch dieselben Spannungszustände resultieren (um 90° gedreht).

Beispiel Anhand einer beidseitig gedrückten Quadratplatte sollen nun der kritische Druck und die kritische Zusammendrückung e angegeben werden. Die folgenden Daten sind gegeben:

Dicke	$h = 1 \text{ mm}$
Länge	$a = 100 \text{ mm}$
E-Modul	$E = 1000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
Querkontraktionszahl	$\nu = 0,0$

Für diesen Spezialfall vereinfacht sich Gl. (2.57) zu

$$q_{kr} = \frac{K_p}{h} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 = 0.16449 \text{ N/mm}^2. \quad (2.58)$$

Die zugehörige kritische Zusammendrückung e folgt aus

$$e_{kr} = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 = 0.016\% \quad (2.59)$$

Erklärung Die Ursache dieses modellbedingten physikalischen Defektes läßt sich verstehen, wenn man die Modellierung der Belastung etwas genauer betrachtet. Grundsätzlich kann die Last richtungstreu, konservativ oder auch als Folgelast aufgebracht werden.

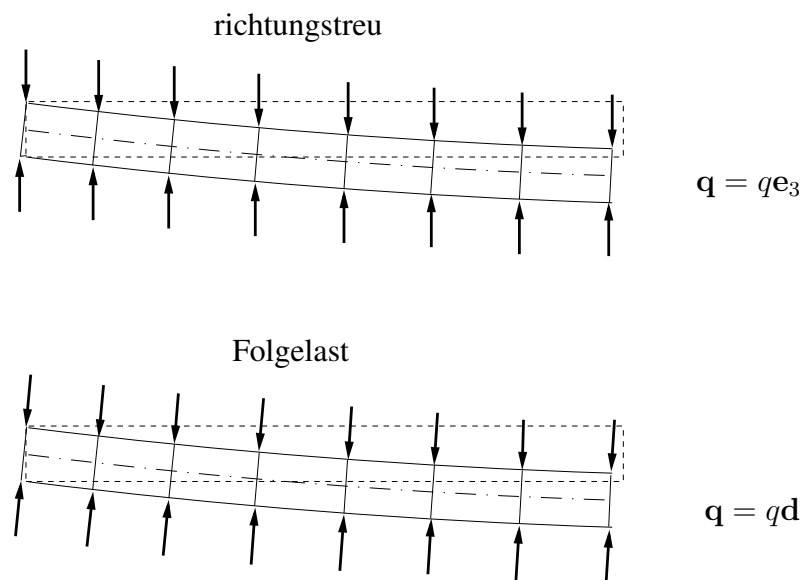


Abbildung 2.6: Modellierung der Belastung

In Abb. (2.6) erkennt man, daß im Falle der konservativen Last ein Moment entsteht, das bestrebt ist, den Direktor zu drehen. Bei entsprechend dünnen Platten ist

bei hinreichend kleiner Biegesteifigkeit ein Stabilitätsversagen möglich. Die Folgelast hingegen läßt erst gar kein Moment entstehen. Diese anschauliche Erklärung muß auch in den Formeln enthalten sein. Dies soll im folgenden anhand des Balkens überprüft werden.

2.6.1 Auswirkung der Lasteinleitung anhand des Balkens

Zur besseren Anschauung werden die Glg. (2.37) und (2.38) noch stärker vereinfacht, indem sie auf die Balkentheorie spezialisiert werden. Die Ableitung nach der Balkenkoordinate wird mit $(\dots)'$ bezeichnet. N bezeichnet die Normalkraft, Q die Querkraft, M das Biegemoment und T_3 die transversale Normalkraft. Es folgen die Gleichgewichtsaussagen

$$[N \mathbf{r}' + M \mathbf{d}' + Q \mathbf{d}]' + \mathbf{p}_0 = 0, \quad (2.60)$$

$$[M \mathbf{r}']' - T_3 \mathbf{d} + \frac{h}{2} \mathbf{p}_1 = 0. \quad (2.61)$$

Die Ansätze für die kinematischen Größen lauten analog zu Gl. (2.46)

$$\mathbf{r} \approx \begin{pmatrix} X + u \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} \approx (1 - e) \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Entsprechend lauten die Ableitungen

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} 1 + u' \\ w' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}' = (1 - e) \begin{pmatrix} \gamma' \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Aus Gl. (2.60) folgen in diesem Fall $N = 0$ und $Q = 0$, die zu Gl. (2.50) und Gl. (2.51) analogen Aussagen für das Balkentragwerk. Mit dem Stoffgesetz $EI_y \gamma' = M$ sowie den kinematischen Ansätzen aus den Glg. (2.62) und (2.63) ergeben sich aus Gl. (2.61) die Aussagen:

$$EI_y \gamma'' - T_3 (1 - e) \gamma + \frac{h}{2} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad (2.64)$$

$$-T_3 (1 - e) \gamma + \frac{h}{2} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \quad (2.65)$$

Führt man nun die Belastung wiederum als konservativ ein mit $\mathbf{p}_1 = 2q \mathbf{e}_3$, ergibt sich die Balkendifferentialgleichung zu

$$\gamma'' + \frac{hq}{EI_y} \gamma = 0. \quad (2.66)$$

Da q als Druckbelastung eingeführt worden ist, führt Gl. (2.66) entsprechend auf ein Stabilitätsproblem. Wenn man die Last hingegen als Folgelast ansieht, ergibt sich aus Gl. (2.61) die Aussage

$$EI_y \gamma'' \underbrace{-T_3 \mathbf{d} + qh \mathbf{d}}_{=0} = 0, \quad (2.67)$$

so daß das Ergebnis die homogene Balkendifferentialgleichung

$$EI_y \gamma'' = 0 \quad (2.68)$$

liefert. In diesem Fall liegt kein Stabilitätsproblem vor.

Verläßt man an dieser Stelle gedanklich das Kontinuumsmodell und begibt sich auf die Ebene eines FE-Verfahrens auf Basis eines Variationsprinzips, muß man zur Beurteilung des Stabilitätsverhaltens die Systemsteifigkeitsmatrix betrachten. Hierfür werden auch noch die Ableitungen der Knotenkräfte, d.h. die zweite Variation des Energiefunktionals benötigt. Es ist zu berücksichtigen, daß im Falle einer Folgelast auch die Ableitung der äußeren Arbeit einen Anteil an der Steifigkeitsmatrix besitzt, die sog. Laststeifigkeit. Für konservative Belastungen ist die Laststeifigkeit gleich null (kartesische Parametrisierung der Vektoren vorausgesetzt), für Folgelasten aber gerade verschieden von null. Es zeigt sich demnach, daß im diskretisierten Modell beide Arten der Lasteinleitung zumselben Verhalten führen: die Steifigkeitsmatrix zeigt durch Rangabfall einen Stabilitätsfall an. Auf der Ebene des Kontinuums ist dieser Effekt so nicht ersichtlich.

Kapitel 3

Materialgesetze

Neben den stoffunabhängigen Gleichungen der Kontinuumsmechanik ist zur vollständigen Lösung eines konkreten Randwertproblems stets ein Materialgesetz erforderlich, das die Verknüpfung von Spannungs- und Verzerrungsgrößen in geeigneter Weise beschreibt. Hierbei sind insbesondere die Prinzipien der Materialtheorie (Determinismus, Rahmeninvarianz, materielle Objektivität usw.) zu berücksichtigen, die z.B. ausführlich von TRUESDELL UND NOLL (1965), MALVERN (1969) oder BECKER UND BÜRGER (1975) dargelegt wurden. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit bei der Umsetzung der vorgestellten Schalentheorie in einem Finite-Elemente-Verfahren auf der kinematischen Modellierung liegt, wird auf die Herleitung und Begründung bzw. experimentelle Absicherung der benutzten Materialgesetze verzichtet. Ausführliche Diskussionen von hyperelastischen Materialgesetzen können z.B. bei OGDEN (1984), BARTHOLD (1993), WRIGGERS (2001), REESE (1994) und anderen Autoren nachgelesen werden. Es werden exemplarisch hyperelastische und elasto-plastische Stoffgleichungen benutzt. Thermische Effekte finden keine Berücksichtigung.

3.1 Hyperelastizität (3D)

Wesentliches Kennzeichen hyperelastischen Materialverhaltens ist die Reversibilität der Deformation. In der Hyperelastizität können Formänderungsenergiefunktionen W definiert werden, aus denen sich die 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungen unmittelbar durch Differentiation nach den GREEN-LAGRANGE Verzerrungen berechnen lassen. Exemplarisch werden hier unter Beschränkung auf isotherme Deformationen das Materialgesetz nach ST. VENANT-KIRCHHOFF und das NEO-HOOKE Stoffgesetz betrachtet. Die wesentlichen Anforderungen an hyperelastische Formänderungsenergiefunktionen W werden z.B. von REESE (1994) oder DOLL (1998) in ausführlicher Weise zusammengestellt bzw. diskutiert. An dieser Stelle soll lediglich auf die Grenzzustände eingegangen werden, die W erfüllen muß, um ein physikalisch sinnvolles Verhalten abzubilden.

- Für kleine Verzerrungen und kleine Verschiebungen soll W das HOOKEsche Gesetz abbilden.
- Im unbelasteten und unverzerrten Zustand soll die Formänderungsenergie verschwinden, d.h.

$$W(\mathbf{E} = 0) = 0, \quad (3.1)$$

und infolge der Deformation speichert der Körper Energie, d.h.

$$W(\mathbf{E} \neq 0) > 0. \quad (3.2)$$

- Es muß eine unendlich große Formänderungsenergie nötig sein, um einen Körper auf einen Punkt zusammenzuziehen oder ihn unendlich weit auseinanderzuziehen, d.h.

$$W(\mathbf{E} \rightarrow -\frac{1}{2}\mathbf{1}) \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad W(\|\mathbf{E}\| \rightarrow \infty) \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

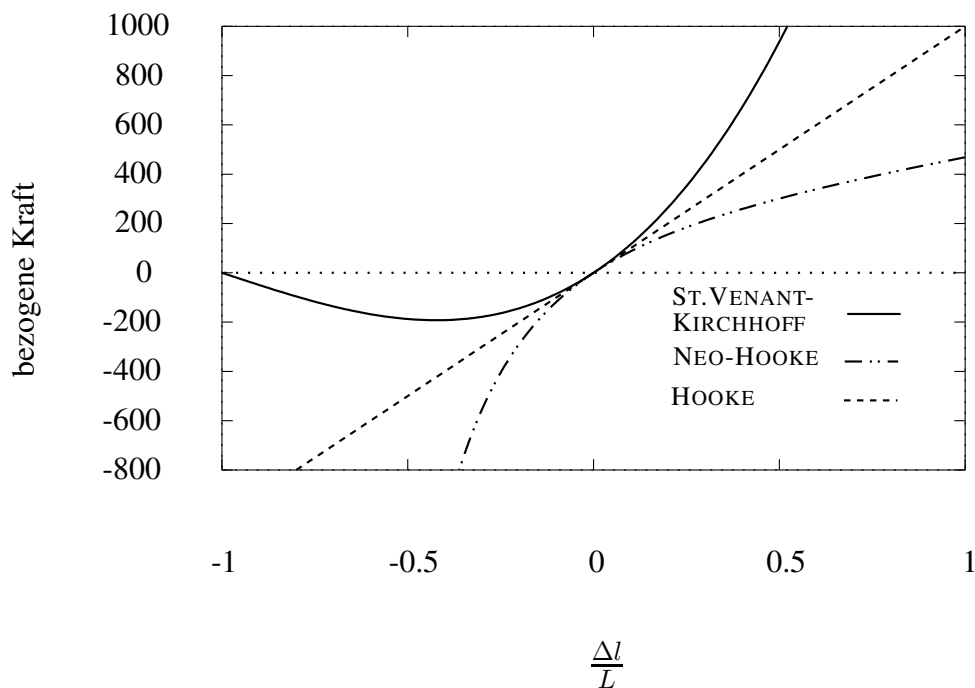


Abbildung 3.1: Einachsiger Zugversuch

In Abb. (3.1) ist die Kraft-Verformungskurve eines einachsigen Zugstabes für verschiedene hyperelastische Materialgesetze skizziert. Während die durchgezogene Kurve das ST. VENANT-KIRCHHOFF Material darstellt, stellt die strichpunktiierte Linie das

NEO-HOOKE Gesetz dar. Beide Kurven haben im unbelasteten Zustand als Tangente die gestrichelt gezeichnete HOOKESche Gerade. Man erkennt, daß das Gesetz von ST.VENANT-KIRCHHOFF nur eingeschränkt physikalisch sinnreich ist: für Kompressionen $\frac{\Delta l}{L} < -0.4226$ ergibt sich eine materielle Instabilität, da sich mit geringer werdender Kraft eine größere Kompression einstellt. Dieses Materialgesetz ist daher insbesondere im Druckbereich nur für kleine Verzerrungen sinnreich. Hingegen ist das strichpunktiert gezeichnete NEO-HOOKE Gesetz auch für große Verzerrungen sinnvoll.

3.1.1 ST. VENANT-KIRCHHOFF Material

Das Stoffgesetz nach ST. VENANT-KIRCHHOFF ist die einfachste Form eines hyperelastischen Stoffgesetzes. Hierbei wird das HOOKESche Gesetz der linearen Theorie ins geometrisch Nichtlineare verallgemeinert, indem die lineare Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungsmaßen zwar beibehalten wird, die Spannungen und Verzerrungen selbst aber durch die geometrisch nichtlinearen Ausdrücke ersetzt werden. Man definiert als Formänderungsenergiefunktion

$$W = \frac{\Lambda}{2} (\text{sp}\mathbf{E})^2 + \mu \text{sp}\mathbf{E}^2 . \quad (3.4)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{E} den rechten GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensor. Die Konstanten Λ und μ sind die LAME Konstanten, die sich vermöge der Beziehungen $\Lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ bzw. $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ aus Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl ν bzw. Gleitmodul G berechnen lassen. Die Spannungen werden dann gemäß

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \quad (3.5)$$

ermittelt, woraus sich mit dem Einheitstensor $\mathbf{1}$ ergibt

$$\mathbf{S} = \Lambda (\text{sp}\mathbf{E}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{E} . \quad (3.6)$$

Der zugehörige Tangentenmodul ergibt sich durch nochmalige Differentiation nach \mathbf{S} , so daß man als Materialtetraeder erhält

$$\mathbb{C} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} = \Lambda \mathbf{1} \circ \mathbf{1} + 2\mu \mathbb{I}, \quad (3.7)$$

wobei \mathbb{I} den Einheitstensor 4. Stufe darstellt. Wegen der in Abb. (3.1) ersichtlichen und bereits diskutierten Schwäche des ST. VENANT-KIRCHHOFF Gesetzes findet dieses Materialgesetz nur im Bereich kleiner Verzerrungen Anwendung.

3.1.2 NEO-HOOKE Material

Die Schwäche des Gesetzes von ST. VENANT-KIRCHHOFF wird durch einen logarithmischen Term in der Formänderungsfunktion behoben. Damit wird garantiert, daß für $\mathbf{E} \rightarrow -\frac{1}{2}\mathbf{1}$ auch $\|\mathbf{S}\| \rightarrow \infty$ gilt. Ein denkbarer Ansatz für W im Falle kompressiblen Materialverhaltens lautet in Anlehnung an SIMO UND PISTER (1984)

$$W(\mathbf{C}) = \frac{\Lambda}{8}(\ln(\det \mathbf{C}))^2 - \frac{\mu}{2} \ln(\det \mathbf{C}) + \frac{\mu}{2}(\text{sp} \mathbf{C} - 3). \quad (3.8)$$

Hierbei ist mit \mathbf{C} der rechte CAUCHY Verzerrungstensor bezeichnet, der aus $\mathbf{C} = 2\mathbf{E} + \mathbf{1}$ zu berechnen ist. Λ und μ bezeichnen weiterhin die LAME Konstanten und \mathbf{S} den 2. PIOLA-KIRCHHOFF Tensor. Die Spannungen folgen durch Differentiation zu

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = \left(\frac{\Lambda}{2} \ln(\det \mathbf{C}) - \mu \right) \mathbf{C}^{-1} + \mu \mathbf{1}. \quad (3.9)$$

Für den Tangentenmodul ergibt sich

$$\mathbb{C} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \Lambda \mathbf{C}^{-1} \circ \mathbf{C}^{-1} + (\Lambda \ln(\det \mathbf{C}) - 2\mu) \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}. \quad (3.10)$$

3.2 Hyperelastizität (2D)

Im Hinblick auf die Umsetzung der präsentierten Theorie in einem Finite-Elemente-Verfahren für dünne Schalen sollen die in Abschnitt 3.1 beschriebenen Materialgesetze der Zwangsbedingung $\sigma_{33} = 0$ des ebenen Spannungszustandes (ESZ) angepaßt werden. Grundsätzlich besteht die Möglichkeit, die jeweilige Dehnung D_{33} bzw. C_{33} , die diesen Zustand erzeugt, sowie die zugehörigen Steifigkeiten numerisch zu bestimmen. Ein entsprechender Algorithmus ist im Anhang C skizziert.

3.2.1 ST. VENANT-KIRCHHOFF Material

In diesem Fall ist eine analytische Lösung des Problems möglich. Aus Gl. (3.6) erhält man zunächst

$$\sigma_{33} = 0 = \Lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + 2\mu\epsilon_{33}, \quad (3.11)$$

woraus sich die gesuchte Dehnung in Querrichtung ergibt zu

$$\epsilon_{33} = -\frac{\Lambda}{\Lambda + 2\mu}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}). \quad (3.12)$$

Mit dem zweidimensionalen GREEN-LAGRANGE Tensor \mathbf{E}_2 und $\text{sp} \mathbf{E}_2 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22}$ sowie der Abkürzung

$$\lambda = \Lambda \left(\frac{2\mu}{\Lambda + 2\mu} \right) \quad (3.13)$$

ergibt sich als zweidimensionaler 2. PIOLA-KIRCHHOFF Tensor

$$\mathbf{S}_2 = \lambda (\text{sp}\mathbf{E}_2) \boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{E}_2. \quad (3.14)$$

Der Tangentenmodul¹ folgt zu

$$\mathbb{C} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}_2 \partial \mathbf{E}_2} = \lambda \boldsymbol{\delta} \circ \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbb{I}. \quad (3.15)$$

3.2.2 NEO-HOOKE Material

Derselbe Lösungsweg wie beim ST. VENANT-KIRCHHOFF Material führt in diesem Fall zu einer nichtlinearen Gleichung, die nicht geschlossen gelöst werden kann. Deshalb wird hier eine andere Vorgehensweise gewählt. \mathbf{C}_2 bezeichnet den planaren rechten CAUCHY Tensor. Aus Gl. (3.8) wird nur der ebene Anteil betrachtet. Mit den Parametern $\tilde{\Lambda}$ und $\tilde{\mu}$ erhält man zunächst als Formänderungsenergiefunktion analog zu Gl. (3.8)

$$W(\mathbf{C}_2) = \frac{\tilde{\Lambda}}{8} (\ln(\det \mathbf{C}_2))^2 - \frac{\tilde{\mu}}{2} \ln(\det \mathbf{C}_2) + \frac{\tilde{\mu}}{2} (\text{sp} \mathbf{C}_2 - 2). \quad (3.16)$$

Ziel ist es nun, die Materialparameter $\tilde{\Lambda}$ und $\tilde{\mu}$ derart zu bestimmen, daß bei Linearisierung der Übergang auf das HOOKEsche Gesetz für den ESZ gewährleistet ist. Als ebene Spannungskomponenten erhält man aus Gl. (3.16) durch Differentiation nach \mathbf{C}_2

$$\sigma_{11} = \frac{\tilde{\Lambda} \ln(\det \mathbf{C}_2)}{2 \det \mathbf{C}_2} C_{22} + \tilde{\mu} \left(1 - \frac{C_{22}}{\det \mathbf{C}_2} \right), \quad (3.17)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\tilde{\Lambda} \ln(\det \mathbf{C}_2)}{2 \det \mathbf{C}_2} C_{11} + \tilde{\mu} \left(1 - \frac{C_{11}}{\det \mathbf{C}_2} \right), \quad (3.18)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\tilde{\Lambda} \ln(\det \mathbf{C}_2)}{2 \det \mathbf{C}_2} C_{12} + \tilde{\mu} \frac{C_{12}}{\det \mathbf{C}_2}. \quad (3.19)$$

Die Linearisierung von Gl. (3.17) bis Gl. (3.19) liefert unter Berücksichtigung der nach dem ersten Glied abgebrochenen Reihenentwicklung $\ln(1+x) \approx x$ [siehe BRONSTEIN UND SEMENDJAJEW (1989)] die Ausdrücke

$$\sigma_{11} = \frac{\tilde{\Lambda}}{2} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + 2\tilde{\mu} \epsilon_{11}, \quad (3.20)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\tilde{\Lambda}}{2} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + 2\tilde{\mu} \epsilon_{22}, \quad (3.21)$$

$$\sigma_{12} = 2\tilde{\mu} \epsilon_{12}. \quad (3.22)$$

¹ \mathbb{C} und \mathbb{I} haben in diesem Fall die planare Darstellung $(\cdot)_{\alpha\beta\gamma\delta}$ im Gegensatz zu den Gln. (3.7) und (3.10).

Durch einen Koeffizientenvergleich mit dem HOOKEschen Gesetz des ebenen Spannungszustandes identifiziert man

$$\tilde{\Lambda} = \frac{E\nu}{1-\nu^2} =: \lambda \quad \text{und} \quad \tilde{\mu} = G =: \mu.$$

Damit ergeben sich für den Fall des NEO-HOOKE Gesetzes die folgenden Gleichungen:

$$W(\mathbf{C}_2) = \frac{\lambda}{8}(\ln(\det \mathbf{C}_2))^2 - \frac{\mu}{2} \ln(\det \mathbf{C}_2) + \frac{\mu}{2}(\text{sp} \mathbf{C}_2 - 2) \quad (3.23)$$

als Formänderungsenergiefunktion, die Spannungen als

$$\mathbf{S}_2 = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}_2} = \left(\frac{\lambda}{2} \ln(\det \mathbf{C}_2) - \mu \right) \mathbf{C}_2^{-1} + \mu \boldsymbol{\delta} \quad (3.24)$$

und der Tangentenmodul² als

$$\mathbb{C} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}_2 \partial \mathbf{C}_2} = \lambda \mathbf{C}_2^{-1} \circ \mathbf{C}_2^{-1} + (\lambda \ln(\det \mathbf{C}_2) - 2\mu) \frac{\partial \mathbf{C}_2^{-1}}{\partial \mathbf{C}_2}. \quad (3.25)$$

3.3 Elasto-Plastizität

Inelastisches Materialverhalten soll nur exemplarisch anhand eines ausgewählten elasto-plastischen Materialgesetzes untersucht werden. Phänomenologisch sind die wesentlichen Kennzeichen des plastischen Werkstoffverhaltens die Irreversibilität und die Zeitunabhängigkeit des Deformationsprozesses. Im Gegensatz dazu stehen solche Deformationsvorgänge, bei denen noch explizite Zeitabhängigkeit wie z.B. bei viskoelastischem oder auch viskoplastischem Stoffverhalten eine Rolle spielt (Kriechprozesse, Low-Cycle Fatigue usw.). Da die Plastizität selbst ein komplexes und von vielen Wissenschaftlern behandeltes Gebiet in der Kontinuumsmechanik darstellt, kann und soll hier nur eine spezielle Variante der VON MISES Plastizität diskutiert werden, die im Schrifttum unter dem Namen Finite J_2 -Plastizität zu finden ist. Eine Fülle von Forschungsergebnissen hat mittlerweile in aktuelle Lehrbücher Eingang gefunden. So seien an dieser Stelle stellvertretend die Bücher von MAUGIN (1992), LEMAITRE UND CHABOCHE (1990), JIRASEK UND BAZANT (2001), LUBLINER (1990) oder SIMO UND HUGHES (1998) genannt.

3.4 Multiplikative Elasto-Plastizität (3D)

Kerngedanke der Finiten J_2 -Plastizität ist die von KRÖNER (1960), LEE UND LIU (1967) und LEE (1969) vorgeschlagene multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F} in einen elastischen Anteil \mathbf{F}^e und einen plastischen Anteil $\hat{\mathbf{F}}$. Zu diesem

²zur Darstellung von \mathbb{C} bzw. \mathbb{I} siehe Abschnitt 3.2.1

Zweck wird eine inelastische Zwischenkonfiguration $\hat{\kappa}$ eingeführt. In Abb. (3.2) sind die verwendeten Konfigurationen skizziert.

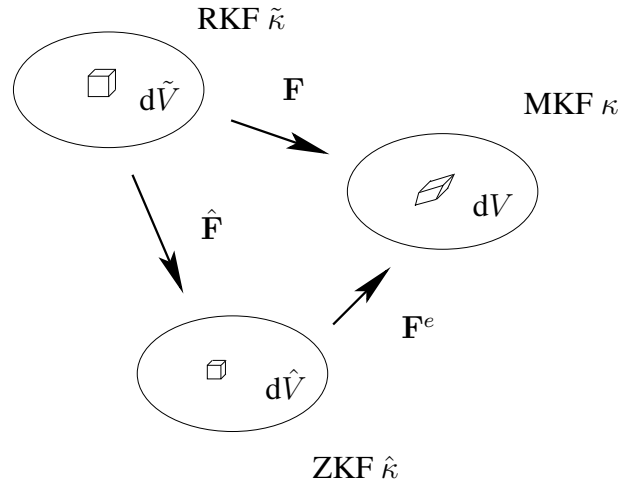


Abbildung 3.2: Konfigurationen

Die Zwischenkonfiguration $\hat{\kappa}$ ist spannungsfrei, d.h. frei von elastischen Verzerrungen und im allgemeinen inkompatibel. Sie ist bis auf eine reine Starrkörperbewegung gegenüber der Referenzkonfiguration κ bestimmt. Mittels dieser gedanklichen Zerlegung der Deformation läßt sich der Deformationsgradient \mathbf{F} darstellen als

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \hat{\mathbf{F}}. \quad (3.26)$$

Daraus resultieren die Definitionen folgender CAUCHY Verzerrungstensoren:

$$\mathbf{C}^e = (\mathbf{F}^e)^T \cdot \mathbf{F}^e \quad (3.27)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \hat{\mathbf{F}} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot (\mathbf{F}^e)^T \cdot \mathbf{F}^e \cdot \hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{C}^e \cdot \hat{\mathbf{F}} \quad (3.29)$$

Hierbei bezeichnen \mathbf{C} die gesamte, \mathbf{C}^e die elastische und $\hat{\mathbf{C}}$ die plastische CAUCHY Verzerrung. Weiterhin läßt sich der linke plastische CAUCHY Tensor $\hat{\mathbf{B}}$ definieren, der folgende Eigenschaft besitzt - siehe BESDO (1980):

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{1} \text{ bzw. } \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{C}}^{-1}. \quad (3.30)$$

Die Formulierung der Fließbedingung nach VON MISES erfolgt üblicherweise über die zweite Invariante S'_2 des Spannungsdeviators \mathbf{S}' . Da das Gesamtkonzept der vorgestellten numerischen Umsetzung jedoch dehnungsbasiert ist, soll hier auch die Plastizität im Dehnungsraum formuliert werden. Diese Arbeit basiert daher auf der bereits von VERHOEVEN (1992) vorgeschlagenen Elasto-Plastizität, die sich im wesentlichen auf BESDO (1980,1981) und TIETZE (1986) stützt.

Ein wesentlicher Bestandteil der Formulierung des elastischen Teilstoffgesetzes ist die Überlegung, daß wegen der Gleichheit der Invarianten von \mathbf{C}^e und $\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C}$ ³ ein elastisches Teilpotential als spezifische Formänderungsenergiefunktion W definiert werden kann:

$$W = \frac{G}{4\rho} \left\{ \left(\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{1} \right) \cdot \cdot \left(\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{1} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[\left(\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{1} \right) \cdot \cdot \mathbf{1} \right]^2 \right\}. \quad (3.31)$$

Die Materialparameter G und ν bedeuten hierbei Gleitmodul und Querkontraktionszahl. ρ bezeichnet die Materialichte in der Referenz. Aus Gl. (3.31) gewinnt man die elastischen 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungen durch Differentiation zu

$$\mathbf{S} = 2\rho \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = G \left[\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{B}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\hat{\mathbf{B}} \cdot \cdot \mathbf{C} - 3 \right) \hat{\mathbf{B}} \right]. \quad (3.32)$$

Man erkennt, daß W derart konstruiert ist, daß Gl. (3.32) im elastischen Zustand ($\hat{\mathbf{B}}=\mathbf{1}$) in das Gesetz von ST. VENANT-KIRCHHOFF übergeht. Die zu Gl. (3.32) gehörige konsistente Materialtangente ist bei VERHOEVEN (1992) notiert.

Zur korrekten Beschreibung des elasto-plastischen Materialverhaltens gehört nun noch eine in Dehnungsgrößen formulierte, der klassischen Fließbedingung nach VON MISES gleichwertige Konsistenzbedingung. Diese Fließ- oder Konsistenzfunktion lautet nach VERHOEVEN (1992)

$$g = \frac{1}{4} \left[\left(\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C} \right) \cdot \cdot \left(\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C} \right) - \frac{1}{3} \left(\hat{\mathbf{B}} \cdot \cdot \mathbf{C} \right)^2 \right] - y^2. \quad (3.33)$$

y ist dabei die Fließdehnung. Die zugehörige Konsistenzbedingung ist dann gegeben durch:

$$g < 0 \quad \text{elastischer Zustand,} \quad (3.34)$$

$$g = 0 \quad \text{plastischer Zustand,} \quad (3.35)$$

$$g > 0 \quad \text{ist nicht möglich.} \quad (3.36)$$

Damit wird deutlich, welche zusätzliche Aufgabe bei elasto-plastischem Materialverhalten noch besteht: Es gilt, diejenigen inversen plastischen Dehnungen $\hat{\mathbf{B}}$ zu bestimmen, die im Falle $g > 0$ gerade dafür sorgen, daß Gl. (3.34) bzw. Gl. (3.35) wieder erfüllt wird. Zur Phänomenologie der Plastizität gehört außerdem noch, daß insbesondere die Fließdehnung y nicht über den gesamten Deformationsprozeß konstant bleiben muß. Die Anfangsfließdehnung $y = y_0$ des nicht verfestigenden Materials ist hierbei aus der Fließspannung σ_y gemäß Gl. (D.14) zu berechnen als

$$y_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_y}{2G}. \quad (3.37)$$

³BESDO und TIETZE zeigen, daß gilt: $\mathbf{C}^e \cdot \cdot \mathbf{1} = (\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C}) \cdot \cdot \mathbf{1}$, $\mathbf{C}^e \cdot \cdot \mathbf{C}^e = (\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C}) \cdot \cdot (\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C})$ und $(\mathbf{C}^e \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{C}^e) \cdot \cdot \mathbf{1} = (\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C}) \cdot \cdot \mathbf{1}$. Der im allgemeinen unsymmetrische Tensor $\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C}$ besitzt allerdings darüberhinaus noch weitere irreduzible Invarianten.

Der Spezialfall $y = y_0 = \text{konstant}$ wird als ideal-plastisch bezeichnet, wohingegen $y \neq \text{konstant}$ allgemein verfestigende Plastizität genannt wird. Üblicherweise wird bei verfestigender Plastizität unterschieden zwischen isotroper und kinematischer Verfestigung. Während bei isotroper Verfestigung die Lage des Mittelpunktes der Fließfläche im Hauptspannungsraum konstant bleibt und der MISESSche Fließzylinder sich aufweitet [siehe BROCKS UND OLSCHESKI (1995)], verändert bei kinematischer Verfestigung der Mittelpunkt der Fließfläche seine Lage, d.h. der Fließzylinder erfährt im Hauptspannungsraum eine Translation. Im Rahmen der hier umgesetzten Plastizität wird lediglich ideal-plastisches bzw. isotrop verfestigendes Material betrachtet.

3.4.1 Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Das bereits von VERHOEVEN (1992) vorgeschlagene Verfahren wird auch in diesem Fall benutzt. Die numerische Umsetzung kann dort detailliert nachgelesen werden. Deshalb wird an dieser Stelle lediglich auf die dem Verfahren zugrunde liegenden Überlegungen bzw. Gleichungen eingegangen. Im Verlaufe einer Laststeigerung während einer elasto-plastischen Analyse wird in einem beliebigen Lastschritt erstmalig zu notieren sein, daß die Konsistenzbedingung verletzt ist, d.h. es gilt nach Gl. (3.36) die Aussage $g > 0$. Dieser (unzulässige) Zustand kann als elastischer Prädiktor verstanden werden. Aus dem letzten (alten) Lastschritt sind die Größen $\hat{\mathbf{B}}^A, \mathbf{C}^A, y_A$ bekannt. Nun müssen die Größen $\hat{\mathbf{B}}^N, y_N$ so bestimmt werden, daß die Konsistenzbedingung $g(\hat{\mathbf{B}}^N, y_N, \mathbf{C}) = 0$ wieder erfüllt wird.

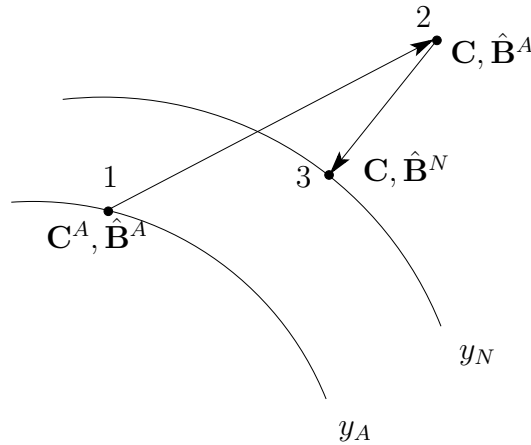


Abbildung 3.3: Alte und neue Fließfläche

Als Korrektorschritt läßt sich nun folgendes Minimalproblem formulieren:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \left\{ \left(\hat{\mathbf{B}}^N - \hat{\mathbf{B}}^A \right) \cdot \mathbf{C} \cdot \left(\hat{\mathbf{B}}^N - \hat{\mathbf{B}}^A \right) \cdot \mathbf{C} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \left[\left(\hat{\mathbf{B}}^N - \hat{\mathbf{B}}^A \right) \cdot \cdot \mathbf{C} \right]^2 \right\} \Rightarrow \text{Minimum} . \quad (3.38)$$

Hierbei kann die Größe \mathcal{A} anschaulich gedeutet werden als Abstand des vorgeschätzten Zustandes $(\mathbf{C}, \hat{\mathbf{B}}^A)$ zur durch y_N definierten Fließfläche. Allerdings muß auch die Konsistenzbedingung in die Lösung des Minimalproblems mit einbezogen werden, so daß man mit dem LAGRANGE Parameter ω als Sattelpunktproblem formulieren kann:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{B}}^N, \omega) &= \frac{1}{4} \left\{ (\hat{\mathbf{B}}^N - \hat{\mathbf{B}}^A) \cdot \mathbf{C} \cdot (\hat{\mathbf{B}}^N - \hat{\mathbf{B}}^A) \cdot \mathbf{C} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[(\hat{\mathbf{B}}^N - \hat{\mathbf{B}}^A) \cdot \mathbf{C} \right]^2 \right\} \\ &\quad + \omega \left\{ \frac{1}{4} \left[(\hat{\mathbf{B}}^N \cdot \mathbf{C}) \cdot (\hat{\mathbf{B}}^N \cdot \mathbf{C}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{3} (\hat{\mathbf{B}}^N \cdot \mathbf{C})^2 \right] - y_N^2 \right\} \Rightarrow \text{stationär.} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Im allgemeinen ist das Gleichungssystem (3.39) nicht geschlossen lösbar, vielmehr muß auf ein numerisches Lösungsverfahren zurückgegriffen werden, das die Unbekannten $\hat{\mathbf{B}}^N, \omega$ und y_N iterativ ermittelt. Verwendet man hierzu das NEWTON Verfahren, werden die Ableitungen nach $\hat{\mathbf{B}}^N$ und ω benötigt. Diese ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\mathbf{B}}^N} &= \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{C} \cdot (\hat{\mathbf{B}}^N - \hat{\mathbf{B}}^A) \cdot \mathbf{C} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[(\hat{\mathbf{B}}^N - \hat{\mathbf{B}}^A) \cdot \mathbf{C} \right] \mathbf{C} \right\} \\ &\quad + \omega \left\{ \frac{1}{2} \left[\mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{B}}^N \cdot \mathbf{C} - \frac{1}{3} (\hat{\mathbf{B}}^N \cdot \mathbf{C}) \mathbf{C} \right] - \frac{\partial y_N^2}{\partial \hat{\mathbf{B}}^N} \right\} \text{ bzw.} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = g = \frac{1}{4} \left[(\hat{\mathbf{B}}^N \cdot \mathbf{C}) \cdot (\hat{\mathbf{B}}^N \cdot \mathbf{C}) - \frac{1}{3} (\hat{\mathbf{B}}^N \cdot \mathbf{C})^2 \right] - y_N^2. \quad (3.41)$$

Allerdings kann für den Spezialfall der nicht verfestigenden Elasto-Plastizität noch eine geschlossene Lösung von Gl. (3.39) erzielt werden. In diesem Fall gilt $y_N = y_A = y_0$, so daß sich die Bestimmung der Unbekannten auf die neuen inversen plastischen Dehnungen $\hat{\mathbf{B}}_N$ und den Parameter ω reduziert. Hierbei ist die Bedingung $(\hat{\mathbf{B}}^N - \hat{\mathbf{B}}^A) \cdot \mathbf{C} = 0$ benutzt worden. Dieses bedeutet, daß die plastische Deformation näherungsweise volumentreu erfolgt. Man erhält dann

$$\hat{\mathbf{B}}^N = \frac{1}{1+\omega} \left(\hat{\mathbf{B}}^A + \frac{\omega}{3} (\hat{\mathbf{B}}^A \cdot \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \right), \quad (3.42)$$

wobei gilt

$$\omega = \frac{1}{2y_0} \sqrt{\hat{\mathbf{B}}^A \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{B}}^A \cdot \mathbf{C} - \frac{1}{3} (\hat{\mathbf{B}}^A \cdot \mathbf{C})^2} - 1. \quad (3.43)$$

Somit stehen mit Gl. (3.32), Gl. (3.33), Gl. (3.42) und Gl. (3.43) die Gleichungen zur Lösung des Zustandes im neuen Lastschritt bereit.

3.4.2 Berücksichtigung der Verfestigung

Es soll ausschließlich isotrope Verfestigung des Materials in Abhängigkeit von der akkumulierten plastischen Dehnung $\hat{\varphi}$ berücksichtigt werden. Analog zu VERHOEVEN (1992) wird angenommen:

$$Y = Y_0 \sqrt[8]{1 + \frac{2.04 \hat{\varphi} E}{Y_0}}. \quad (3.44)$$

Hierbei bedeutet Y_0 die Fließspannung zu Beginn des plastischen Deformationsprozesses, Y die Fließspannung des verfestigten Materials und E den Elastizitätsmodul. Die akkumulierte plastische Dehnung $\hat{\varphi}$ ist nach TIETZE (1986)

$$\hat{\varphi} = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{1}{6} \hat{\mathbf{C}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{B}}} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{B}}}} dt \quad (3.45)$$

und wird angenähert durch

$$\hat{\varphi}^N = \hat{\varphi}^A + \sqrt{\frac{1}{6} \hat{\mathbf{C}} \cdot (\hat{\mathbf{B}}^N - \hat{\mathbf{B}}^A) \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot (\hat{\mathbf{B}}^N - \hat{\mathbf{B}}^A)}. \quad (3.46)$$

Da die Lösung des Sattelpunktproblems nach Gl. (3.39) in diesem Fall auf nichtlineare Gleichungen führt, benötigt man entsprechend sinnreiche Vorschätzungen für $(\hat{\mathbf{B}}, \omega)$ bei der Anwendung des NEWTON Verfahrens. Hierfür bieten sich die Werte nach Gl. (3.42) und Gl. (3.43) des zugehörigen Problems ohne Verfestigung an. Die entsprechenden Ableitungen zur Anwendung des NEWTON Verfahrens finden sich bei VERHOEVEN (1992).

3.5 Elasto-Plastizität (2D)

Im folgenden soll eine Spezialisierung von Gl. (3.31) bis Gl. (3.33) für den Fall des ESZ formuliert werden. Grundsätzlich ist eine numerische Lösung gemäß Anhang C möglich, aber eine zweidimensionale Lösung ist im Hinblick auf die numerische Umsetzung erstrebenswert. Zunächst werden die beiden Restriktionen $\sigma_{33} = 0$ und $\epsilon_{\alpha 3}$ eingeführt. Daraus resultieren die Bedingungen $\hat{B}_{\alpha 3} = 0$ und $\sigma_{\alpha 3} = 0$. Das wiederum bedeutet, die Produkte $\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C}$ bzw. $\hat{\mathbf{B}} \cdot \cdot \mathbf{C}$ lassen sich in rein planare und einen transversalen Anteil $B_{33}C_{33}$ aufspalten. Es gibt keinen Term $B_{33}C_{\alpha\beta}$ oder $B_{\alpha\beta}C_{33}$. Aus Gl. (3.32) folgt aus der Restriktion $\sigma_{33} = 0$ die Aussage

$$B_{33}C_{33} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} - \frac{\nu}{1 - \nu} B_{\alpha\beta}C_{\beta\alpha}. \quad (3.47)$$

Gl. (3.47) gilt unabhängig vom Verfestigungsverhalten. Da in Gl. (3.31) bis Gl. (3.33) nur Produkte der Tensoren $\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C}$ oder $\hat{\mathbf{B}} \cdot \cdot \mathbf{C}$ auftreten, lassen sich die Anteile in X_3 -Richtung eliminieren, und es ergeben sich rein planare Anteile ohne irgendeine Vernachlässigung (wie im elastischen Fall nach Abschnitt 3.2.1). D.h., der ebene Spezialfall stellt keine neue Theorie dar. Aus praktischen Gründen werden neue Abkürzungen eingeführt.

$$G_{ij}^N = \hat{B}_{ik}^N C_{kj} - \delta_{ij}, \quad (3.48)$$

$$G_{ij}^A = \hat{B}_{ik}^A C_{kj} - \delta_{ij}. \quad (3.49)$$

Der Tensor \mathbf{G}^N bzw. \mathbf{G}^A ist i.a. nicht symmetrisch. Für den ESZ gilt $G_{\alpha 3} = 0$. Damit folgt für Gl. (3.47), die nur für den gesuchten Zustand $\hat{\mathbf{B}}^N$ korrekt ist, nicht aber für $\hat{\mathbf{B}}^A$:

$$G_{33}^N = -\frac{\nu}{1-\nu} G_{\gamma\gamma}^N. \quad (3.50)$$

Somit ergibt sich die Spur des dreidimensionalen Ausdrucks \mathbf{G}^N zu

$$G_{ii}^N = G_{\alpha\alpha}^N + G_{33}^N = \frac{1-2\nu}{1-\nu} G_{\alpha\alpha}^N. \quad (3.51)$$

Die Konsistenzbedingung Gl. (3.33) läßt sich mit der Abkürzung nach Gl. (3.48) schreiben als

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{4} \left[(\mathbf{G}^N + \mathbf{1}) \cdot \cdot (\mathbf{G}^N + \mathbf{1}) - \frac{1}{3} (\text{sp} \mathbf{G}^N + 3)^2 \right] - y_N^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[G_{ij}^N G_{ji}^N - \frac{1}{3} G_{ii}^N G_{jj}^N \right] - y_N^2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Unter Einbeziehung von Gl. (3.50) und Gl. (3.51) ergibt sich aus Gl. (3.52) die dem ESZ angepaßte Fließbedingung zu

$$g = \frac{1}{4} \left[G_{\alpha\beta}^N G_{\beta\alpha}^N - \frac{1-4\nu+\nu^2}{3(1-\nu^2)^2} G_{\alpha\alpha}^N G_{\beta\beta}^N \right] - y_N^2 = 0. \quad (3.53)$$

Es ist zweckmäßig, den Tensor $G_{\alpha\beta}$ in einen Kreistensor und einen Deviatoranteil zu zerlegen. Gemäß

$$G_{\alpha\beta} = (G_{\alpha\beta})' + \frac{1}{2} G_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \quad (3.54)$$

folgt dann für die Fließbedingung die Form

$$g = \frac{1}{4} \left[(G_{\alpha\beta}^N)' (G_{\beta\alpha}^N)' + \frac{1}{6} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right)^2 G_{\alpha\alpha}^N G_{\beta\beta}^N \right] - y_N^2 = 0. \quad (3.55)$$

Damit wird die Gl. (3.40) des Sattelpunktproblems ausgewertet. Die Ableitungen spalten sich infolge $G_{\alpha 3} = 0$ auf in einen planaren Anteil und einen Anteil für die Komponente \hat{B}_{33}^N :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{B}_{\alpha\beta}^N} &= \frac{1}{2} \left\{ C_{\alpha\gamma} (G_{\gamma\beta}^N - G_{\gamma\beta}^A) + \frac{\nu}{1-2\nu} (G_{ii}^N - G_{ii}^A) C_{\alpha\beta} \right\} \\ &+ \omega \left\{ \frac{1}{2} \left[C_{\alpha\gamma} G_{\gamma\beta}^N - \frac{1}{3} G_{ii}^N C_{\alpha\beta} \right] - \frac{\partial y_N^2}{\partial \hat{B}_{\alpha\beta}^N} \right\}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{B}_{33}^N} &= \frac{1}{2} \left\{ C_{33} (G_{33}^N - G_{33}^A) + \frac{\nu}{1-2\nu} (G_{ii}^N - G_{ii}^A) C_{33} \right\} \\ &+ \omega \left\{ \frac{1}{2} \left[C_{33} G_{33}^N - \frac{1}{3} G_{ii}^N C_{33} \right] - \frac{\partial y_N^2}{\partial \hat{B}_{33}^N} \right\}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Aus Gl. (3.57) läßt sich mittels Gl. (3.50) und Gl. (3.51) zunächst folgende Aussage gewinnen:

$$G_{33}^A = -\frac{\nu}{1-\nu} G_{\alpha\alpha}^A - \omega \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{3(1-\nu)^2} G_{\alpha\alpha}^N - 2\omega \frac{1-2\nu}{(1-\nu)C_{33}} \frac{\partial y_N^2}{\partial \hat{B}_{33}^N}. \quad (3.58)$$

Damit läßt sich die dreidimensionale Spur G_{ii}^A ausdrücken durch die planaren Terme $G_{\alpha\alpha}^A, G_{\alpha\alpha}^N$.

$$G_{ii}^A = G_{\alpha\alpha}^A + G_{33}^A = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left[G_{\alpha\alpha}^A - \frac{\omega}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} G_{\alpha\alpha}^N - 2\omega \frac{\partial y_N^2}{C_{33} \partial \hat{B}_{33}^N} \right]. \quad (3.59)$$

Gemäß Gl. (3.50) war

$$G_{33}^N = -\frac{\nu}{1-\nu} G_{\gamma\gamma}^N.$$

Vergleicht man Gl. (3.59) mit Gl. (3.50), so fällt auf, daß insbesondere $\hat{\mathbf{B}}^A \cdot \mathbf{C}$ nicht die Bedingung des ESZ erfüllt. Gl. (3.56) läßt sich nun planar schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{B}_{\alpha\beta}^N} &= \frac{1}{2} \left\{ C_{\alpha\gamma} (G_{\gamma\beta}^N - G_{\gamma\beta}^A)' + \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} (G_{\gamma\gamma}^N - G_{\gamma\gamma}^A) C_{\alpha\beta} \right\} \\ &+ \frac{\omega}{2} \left[C_{\alpha\gamma} (G_{\gamma\beta}^N)' + \frac{1}{6} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right)^2 G_{\gamma\gamma}^N C_{\alpha\beta} \right] \\ &- \omega \left[\frac{\partial y_N^2}{\partial \hat{B}_{\alpha\beta}^N} - \frac{C_{\alpha\beta}}{C_{33}} \frac{\partial y_N^2}{\partial \hat{B}_{33}^N} \right]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Liegt keine Verfestigung vor, so verschwinden die Ableitungen von y , und die Glg. (3.60) und (3.55) stellen vier Gleichungen zur Bestimmung der neuen inversen

plastischen Dehnungen $\hat{B}_{\alpha\beta}$ und des LAGRANGE Parameters ω dar. Somit ist das zu Gl. (3.39) analoge ebene Sattelpunktproblem berechenbar. Es lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{B}_{\alpha\beta}^N, \omega) &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\hat{G}_{\alpha\beta}^N - \hat{G}_{\alpha\beta}^A \right) \left(G_{\beta\alpha}^N - G_{\beta\alpha}^A \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{1-\nu} \left[\left(G_{\alpha\alpha}^N - G_{\alpha\alpha}^A \right) \right]^2 \right\} \\ &\quad + \omega \left\{ \frac{1}{4} \left[G_{\alpha\beta}^N G_{\beta\alpha}^N - \frac{1-4\nu+\nu^2}{3(1-\nu)^2} G_{\alpha\alpha}^N G_{\beta\beta}^N \right] - y_N^2 \right\} \Rightarrow \text{stationär} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Die Ableitung bzgl. des LAGRANGE Parameters liefert wieder die Konsistenzbedingung nach Gl. (3.55). Allerdings wird hinsichtlich verfestigenden Materials angenommen, daß die Fließdehnung y nicht von \hat{B}_{33} abhängt, sondern lediglich von $\hat{B}_{\alpha\beta}$. Das bedeutet, man setzt in Gl. (3.46) $\mathbf{C} \approx \mathbf{1}$ und nähert $\text{sp}(\hat{\mathbf{B}}^N) = \text{sp}(\hat{\mathbf{B}}^A)$. Somit wird die Forderung nach Volumenkonstanz der plastischen Deformation als $\hat{B}_{33}^N - \hat{B}_{33}^A = -\hat{B}_{\alpha\alpha}^N + \hat{B}_{\alpha\alpha}^A$ angenähert.

3.5.1 Berücksichtigung der Verfestigung

Im ebenen Fall ist es ebenfalls möglich, Lösungen für den nicht verfestigenden Fall $y = y_0 = \text{konstant}$ anzugeben und somit sinnreiche Vorschätzungen für die Größen zu erhalten, die bei Verfestigung durch den Radial-Return-Algorithmus iterativ berechnet werden müssen. Es werden Grenzfälle betrachtet.

$G_{\alpha\alpha}^A = 0$ In diesem Falle ist \mathbf{G}^A spurfrei. Eine Lösung ist der Zustand

$$G_{\alpha\alpha}^N = 0 \quad (3.62)$$

$$(G_{\alpha\beta}^N)' = \frac{1}{1+\omega} (G_{\alpha\beta}^A)' \quad (3.63)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{(G_{\alpha\beta}^A)'(G_{\beta\alpha}^A)'}}{2y_0} - 1 =: \omega_T \quad (3.64)$$

$(G_{\alpha\beta}^A)' = 0$ In diesem Falle ist \mathbf{G}^A ein Kreistensor (isotrop im 2D). Eine weitere Lösung ist dann der Zustand

$$(G_{\alpha\beta}^N)' = 0 \quad (3.65)$$

$$(G_{\alpha\alpha}^N)' = \frac{1}{1 + \frac{\omega}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu}} (G_{\alpha\alpha}^A)' \quad (3.66)$$

$$\omega = \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\sqrt{G_{\alpha\alpha}^A G_{\beta\beta}^A}}{\sqrt{24}y_0} - 1 \right) \frac{3(1-\nu)}{1+\nu} =: \omega_S \quad (3.67)$$

Der allg. Fall läßt sich aus diesen Werten interpolieren. Man erhält somit als Vorschätzung für den Radial-Return

$$G_{\alpha\alpha}^N = \frac{1}{1+\omega}(G_{\alpha\beta}^A)' + \frac{1}{1+\frac{\omega}{3}\frac{1+\nu}{1-\nu}}G_{\gamma\gamma}^A \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2} \quad (3.68)$$

$$\omega = \left(\frac{\sqrt{(G_{\alpha\beta}^A)'(G_{\beta\alpha}^A)' + \frac{1}{6}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)^2 G_{\alpha\alpha}^A G_{\beta\beta}^A}}{2y_0} - 1 \right) \cdot \frac{(G_{\alpha\beta}^A)'(G_{\beta\alpha}^A)' + 3\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right) G_{\alpha\alpha}^A G_{\beta\beta}^A}{(G_{\alpha\beta}^A)'(G_{\beta\alpha}^A)' + G_{\alpha\alpha}^A G_{\beta\beta}^A} \quad (3.69)$$

Kapitel 4

Finite Elemente

Die Umsetzung einer Schalentheorie in einem Finite-Elemente-Programm ist seit Jahrzehnten Gegenstand der Forschung im Bereich der Strukturmechanik. Somit stellt sich die Frage, wie sich die hier vorgestellte Formulierung in die Literatur einordnen läßt. Vom Standpunkt der Kontinuumsmechanik war es lange Zeit üblich, zwischen dem *Degenerationskonzept* und einer klassischen *Schalentheorie* als Grundlage der Elementformulierung zu unterscheiden. Für die numerische Umsetzung ist dies letztlich unerheblich. Die verbreiteten Konzepte für Finite Schalenelemente basieren im allgemeinen nicht auf der Schalentheorie selbst. Der Krümmungstensor \mathbf{B} oder seine Hauptwerte H und K , die für die analytische Berechnung des Volumendifferentials im Schalenraum notwendig sind, treten in den Formeln der Diskretisierung nirgends auf. Letztlich wird in der diskretisierten Struktur eine Mittelfläche definiert. Von dieser Mittelfläche ausgehend gelangt man dann über mehr oder minder restriktive Annahmen hinsichtlich des Deformationsverhaltens zu Aussagen über den Verzerrungszustand im Schalenraum.

Bereits SCHOOP (1986) weist darauf hin, daß bei KIRCHHOFF oder MINDLIN-REISSNER Elementen für Schalen konstanter Dicke letztlich durch eine Transformation von Knotenvariablen zwischen Degenerationskonzept und Schalentheorie umgerechnet werden kann. BÜCHTER UND RAMM (1992) zeigen schließlich, daß beide Elementkonzepte - bezogen auf Schalen konstanter Dicke und bei richtiger Anwendung des Degenerationskonzeptes - sich nur in der Art der Diskretisierung unterscheiden. Ob nun der Schritt der kinematischen Restriktionen bereits auf der kontinuumsmechanischen Ebene wie z.B. bei der Schalentheorie durch die Geradlinigkeitshypothese vollzogen wird oder ob man erst in der Diskretisierung Einschränkungen geltend macht wie beim Degenerationskonzept nach AHMAD, IRONS & ZIENKIEWICZ (1970)¹, ist für den FE-Designer im Ergebnis uninteressant. BÜCHTER (1992) diskutiert dies und versteht es derart, daß bei einem auf einer Schalentheorie basierenden Element meist Rotationsfreiwerte diskretisiert werden, wohingegen das Degene-

¹Wörtlich schreiben AHMAD ET AL.: The constraint of straight normals is introduced (...) and the strain energy corresponding to stresses perpendicular to the middle surface is ignored.

rationskonzept im allgemeinen Verschiebungsdifferenzen interpoliert. Diese sind dann ihrerseits allerdings über eine Direktorinterpolation dargestellt bzw. können auf eine solche umgerechnet werden. Die Darstellung finiter Rotationen ist in einer Fülle von Arbeiten diskutiert und untersucht worden, beispielhaft seien daher die Arbeiten von BETSCH, MENZEL & STEIN (1998), PARISCH (1991), SANSOUR UND BUFLER (1992) und BRANK UND IBRAHIMBEGOVIC (2001) genannt. In der letztgenannten Arbeit wird eine übersichtliche Zusammenstellung von verschiedenen Parametrisierungsvarianten der finiten Rotationen vorgenommen.

Im Verständnis des Autors ist die hier präsentierte Elementformulierung keinesfalls streng einem der beiden Konzepte zuzurechnen. Insbesondere die Behandlung der Drehungen folgt einer neuen Idee. Die wesentlichen Eigenschaften der numerischen Umsetzung sind:

- Die Mittelflächengeometrie wird isoparametrisch interpoliert. Jedoch erfolgt keine direkte Interpolation von Direktoren oder Drehkoordinaten.
- Bei der Entkoppelung der geometrischen Beschreibung von Mittelfläche und Schalenraum werden unmittelbar Verzerrungsgrößen interpoliert. In diesem Sinne ähnelt die Vorgehensweise der ANS-Methode von HUGHES UND TEZDUYAR (1981).
- Alle Verzerrungen werden vollständig nichtlinear berechnet (GREEN-LAGRANGE Darstellung).
- Alle Verzerrungen werden koordinateninvariant nur durch Skalarprodukte der diskreten Knotenfreiwerte \mathbf{r}_n und \mathbf{d}_n bzw. \mathbf{R}_n und \mathbf{D}_n berechnet.
- Zur numerischen Umsetzung wird keine ko- und kontravariante Formulierung benötigt. Weder kovariante Basen im Schalenraum \mathbf{g}_α^* noch der Shiftertensor \mathbf{Z} werden verwendet.
- In Abweichung von VERHOEVEN (1992) werden im Sinne einer Einsdirektor-kinematik nur zwei Parameter zur Beschreibung der Direktoren benutzt.
- Die Diskretisierung von Schalenstrukturen, d.h. von beliebig gekrümmten Referenzkonfigurationen, ist eine Frage des Präprozessing. Es müssen die Knotenortsvektoren und -normalenvektoren (Direktorneigungen) als Eingabeparameter bekannt sein.
- Auf eine Einbeziehung der Dickenverzerrung in die Kinematik und in die Formänderungsenergie wird verzichtet.
- Vollständig dreidimensionale Materialgesetze können benutzt werden. Ggf. wird die Bedingung des ESZ numerisch gelöst.

Die vorliegende Arbeit basiert auf der von VERHOEVEN (1992) umgesetzten Formulierung. Diese läßt sich in eine in der deutschsprachigen Literatur bisweilen auch als *dreidimensionale Schale* bezeichnete Kategorie [siehe u.a. PARISCH (1995), MIEHE (1998), BISCHOFF (1999)] einordnen, da bei einer 6-Parameter- bzw. 7-Parameter-Formulierung Dickenverzerrungen mit einbezogen und dreidimensionale Stoffgesetze benutzt werden können. Insoweit möchte der Autor seine Arbeit zwischen der *dreidimensionalen* Schale und dem *Degenerationskonzept* einordnen. Ein weiterer Berührungspunkt mit dem klassischen *Schalenskonzept* ergibt sich für das Präprozessing: Es bedarf einer analytischen Beschreibung der Referenz, um die Referenzdirektoren D_n zu ermitteln. Im Fall von Knicken innerhalb der Schalengeometrie, d.h. bei Unstetigkeiten der Neigungen der Mittelfläche, sind lokal Koordinatentransformationen zu definieren, mit deren Hilfe die Direktoren an den Knoten des Knicks für beide Elemente transformiert werden. Der Vorteil der Vorabintegriation in Dickenrichtung zur Ermittlung von Schnittgrößen bzw. Spannungsergebnissen kommt in der Umsetzung nur für linear elastisches Materialverhalten zum Tragen. Bei nichtlinearen Stoffgesetzen muß ohnehin explizit in Dickenrichtung numerisch integriert werden.

4.1 Lockingeffekte

Unter dem Begriff der *Lockingeffekte* versteht man phänomenologisch in der Methode der Finiten Elemente Versteifungseffekte, die aufgrund parasitärer Verzerrungszustände im Element entstehen. Infolge einer zu stark vereinfachten kinematischen Modellbildung werden von der diskretisierten Struktur Verzerrungen erzeugt, die im Kontinuum nicht entstehen. Durch diese Zustände wird Formänderungsenergie gespeichert und ist damit quasi *verbraucht*, kann also nicht von den korrekten Verzerrungszuständen aufgebracht werden. Infolgedessen werden die Deformationen vom Element unterschätzt, die Struktur versteift. Im wesentlichen unterscheidet man folgende Phänomene:

Ebenes Schublocking Bei Scheiben oder Schalen kann Schublocking entstehen, wenn in der Mittelebene des Elementes eine Biegebeanspruchung stattfindet. Der reine Biegezustand kann von der Elementkinematik nicht schubverzerrungsfrei wiedergegeben werden, das Element *lockt*. Dieses Problem tritt z.B. bei bilinear interpolierten Vierecken (Q1-Element) auf.

Querschublocking Bei schubweichen Balken-, Platten- oder Schalenelementen trifft man auf diese Art des Lockings. Charakteristisch ist hierfür, daß die Schwere des Lockings sich je stärker ausprägt, um so dünner das Element wird. Die Ursache hierfür liegt wiederum im Unvermögen der zu stark vereinfachten Kinematik, die den reinen Biegezustand nicht querschubverzerrungsfrei darstellt.

Membranlocking Bei dieser Variante des Locking-Verhaltens treten im Element parasitäre Membranverzerrungen auf für Zustände, in denen die Kontinuumslösung membranspannungsfrei ist.

Volumetrisches Locking Diese Art des Lockings tritt bei dreidimensionalen Elementformulierungen auf. Es bedeutet, daß rein deviatorische Verzerrungszustände, wie sie z.B. in der Plastizität oder in der Gummielastizität im Fall $\nu \rightarrow 0,5$ auftreten, nicht ohne volumetrische Verzerrungsanteile abgebildet werden.

Curvature Thickness Locking Diese Art des Lockings tritt nur auf bei Elementen, die unmittelbar das Direktorfeld interpolieren. Bei reinen Biegezuständen ergibt sich infolge der Direktorinterpolation eine parasitäre Dickenverzerrung ϵ_{33} . Während dieses Locking in der Literatur meist mit dem Namen RAMM [siehe RAMM, BRAUN & BISCHOFF (1995)] verbunden ist, nahm bereits SCHOOP (1989) dies zum Anlaß, die Direktorinterpolation ganz zu vermeiden und stattdessen direkt Verzerrungen zu interpolieren.

POISSON Locking Diese Art des Dickenlockings tritt auf bei 6-parametrischen Formulierungen, die infolge des linearen Ansatzes der Verschiebung in Dickenrichtung die Dickenverzerrung $\epsilon_{33} = \text{konstant}$ annehmen: Treten linear veränderliche Membranverzerrungen auf, entstehen infolge Querkontraktion ($\nu \neq 0$) linear veränderliche Spannungen σ_{33} . Diese wiederum korrelieren nicht mit den konstanten Dickenverzerrungen aus dem kinematischen Ansatz, so daß sie wegen ihres Charakters einer *Zwangsspannung* zum Locking führen. VERHOEVEN (1992) vermied das POISSON-Locking durch Hinzunahme eines 7. Freiheitsgrades, d.h. eine Erweiterung der Dickenverzerrungen um einen in Dickenrichtung linear veränderlichen Term.

Detailliertere Abhandlungen zum Thema Versteifungseffekte finden sich bei BISCHOFF (1999), BRAUN (1995) oder ANDELFINGER (1991). Einer der ersten Ansätze zur Vermeidung von locking-Phänomenen ist der von ZIENKIEWICZ, TAYLOR & TOO (1971) vorgeschlagene Gedanke der reduzierten Integration. Hierbei werden durch Unterintegration des Elementes gezielt Anteile an Verzerrungen herausgefiltert, so daß im Integralmittel Versteifungen behoben werden. Diese Methode ist jedoch häufig mit sog. *zero energy modes* verbunden. Diese Elementkinematiken sind äußerst unerwünscht, da sie zum Stabilitätsverlust des Elementes führen. Dieser kann ggf. durch Stabilisierungstechniken behoben werden [siehe BELYTSCHKO UND TSAY (1983)]. Auch wäre Abhilfe durch selektive Integration möglich. Hierbei büßt das Finite-Elemente-Verfahren jedoch viel von seiner Systematik ein, da je nach Art der Verzerrung unterschiedliche Integrationsschemata zu verwenden sind. Eine weitere und in der vorliegenden Arbeit zum Einsatz kommende Methode ist der auf gemischten Variationsprinzipien basierende EAS-Ansatz (siehe Abschnitt 4.2.3). Das belie-

teste Einsatzgebiet der EAS-Methode ist die Beseitigung des ebenen Schublockings und/oder des POISSON Lockings, d.h. es werden Erweiterungen für $\epsilon_{\alpha\beta}$ bzw. ϵ_{33} angenommen.

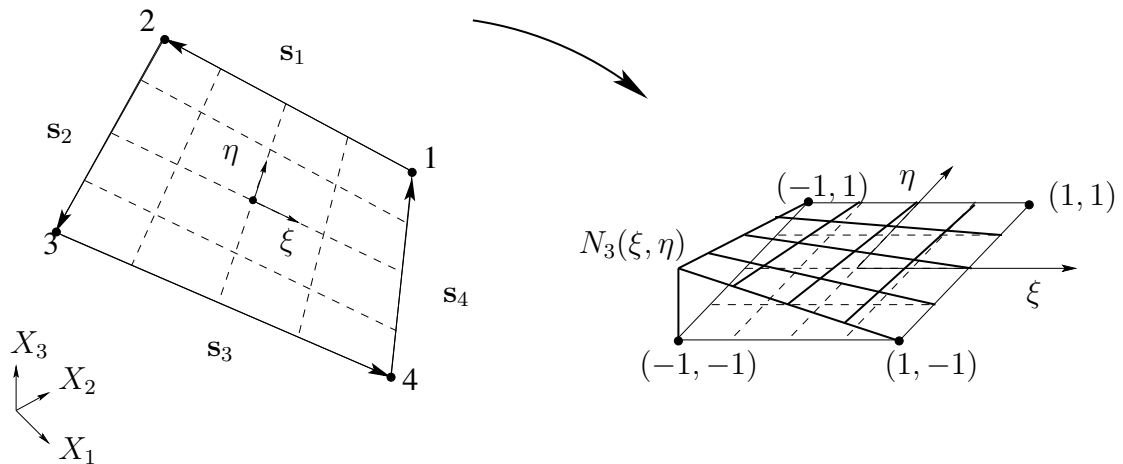
4.2 Viereckselement

Den Schwerpunkt des hier vorgestellten FE-Konzeptes bildet ein Vierknotenenelement mit 20 Freiheitsgraden. Da das Hauptaugenmerk der Anwendung primär im Bereich dünner Flächentragwerke liegt, wird die Annahme des ebenen Spannungszustandes getroffen (ESZ). Im Hinblick darauf sowie unter Umgehung des in Abschnitt 2.6 beschriebenen Stabilitätsproblems der sechsparemetrigen Formulierung mit extensibler Direktorkinematik wird eine fünfparametrische Einsdirektorkinematik benutzt. Hinsichtlich der auftretenden Formeln gilt für doppelt auftretende Indizes die Summationskonvention nach EINSTEIN. Im allgemeinen gilt: *griechische* Indizes $\alpha, \beta = 1, 2$, *lateinische* Indizes $i, j, k = 1, \dots, 3$ und meist als *Knotenindizes* auftauchende lateinische Buchstaben $m, n = 1, \dots, 4$. Für die Diskretisierung wird die Elementmittelfläche als glatt, aber nicht eben angenommen. Diese gekrümmte Fläche wird nicht exakt ermittelt. Exakt ermittelt werden die Knotenkoordinaten \mathbf{R}_n (RKF) und \mathbf{r}_n (MKF) sowie die Einheitsdirektoren an den Knoten \mathbf{D}_n (RKF) und \mathbf{d}_n (MKF). Während der Referenzdirektor \mathbf{D}_n per definitionem senkrecht zur Mittelfläche steht, wird der Direktor \mathbf{d}_n in der aktuellen Lage infolge der KIRCHHOFF Hypothese für dünne Schalen als senkrecht zur aktuellen Mittelfläche angenommen. Damit sind sowohl die Knotenpositionen wie auch die lokalen Tangentialebenen in diskreten Punkten des Gebietes bekannt.

Isoparametrisches Konzept Allgemein formuliert versteht man unter einem isoparametrischen Konzept die Abbildung von Geometrie und gesuchter Funktion mittels gleichartiger Funktionen [SCHWARZ (1991)]. Hier bedeutet dies, daß in der Diskretisierung sowohl aktuelle Lage \mathbf{x} als auch Referenzkonfiguration \mathbf{X} mit denselben bilinearen Interpolationsfunktionen N_m des Einheitsquadrats beschrieben werden. Die Vierecksgeometrie wird zwischen den vier Eckknoten demzufolge bilinear interpoliert. Dies wird in einer kleinen Graphik veranschaulicht: In Abb. (4.1) werden die Seitenvektoren \mathbf{s}_m und die lokale Knotennummerierung im Element definiert. Als Flächenkoordinaten q^α im Einheitsquadrat werden die Parameter ξ und η eingeführt. Die Interpolationsvorschrift der Mittelfläche der dreidimensionalen Referenzkonfiguration lautet dann

$$\mathbf{R}(\xi, \eta) = N_n(\xi, \eta)\mathbf{R}_n \quad n = 1, \dots, 4. \quad (4.1)$$

Hierbei sind die Interpolationsfunktionen N_n gemäß Abb. (4.1) jeweils so gewählt, daß am Knoten n gerade die Funktion N_n den Wert eins annimmt, während die anderen drei Funktionen im Knoten n gleich null sind. In Abb. (4.1) ist exemplarisch der

Abbildung 4.1: Vierecksgeometrie und Ansatzfunktion $N_3(\xi, \eta)$

Verlauf der Funktion $N_3(\xi, \eta)$ dargestellt. Man erhält entsprechend durch Drehungen um $\pi/2, \pi$ und $3\pi/2$ die restlichen Funktionen N_m für $m \neq 3$. \mathbf{R}_n sind die Stützwerte in den Eckpunkten des Vierecks. Für die aktuelle Mittelfläche \mathbf{r} gilt infolge der Isoparametrie analog zu Gl. (4.1)

$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = N_n(\xi, \eta)\mathbf{r}_n \quad n = 1, \dots, 4. \quad (4.2)$$

Sowohl Referenz \mathbf{R} als auch aktuelle Lage \mathbf{r} sind dreidimensionale Vektoren, beschrieben im globalkartesischen Basissystem \mathbf{e}_i . Die bilinearen Interpolationsfunktionen im Einheitsquadrat lauten

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta), \quad (4.3)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta), \quad (4.4)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta), \quad (4.5)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta). \quad (4.6)$$

Für die weiteren Berechnungen werden an dieser Stelle gleich die partiellen Ableitungen der Interpolationsfunktionen nach den Flächenkoordinaten angegeben. Diese werden benötigt für die Berechnung der ko- und kontravarianten Basisvektoren auf

der Fläche.

$$N_{1,\xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta) \quad N_{1,\eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi) \quad (4.7)$$

$$N_{2,\xi} = -\frac{1}{4}(1 + \eta) \quad N_{2,\eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi) \quad (4.8)$$

$$N_{3,\xi} = -\frac{1}{4}(1 - \eta) \quad N_{3,\eta} = -\frac{1}{4}(1 - \xi) \quad (4.9)$$

$$N_{4,\xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta) \quad N_{4,\eta} = -\frac{1}{4}(1 + \xi) \quad (4.10)$$

Verzerrungen Formal werden in der diskretisierten Struktur die Membranverzerrungen als GREENsche Verzerrungen ermittelt gemäß Gl. (2.8)

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{2}(\nabla_2 \circ \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \circ \nabla_2 - \boldsymbol{\delta}). \quad (4.11)$$

Allerdings führt dies zu einem $[3 \times 3]$ Deformationsgradienten, da beliebige räumliche Konfigurationen vorliegen können. Im Hinblick auf die später zu treffende Annahme des ebenen Spannungszustandes ist es zunächst erforderlich, lokal orthogonale Richtungen $\bar{\mathbf{e}}_\alpha$ zu definieren, mit Hilfe derer dann tatsächlich eine Berechnung planarer Verzerrungen analog zu Gl. (2.15) möglich wird. Ferner bietet die Verwendung lokal *orthogonaler* Richtungen auch den Vorteil, daß auf eine kartesische Beschreibung übergegangen werden kann.

Lokale Orthonormalbasis Die nächstliegende Möglichkeit der Definition einer lokal kartesischen Basis in der Tangentialebene der Referenzkonfiguration ergibt sich unter Benutzung der ko- bzw. kontravarianten Basen in den Integrationspunkten. Als erster Basisvektor wird die Richtung des Tangentenvektors \mathbf{G}_1 gewählt gemäß Gl. (A.2). Als zweiten Basisvektor wählt man dementsprechend die Richtung von \mathbf{G}^2 .

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{G}_1}{\sqrt{G_{11}}} \quad (4.12)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_2 = \frac{\mathbf{G}^2}{\sqrt{G^{22}}}. \quad (4.13)$$

Mit Hilfe von Gl. (4.12) und Gl. (4.13) kann nun eine zweidimensionale Darstellung des dreidimensionalen Deformationsgradienten angegeben werden.

4.2.1 Deformationsgradient

Die Gl. (2.4) liefert zunächst die Darstellung des Nablaoperators auf der Fläche. Hiermit ergibt sich der Deformationsgradient zu

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{r} \circ \nabla_2 \stackrel{\text{Gl. (4.2)}}{=} \frac{\partial N_m}{\partial q^\alpha} \mathbf{r}_m \circ \mathbf{G}^\alpha \stackrel{\text{Gl. (A.8)}}{=} N_{m,\alpha} \mathbf{r}_m \circ G^{\alpha\beta} N_{n,\beta} \mathbf{R}_n. \quad (4.14)$$

Die partiellen Ableitungen der bilinearen Interpolationsfunktionen nach den Flächenkoordinaten sind in Gl. (4.7) bis Gl. (4.10) angegeben². Damit ergibt sich als planarer Deformationsgradient

$$F_{2ij} = N_{n,\alpha} G_j^\alpha r_{in} = N_{n,\alpha} N_{m,\beta} G^{\alpha\beta} r_{in} R_{jm} . \quad (4.15)$$

Den Bezug auf die spezielle lokal orthogonale Basis erhält man durch skalare Multiplikation mit Gl. (4.12) bzw. Gl. (4.13). Benutzt wird dann

$$F_{2i\gamma} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{F}_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_\gamma = e_{ki} F_{2kj} \bar{e}_{\gamma j} . \quad (4.16)$$

4.2.2 Membranverzerrung

Der GREENSche Tensor der Mittelflächenverzerrungen nach Gl. (2.10) lautet

$$\mathbf{E}_2^0 = \frac{1}{2} (\nabla_2 \circ \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \circ \nabla_2 - \boldsymbol{\delta}) . \quad (4.17)$$

Mittels Gl. (4.15) und der Bezugnahme auf die lokale Orthonormalbasis gemäß Gl. (4.12) und Gl. (4.13) erhält man die Membranverzerrungen im Integrationspunkt $\epsilon_{\alpha\beta}^0 \langle k \rangle$ als

$$\epsilon_{\alpha\beta}^0 \langle k \rangle = \frac{1}{2} (\bar{e}_{\alpha i} \bar{e}_{\beta j} N_{n,\gamma} G_i^\gamma N_{m,\delta} G_j^\delta r_{km} r_{kn} - \delta_{\alpha\beta}) \langle k \rangle . \quad (4.18)$$

4.2.3 Methode der angenommenen Verzerrungen (EAS)

Die Ermittlung der Membranverzerrungen ausschließlich auf Basis der bilinearen Interpolation im Viereck führt zu Versteifungseffekten, die üblicherweise unter dem Begriff *locking* zusammengefaßt werden (siehe Abschnitt 4.1).

Ein systematischer und vielversprechender Ansatz, das ebene Schublocking bereits auf Elementebene zu eliminieren, ist die auf SIMO UND RIFAI (1990) zurückgehende Methode der *enhanced assumed strains*, kurz EAS genannt. Hierbei handelt es sich um eine gemischt-hybride Elementformulierung, die von SIMO UND RIFAI (1990) zunächst linear formuliert wurde und u.a. von BISCHOFF UND RAMM (1997) in die geometrisch nichtlineare Theorie übertragen wurde. Während bei den Autoren SIMO UND RIFAI (1990), WRIGGERS UND REESE (1996), WRIGGERS (2001) oder KORELC UND WRIGGERS (1996) eine Erweiterung oder Anreicherung des Verschiebungsgradienten $\tilde{\mathbf{H}}$ bzw. Deformationsgradienten $\tilde{\mathbf{F}}$ die Grundlage bildet, wird bei BISCHOFF UND RAMM (1997), KLINKEL UND WAGNER (1997) und BISCHOFF (1999) ein Ansatz unmittelbar für die GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ gewählt. Dieser Weg wird auch im folgenden besprochen. Andere Autoren, wie z.B.

²Im folgenden werden wegen der total LAGRANGESchen Darstellung mit Hilfe der globalkartesischen Basis die meisten Tensoren in indizistischer Notation angegeben.

SANSOUR (1998), wenden den EAS-Gedanken auch auf den rechten CAUCHY Tensor $\tilde{\mathbf{C}}$ an.

Für die Formulierung des Variationsproblems im Sinne des Prinzips der virtuellen Arbeiten dient als Ausgangspunkt anstelle einer Einfeldformulierung eine Dreifeldformulierung nach WASHIZU (1982). Zunächst werden die kompatiblen Verzerrungen \mathbf{E}^u erweitert um einen inkompatiblen Anteil $\tilde{\mathbf{E}}$ - die sog. EAS-Verzerrungen. Diese stützen sich ausschließlich auf innere Freiheitsgrade α und nicht auf die Knotenfreiwerte \mathbf{r} oder \mathbf{d} . Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, daß durch eine geschickte Wahl der unabhängigen Felder $\tilde{\mathbf{E}}$ und \mathbf{S} die EAS-Freiwerte auf Elementebene kondensiert werden können und somit eine Rückführung der ursprünglichen Dreifeldformulierung auf die klassische Einfeldformulierung der reinen Weggrößenmethode gelingt. Im folgenden Abschnitt wird die Theorie des Verfahrens skizziert, die numerische Umsetzung ist anschließend in Tab. (4.1) angegeben.

Variationsformulierung Ausgangspunkt ist das HU-WASHIZU-Dreifeldfunktional:

$$\Pi^{HW} = \Pi(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{S}) = \Pi_i(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{S}) + \Pi_a(\mathbf{u}) \quad (4.19)$$

Die drei unabhängigen Variablen sind der Verschiebungsvektor \mathbf{u} , der enhanced Verzerrungstensor $\tilde{\mathbf{E}}$ und die 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungen \mathbf{S} . Der Grundgedanke der EAS-Methode besteht in der Superposition der Gesamtverzerrung als

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^u + \tilde{\mathbf{E}}, \quad (4.20)$$

wobei die kompatiblen Verzerrungen durch $\mathbf{E}^u = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1})$ definiert sind. Liegt Hyperelastizität vor, kann das innere Potential Π_i geschrieben werden als

$$\Pi_i = \int_V \left(W_s(\mathbf{E}^u + \tilde{\mathbf{E}}) - \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right) dV. \quad (4.21)$$

Hierbei ist W_s eine spezifische Formänderungsenergie. Das äußere Potential Π_a ergibt sich im Fall konservativer Belastung zu

$$\Pi_a = - \int_V \rho \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{u} dV - \int_A \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{u} dA, \quad (4.22)$$

wobei $\rho \mathbf{b}^*$ eine referenzbezogene Volumenkraftdichte und \mathbf{P}^* eine vorgegebene Oberflächenkraft sind. Nun bildet man die erste Variation dieses Funktionals über die sogenannte GÂTEAUX-Ableitung

$$\delta \Pi^{HW} := \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \Pi(\mathbf{u}_\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}_\epsilon, \mathbf{S}_\epsilon), \quad (4.23)$$

wobei die Zustände $\mathbf{u}_\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}_\epsilon, \mathbf{S}_\epsilon$ definiert sind als $\mathbf{u}_\epsilon = \mathbf{u} + \epsilon \delta \mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{E}}_\epsilon = \tilde{\mathbf{E}} + \epsilon \delta \tilde{\mathbf{E}}$ und $\mathbf{S}_\epsilon = \mathbf{S} + \epsilon \delta \mathbf{S}$. Im Sinne des Gleichgewichts gilt dann für die Variation des HU-WASHIZU-Funktional $\delta \Pi^{HW} = 0$. Entsprechend ergibt die Ausführung der Variationen:

$$\int_V \delta \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \, dV = 0 \quad (4.24)$$

$$\int_V \left(\frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{E}} - \mathbf{S} \right) \cdot \delta \tilde{\mathbf{E}} \, dV = 0 \quad (4.25)$$

$$\int_V \left(\frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{E}} \cdot \delta \mathbf{E}^u - \rho \mathbf{b}^* \cdot \delta \mathbf{u} \right) dV - \int_A \mathbf{P}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0. \quad (4.26)$$

Aus den Gln. (4.24) bis (4.26) folgen die zugehörigen EULER-LAGRANGE Gleichungen in differentieller Form³ zu

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) + \rho \mathbf{b}^* = 0 \quad (4.27)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{E}} \quad (4.28)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (4.29)$$

mit der zugehörigen Randbedingung

$$\mathbf{P}^* = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{n}_0. \quad (4.30)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{n}_0 die Randflächennormale in der Referenz. Die Gln. (4.27) bis (4.29) gelten im Kontinuum. In der nicht diskretisierten Form ist tatsächlich $\tilde{\mathbf{E}} = 0$. Erst durch die Diskretisierung im Rahmen der FE-Methode ergeben sich von Null verschiedene EAS-Verzerrungen. Gerade durch die geschickte Wahl der EAS-Ansätze soll ja die Elementformulierung verbessert werden.

Diskretisierung Zunächst ist es das Ziel, das unabhängige Spannungsfeld \mathbf{S} aus Gl. (4.21) zu eliminieren. Hierzu wird von den Ansätzen für \mathbf{S} und $\tilde{\mathbf{E}}$ Energieorthogonalität gefordert im Sinne von

$$\int_{V_e} \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \, dV_e = 0. \quad (4.31)$$

Damit wird zugleich der Gl. (4.24) genügt. Um der in Gl. (4.31) geforderten Orthogonalität zu genügen, müssen für \mathbf{S} die z.B. bei ANDELFINGER UND RAMM

³unter Berücksichtigung der Anwendung des GAUSSschen Satzes auf Gl. (4.26)

(1993), ANDELFINGER (1991) oder auch bei SIMO UND RIFAI (1990) diskutierten Ansätze gewählt werden. Dennoch verliert das Energiefunktional seinen HUKAWASHIZU-Charakter, denn es werden keine Ansätze für die unabhängigen Spannungsfelder \mathbf{S} konkretisiert. Unter der Annahme, die Orthogonalitätsforderung gemäß Gl. (4.31) ist erfüllt, reduziert sich Gl. (4.21) formal auf die Form

$$\Pi_i(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) = \int_{V_e} W_s(\mathbf{E}^u + \tilde{\mathbf{E}}) dV_e. \quad (4.32)$$

Wegen Gl. (4.25), Gl. (4.26) und Gl. (4.24) bzw. Gl. (4.31) muß nun das Energiefunktional nach Gl. (4.32) extremal werden. Im Sinne der Logik eines Finite-Elemente-Verfahrens wird die funktionale Abhängigkeit des Energiefunktionals vom Verschiebungsfeld \mathbf{u} und vom Feld der EAS-Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ durch die parametrische Abhängigkeit von den Knotenfreiwerten \mathbf{a} und den inneren Freiwerten $\boldsymbol{\alpha}$ ersetzt. Man definiert nun mit \mathbf{a} den Vektor der diskreten Knotenfreiwerte und mit $\boldsymbol{\alpha}$ den Vektor der EAS-Freiwerte. Infolge der Diskretisierung notiert man die Variation von Gl. (4.32) bzgl. der diskreten Freiwerte. Für die Variation des diskretisierten Funktionals $\tilde{\Pi}_i$ in Gl. (4.32) ergibt sich

$$\delta \tilde{\Pi}_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \int_{V_e} \delta W_s(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) dV_e. \quad (4.33)$$

Unter Berücksichtigung der Kettenregel und mit der Abkürzung⁴ $\hat{\mathbf{S}} = \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{E}}$ geht Gl. (4.33) über in die schwache Form

$$\delta \tilde{\Pi}_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \underbrace{\delta \mathbf{a} \cdot \int_{V_e} \hat{\mathbf{S}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}^u}{\partial \mathbf{a}} dV_e}_{= \mathbf{R}} + \underbrace{\delta \boldsymbol{\alpha} \cdot \int_{V_e} \hat{\mathbf{S}} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} dV_e}_{= \tilde{\mathbf{R}} \stackrel{!}{=} 0}. \quad (4.34)$$

Die erste geschweifte Klammer in Gl. (4.34) enthält die Forderung, daß sich die Membrankräfte unabhängig von den EAS-Freiwerten $\boldsymbol{\alpha}$ auf die Knoten verteilen. Sie liefert mit der zweiten geschweiften Klammer eine Bedingung, mit deren Hilfe sich die Werte $\boldsymbol{\alpha}$ auf Elementebene kondensieren lassen. Um die Forderung $\tilde{\mathbf{R}} = 0$ zu erfüllen, muß ein Materialgesetz zugrunde gelegt werden. Im folgenden wird im Hinblick auf die Programmierung von Tensornotation auf VOIGT Notation gewechselt. Der GREEN-LAGRANGE Tensor wird mit $\boldsymbol{\epsilon}$ und der 2. PIOLA-KIRCHHOFF Tensor mit $\boldsymbol{\sigma}$ bezeichnet. Für die partiellen Ableitungen werden die Abkürzungen $(\dots)_{,a}$ bzw. $(\dots)_{,\alpha}$ eingeführt.

⁴Das Symbol $\hat{\mathbf{S}}$ soll verdeutlichen, daß es sich um die aus dem Materialgesetz herrührende Spannung handelt, denn mit \mathbf{S} ist bereits das unabhängige Spannungsfeld in Gl. (4.19) bezeichnet worden.

ST. VENANT-KIRCHHOFF Material In diesem Fall gilt formal weiterhin die lineare Zuordnung zwischen Spannungs- und Verzerrungszustand, nur ist das Verzerrungsmaß selbst bereits eine nichtlineare Größe. Damit ist es möglich, anstelle der in Gl. (4.19) bis Gl. (4.34) auftretenden Volumenintegrale vorab die Spannungen in Dickenrichtung aufzuintegrieren und auf Flächenintegrale überzugehen. Da Biegemomente und Membrankräfte getrennt behandelt werden können, ergibt sich mit den 2. PIOLA-KIRCHHOFF Membrankräften \mathbf{t} das Stoffgesetz zu

$$\mathbf{t} = \mathbf{C}^K \cdot (\boldsymbol{\epsilon}^u + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}). \quad (4.35)$$

Hierbei bedeutet \mathbf{C}^K die VOIGTSche Matrix der Membransteifigkeiten, die insbesondere nicht von den Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}$ abhängt. Die Forderung des Verschwindens des zweiten Klammersausdrucks in Gl. (4.34) ergibt zunächst

$$\delta \boldsymbol{\alpha} \cdot \int_{A_e} \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} dA_e = 0 \quad \text{bzw.} \quad (4.36)$$

$$\delta \boldsymbol{\alpha} \cdot \int_{A_e} (\boldsymbol{\epsilon}^u + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}) \cdot \mathbf{C}^K \cdot \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} dA_e = 0. \quad (4.37)$$

Für die EAS-Verzerrungen $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ wählt man nun einen Ansatz

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{M}(\xi, \eta) \cdot \boldsymbol{\alpha}. \quad (4.38)$$

An \mathbf{M} sind zwei wesentliche Forderungen zu stellen: Einerseits ist der Tensor $\tilde{\mathbf{E}}$ symmetrisch anzusetzen, da in Gl. (4.38) eine Annahme für den Verzerrungszustand getroffen wird. Andererseits sollten für konstante kompatible Verzerrungszustände sämtliche $\boldsymbol{\alpha}$ verschwinden, da diese Zustände von den kompatiblen bilinearen Verzerrungen \mathbf{E}^u bereits exakt abgebildet werden. Da konstante Verzerrungszustände auch konstante Spannungszustände bedeuten, kann man in Gl. (4.31) den Spannungstensor \mathbf{S} aus dem Integral herausziehen und erhält die Forderung

$$\mathbf{S} \cdot \int_{V_e} \tilde{\mathbf{E}} dV_e = 0, \quad (4.39)$$

woraus sich in VOIGT Notation

$$\int_{A_e} \mathbf{M} dA_e \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad (4.40)$$

ergibt, da die $\boldsymbol{\alpha}$ unabhängig vom Integrationsgebiet sind. Gl. (4.40) läßt sich am einfachsten erfüllen, wenn man zur Beschreibung die Basis im Elementmittelpunkt wählt. Im Hinblick auf die allgemein schiefwinklige Formulierung ist noch das Flächenverhältnis in die Integration einzubeziehen - siehe Abschnitt 4.2.4. Alle Integrationsprozesse im Element werden numerisch durchgeführt mit vier Integrationspunkten im

Viereck. Durch das Einsetzen des Ansatzes für die EAS-Verzerrungen nach Gl. (4.38) ergibt sich für Gl. (4.37)

$$\delta \alpha \cdot \int_{A_e} (\epsilon^u + \mathbf{M} \cdot \alpha) \cdot \mathbf{C}^K \cdot \frac{\partial (\mathbf{M} \cdot \alpha)}{\partial \alpha} dA_e = 0. \quad (4.41)$$

Hieraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\int_{A_e} \epsilon^u \cdot \mathbf{C}^K \cdot \mathbf{M} dA_e}_{\mathbf{L}} + \alpha \cdot \underbrace{\int_{A_e} \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C}^K \cdot \mathbf{M} dA_e}_{\mathbf{D}} = 0, \quad (4.42)$$

woraus dann die inneren Freiwerte α in Abhängigkeit der Knotenfreiwerte \mathbf{r} ermittelt werden⁵. Dieses Gleichungssystem ist auf Elementebene zu invertieren. Die Inversion von Gl. (4.42) lautet dann

$$\alpha = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{L}. \quad (4.43)$$

Nach Berechnung von Gl. (4.43) sind die fehlenden Parameter zur Ermittlung des vollständigen Verzerrungszustandes ϵ bekannt. Für die numerische Umsetzung werden noch die resultierenden Korrekturterme für den Elementknotenlastvektor \mathbf{R} und die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} benötigt. Es folgen, ausgehend von Gl. (4.34), der Elementfehlkraftvektor \mathbf{F}_e und die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e :

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{R} - \int_{A_e} \tilde{\epsilon}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \epsilon_{,a}^u dA_e \quad (4.44)$$

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^u - \alpha_{,a} \cdot \int_{A_e} \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \epsilon_{,a}^u dA_e - \alpha \cdot \int_{A_e} \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \epsilon_{,aa}^u dA_e. \quad (4.45)$$

Hierbei bedeutet \mathbf{K}^u den Anteil, der aus den kompatiblen Verzerrungen herrührt.

NEO-HOOKE Material Im Gegensatz zum Materialgesetz von ST. VENANT-KIRCHHOFF nimmt das NEO-HOOKE Stoffgesetz eine nichtlineare Zuordnung vor:

$$\hat{\sigma} = \mathbf{C}^N(\epsilon) \cdot \epsilon. \quad (4.46)$$

Hierbei bedeute $\mathbf{C}^N(\epsilon)$ die nunmehr verzerrungsabhängige Steifigkeit. Infolgedessen ist eine getrennte Betrachtung von Biege- und Membranspannungszustand unzulässig. Die Dehnung, die zur Ermittlung der Spannung $\hat{\sigma}$ im Materialgesetz einzusetzen ist, ist die Gesamtdehnung

$$\epsilon = \epsilon^u + z \kappa + \tilde{\epsilon} \quad (4.47)$$

⁵Ausnahmsweise wird in Abschnitt 4.2.3 und Abschnitt 4.2.5 die für den Referenzdirektor reservierte Abkürzung \mathbf{D} doppelt verwendet. In der die EAS-Methode behandelnden Literatur wird die in Gl. (4.42) durch die zweite geschweifte Klammer definierte Matrix üblicherweise mit \mathbf{D} abgekürzt.

in der jeweiligen Schicht über bzw. unter dem Integrationspunkt. Hierbei bedeutet κ die Verkrümmungen oder Biegeverzerrungen. Anstatt einer Vorabintegration der Spannungen in Dickenrichtung zu Schnittgrößen wird eine schichtweise Auswertung der Volumenintegrale in Punkten oberhalb und unterhalb der GAUSS Punkte der Flächen nötig. Das führt auf eine sog. Schichtpunktintegration der Integrale in Gl. (4.19) bis Gl. (4.34). Für die Ermittlung der EAS-Freiwerte α ergibt sich, daß diese nicht durch die Lösung eines linearen Gleichungssystems analog zu Gl. (4.42) ermittelt werden können. Vielmehr ist das Verschwinden der EAS-Anteile an der Fehlkraft $\tilde{\mathbf{R}}$ der geschweiften Klammer in Gl. (4.34) nur durch Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$\tilde{\mathbf{R}}(\alpha) = \int_{V_e} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\alpha) \cdot \mathbf{M} \, dV_e = 0 \quad (4.48)$$

erzielbar. Zur Iteration benötigt man noch die Ableitung der Spannungen $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ nach den EAS-Freiwerten α . Mit der Abkürzung

$$\tilde{\mathbf{R}}_n = \int_{V_e} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\alpha_n) \cdot \mathbf{M} \, dV_e \quad (4.49)$$

für das Residuum und mit der internen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} der EAS-Freiwerte

$$\mathbf{K}_n = \int_{V_e} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\alpha_n)}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{M} \, dV_e = \int_{V_e} \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C}^N \cdot \mathbf{M} \, dV_e \quad (4.50)$$

iteriert man die α gemäß

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \mathbf{K}_n^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_n \quad (4.51)$$

so lange, bis die Norm von $\tilde{\mathbf{R}}_n$ eine vorgewählte Schranke erreicht hat. Hierbei bedeutet n den Iterationsindex. Als Startwert der Iteration wählt man $\alpha_0 = 0$. Mit Gl. (4.51) sind die inneren Freiwerte α bekannt, so daß nunmehr auch der vollständige Verzerrungszustand ϵ berechnet und über das Stoffgesetz die Spannungen ermittelt werden können.

Die Auswirkungen auf Elementfehlkraftvektor \mathbf{R} und Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} sind noch zu notieren. Es ist zu berücksichtigen, daß die Freiwerte α nun ebenfalls von den Knotendirektoren \mathbf{d} und den Knotenkoordinaten \mathbf{r} abhängen, allerdings nicht über einen Funktionszusammenhang. Daraus resultiert eine zusätzliche Schwierigkeit beim Aufstellen der Elementmatrizen:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{R} = \int_{V_e} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{,a}^u \, dV_e, \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \int_{V_e} \left(\boldsymbol{\epsilon}_{,a}^u + z \boldsymbol{\kappa}_{,a} + \underline{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}_{,a} \right)^T \cdot \mathbf{C}^N \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{,a}^u \, dV_e \\ &+ \int_{V_e} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{,aa}^u \, dV_e. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Der unterstrichene Term ist nicht unmittelbar zu berechnen. Hierzu wird die Ableitung $\alpha_{,a}$ benötigt. Diese Herleitung ist im Anhang E notiert.

Inelastisches Material Es gilt nach wie vor im Sinne des EAS-Grundgedankens die Gl. (4.20), d.h. die Superposition der kompatiblen und inkompatiblen Dehnungen. Mit der schwachen Form des Prinzips nach Gl. (4.34) müssen die Spannungen und Spannungsableitungen im Sinne der konsistenten Linearisierung berechnet werden. Um eine möglichst große Allgemeingültigkeit der Formulierung beibehalten zu können, werden dreidimensional formulierte Materialgesetze zugrunde gelegt. Allerdings muß in diesem Fall eine Anpassung des inelastischen Materialverhaltens an die Bedingungen des ebenen Spannungszustandes vorgenommen werden. Dies ist im Anhang in Abschnitt C beschrieben. Damit ist nach wie vor ein nichtlineares Gleichungssystem wie in Gl. (4.46) beschrieben zu lösen. In Tab. (4.1) auf Seite 54 ist ein schematischer Ablauf für die programmtechnische Umsetzung des hier vorgeschlagenen EAS-Konzeptes angegeben.

4.2.4 Verschiedene Ansätze

Nachdem in Abschnitt 4.2.3 ausführlich dargelegt wurde, wie prinzipiell - insbesondere für nichtlineares Materialverhalten - die Einbindung des EAS-Konzeptes in ein FE-Konzept vorgenommen werden kann, sollen nun zwei Elementvarianten kurz vorgestellt werden. Hierbei werden in VOIGT Notation die Ansätze für die Matrix M nach Gl. (4.38) notiert.

Große Bedeutung kommt hierbei insbesondere der Konstruktion der Matrix M zu. Da die EAS-Verzerrungen $\tilde{\epsilon}$ und die kompatiblen Verzerrungen ϵ^u superponiert werden, müssen beide in denselben Basissystemen formuliert werden. Die Anzahl der inneren Parameter α bedingt den Aufwand bzw. die Rechenzeit für eine Matrixinversion auf Elementebene, um die Freiheitsgrade α auf die Knotenfreiwerte a zurückzuführen. Bereits Untersuchungen von ANDELFINGER UND RAMM (1993), BISCHOFF UND RAMM (1997), KLINKEL (2000) sowie Studien des Autors zeigen, daß man die Anzahl der Parameter α_q durchaus sinnvoll beschränken kann. Ökonomische Varianten sind - bezogen auf eine schalenbasierte Elementformulierung - der vierparametrig und der siebenparametrig Ansatz (Q1E4- und Q1E7-Element). Werden ausschließlich rechtwinklige oder nur gering verzerrte Netze untersucht, erreicht man durch den höheren numerischen Aufwand des Q1E7-Elementes keine Verbesserungen des Konvergenzverhaltens (Vergleiche Abschnitt 5.2.2). Allenfalls bei nichtlinearen Berechnungen ergeben sich geringfügige Verbesserungen durch den siebenparametrig Ansatz. Autoren wie KEMP, CHO & LEE (1998) oder HONG, KIM & LEE (2001) untersuchten ebenfalls Elementvarianten mit bis zu über 20 Parametern α_p . Die Autoren beziehen sich in den genannten Arbeiten ausschließlich auf die lineare Theorie

und untersuchen volumenbasierte Elementformulierungen. Der deutlich höhere numerische Aufwand dieser Versionen ist nach Ansicht des Autors nicht gerechtfertigt.

Q1E4-Element In Übereinstimmung mit Gl. (4.40) läßt sich ein sinnreicher Ansatz für EAS-Verzerrungen $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha}$ angeben mit

$$\mathbf{M} = \frac{J_0}{J} \begin{bmatrix} \xi \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 & \eta \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^2 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 & \dots \\ \xi \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 & \eta \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^2 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 & \dots \\ 2\xi \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 & 2\eta \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^2 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi (\bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 & \dots & \dots \\ \eta \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 & \dots & \dots \\ \eta (\bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Die Matrix \mathbf{M} ist von der Dimension $[3 \times 4]$. J_0 bzw. J in Gl. (4.54) bedeuten die Wurzel der Determinante der kovarianten Metrik in der Elementmitte bzw. im Integrationspunkt und der Index \mathbf{G}_0^α die kontravariante Basis in der Elementmitte für $\xi = 0$ und $\eta = 0$. Durch Projektion in die Richtung der lokalen Orthogonalbasis $\bar{\mathbf{e}}_\beta$ mit Hilfe von Gl. (4.12) und Gl. (4.13) wird gewährleistet, daß $\boldsymbol{\epsilon}^u$ und $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ tatsächlich bzgl. derselben Basis formuliert werden. Dies ist unbedingt erforderlich, ansonsten besteht das Element den Patchtest nicht. Für die inkompatible Verzerrung erhält man somit:

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T. \quad (4.55)$$

$\boldsymbol{\alpha}$ besitzt die Dimension $[4 \times 1]$. Prinzipiell ist es auch denkbar, die Ansätze zunächst in den rein kovarianten Dyaden $\mathbf{G}_{\alpha 0}$ zu formulieren oder auch in einer gemischten Darstellung. Letztlich muß nur gewährleistet werden, daß die Ansätze mittels der $\bar{\mathbf{e}}_\alpha$ auf dieselben Basen bezogen werden, in denen die kompatiblen Dehnungen dargestellt sind. Parameterstudien ergaben, daß der Einfluß der Darstellung auf das Konvergenzverhalten gering ist. Exemplarisch kann die rein kontravariante Darstellung als die vorteilhafteste bezeichnet werden.

Q1E7-Element Ein weiterer Ansatz ist das siebenparametrische Q1E7-Element, das gegenüber Gl. (4.54) noch die vollständig bilinearen Terme für alle drei Membranverzerrungen miteinbezieht. Dieses Element führt nur bei stark tordierten Netzen zu signifikanter Verbesserung der Konvergenzeigenschaften. Daher ist der zusätzliche numerische Aufwand nur von Interesse, wenn sehr unregelmäßige, stark verzerrte Netze

berechnet werden sollen. Anstelle von Gl. (4.54) ergibt sich für das Q1E7-Element

$$\mathbf{M} = \frac{J_0}{J} \left[\begin{array}{c|c|c} \xi \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 & \eta \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^2 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 & \\ \xi \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 & \eta \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^2 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 & \dots \\ 2\xi \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 & 2\eta \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^2 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 & \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \left. \begin{array}{c} \xi \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \xi \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \xi (\bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) \end{array} \right| & \dots \\ \dots & \left. \begin{array}{c} \eta \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \eta \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \eta (\bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) \end{array} \right| & \dots \\ \dots & \left. \begin{array}{c} \xi \eta \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \xi \eta \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 \\ 2\xi \eta \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 \end{array} \right| & \left. \begin{array}{c} \xi \eta \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^2 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \xi \eta \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^2 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 \\ 2\xi \eta \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^2 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 \end{array} \right| & \dots \\ \dots & \left. \begin{array}{c} \xi \eta \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \xi \eta \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \xi \eta (\bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{G}_0^1 \mathbf{G}_0^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) \end{array} \right| & \end{array} \right] . \quad (4.56)$$

Entsprechend ergibt sich analog zu Gl. (4.55) für die inkompatiblen Verzerrungen:

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7)^T . \quad (4.57)$$

$\boldsymbol{\alpha}$ besitzt in diesem Fall die Dimension $[7 \times 1]$.

Lösungsstrategie		Ebene
1. Iterationsschritt $k + 1$		Element
Bekannt: \mathbf{a}^k		
(a) linear elastischer Fall	(b) nichtlinearer Fall	
$\mathbf{C} = \text{const.}$	$\mathbf{C} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon})$	
Berechne		
$\boldsymbol{\epsilon}^u$	$\boldsymbol{\epsilon}^u$	
$\mathbf{R}, \mathbf{L}, \mathbf{D}, \mathbf{D}^{-1}, \mathbf{K}_{(e+u)}^u, \mathbf{K}_g^u$		
Löse Gl. $\tilde{\mathbf{R}} = 0$		
\Rightarrow direkte Lösung	\Rightarrow iterative Lösung	
$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}$	$\boldsymbol{\alpha}_0 = 0$	
	$\mathbf{K}_n = \int \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M} dV$	
	Berechne \mathbf{K}_n^{-1}	
	$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n - \mathbf{K}_n^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_n$	
	Berechne $\boldsymbol{\alpha}_{,a}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \mathbf{C}$	
Berechne $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}$		
Berechne \mathbf{F}_e		
$\mathbf{F}_e^{k+1} = \mathbf{R} - \int \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{,a}^u dA$	$\mathbf{F}_e^{k+1} = \int \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{,a}^u dV$	
Berechne \mathbf{K}_e		
$\mathbf{K}_e^{k+1} = \mathbf{K}_e^u$	$\mathbf{K}_e^{k+1} = \int (\boldsymbol{\epsilon}_{,a}^u + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{,a})^T$	
$\quad - \boldsymbol{\alpha}_{,a} \cdot \int \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{,a}^u dA$	$\quad \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{,a}^u dV$	
$\quad - \boldsymbol{\alpha} \cdot \int \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{,aa}^u dA$	$\quad + \int \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{,aa}^u dV$	
2. Assemblierung		System
$\mathbf{F}_{sys}^{k+1} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \mathbf{F}_e^{k+1}$		
$\mathbf{K}_{sys}^{k+1} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \mathbf{K}_e^{k+1}$		
3. Lösung		System
$\Delta \mathbf{a} = -\mathbf{K}_{sys}^{-1} \mathbf{F}_{sys}$		
4. Update		System
$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{a}^k + \Delta \mathbf{a}$		
5. Konvergenzabfrage		System
if $\ \mathbf{R}_{sys}\ \leq \text{TOL}$ goto 6.		
if $\ \mathbf{R}_{sys}\ > \text{TOL}$ goto 1.		
6. Ende		System

Tabelle 4.1: EAS nach Kapitel 4.2.3

4.2.5 EAS in Anlehnung an die Literatur

Die von SIMO UND RIFAI (1990), WRIGGERS UND REESE (1996), KLINKEL UND WAGNER (1997) und auch BISCHOFF UND RAMM (1997) umgesetzte Variante des EAS-Gedankens weicht in wesentlichen Punkten von der hier erarbeiteten Vorgehensweise ab. Grundlage des Verfahrens bleibt nach wie vor die Gl. (4.32). Allerdings wird nun eine Linearisierung im Sinne einer TAYLOR Entwicklung des Funktionals in diskretisierter Form vorgenommen.

$$\delta\tilde{\Pi}_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \delta\tilde{\Pi}_i(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}) + \frac{\partial\delta\tilde{\Pi}_i(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}})}{\partial\mathbf{a}} \cdot \Delta\mathbf{a} + \frac{\partial\delta\tilde{\Pi}_i(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}})}{\partial\boldsymbol{\alpha}} \cdot \Delta\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad (4.58)$$

Hierbei gilt $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} + \Delta\mathbf{a}$ bzw. $\boldsymbol{\alpha} = \bar{\boldsymbol{\alpha}} + \Delta\boldsymbol{\alpha}$. Bezeichnet man die partiellen Ableitungen wieder mit $(\dots)_{,a}$ bzw. $(\dots)_{,\alpha}$ ergeben sich die partiellen Ableitungen als

$$\frac{\partial\delta\tilde{\Pi}_i}{\partial\mathbf{a}} = \delta\mathbf{a} \cdot \int (\boldsymbol{\epsilon}_{,aa}^{uT} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\epsilon}_{,a}^{uT} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,a}) dV + \delta\boldsymbol{\alpha} \cdot \int \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\alpha}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,a} dV, \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial\delta\tilde{\Pi}_i}{\partial\boldsymbol{\alpha}} = \delta\mathbf{a} \cdot \int \boldsymbol{\epsilon}_{,a}^{uT} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\alpha} dV + \delta\boldsymbol{\alpha} \cdot \int \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\alpha}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\alpha} dV. \quad (4.60)$$

Nun führt man einige Abkürzungen ein, die es ermöglichen, die Gl. (4.58) in ein lineares Gleichungssystem zu überführen⁶.

$$\mathbf{K}_{e+u} = \int \boldsymbol{\epsilon}_{,a}^{uT} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,a} dV \quad (4.61)$$

$$\mathbf{K}_g = \int \boldsymbol{\epsilon}_{,aa}^{uT} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} dV \quad (4.62)$$

$$\mathbf{L} = \int \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\alpha}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,a} dV \quad (4.63)$$

$$\mathbf{D} = \int \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\alpha}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\alpha} dV \quad (4.64)$$

Es haben sich in der Literatur folgende Bezeichnungen durchgesetzt: *elastic/initial displacement stiffness* \mathbf{K}_{e+u} , *geometric stiffness* \mathbf{K}_g , *coupling matrix* \mathbf{L} und *strain matrix* \mathbf{D} . Mit den in den Gln. (4.61) bis (4.64) definierten Abkürzungen, den in Gl. (4.34) vereinbarten Abkürzungen \mathbf{R} und $\tilde{\mathbf{R}}$ und der Abkürzung \mathbf{P}^* , welche die Arbeit äußerer Lasten am Element einbezieht, ergibt sich aus Gl. (4.58) das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{e+u} + \mathbf{K}_g) & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{a} \\ \Delta\boldsymbol{\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^* \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \tilde{\mathbf{R}} \end{Bmatrix}. \quad (4.65)$$

⁶Wie bereits in Abschnitt 4.2.3 wird die für den Direktor der Referenzkonfiguration reservierte Bezeichnung \mathbf{D} in Abschnitt 4.2.5 für die Matrix \mathbf{D} verwendet.

Lösungsstrategie	Ebene
1. Iterationsschritt $k + 1$ Bekannt: $\mathbf{a}^k, \boldsymbol{\alpha}^k$ Berechne $\mathbf{R}, \tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{L}, \mathbf{D}, \mathbf{D}^{-1}, \mathbf{K}_{(e+u)}, \mathbf{K}_g$ Korrigiere \mathbf{F}_e $\mathbf{F}_e^{k+1} = \mathbf{R} - \mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{P}^*$ Korrigiere \mathbf{K}_e $\mathbf{K}_e^{k+1} = \mathbf{K}_{(e+u)} + \mathbf{K}_g - \mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}$	Element
2. Assemblierung $\mathbf{F}_{sys}^{k+1} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \mathbf{F}_e^{k+1}$ $\mathbf{K}_{sys}^{k+1} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \mathbf{K}_e^{k+1}$	System
3. Lösung $\Delta \mathbf{a} = -\mathbf{K}_{sys}^{-1} \mathbf{F}_{sys}$	System
4. Inkremente $\Delta \boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{L} \Delta \mathbf{a}_e + \tilde{\mathbf{R}} \right)$	Element
5. Update der Variablen $\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{a}^k + \Delta \mathbf{a}$ $\boldsymbol{\alpha}^{k+1} = \boldsymbol{\alpha}^k + \Delta \boldsymbol{\alpha}$	System
6. Konvergenzabfrage if $\ \mathbf{R}_{sys}\ \leq \text{TOL}$ goto 6. if $\ \mathbf{R}_{sys}\ > \text{TOL}$ goto 1.	System
7. Ende	System

Tabelle 4.2: EAS nach BISCHOFF UND RAMM (1997)

Das Gleichungssystem kann nicht auf Elementebene gelöst werden, da \mathbf{P}^* auf Elementebene nur in Sonderfällen ermittelbar ist. Es dient auch lediglich zur Elimination bzw. Kondensation der $\Delta \boldsymbol{\alpha}$ und gerade nicht zur direkten Berechnung der $\boldsymbol{\alpha}$. Da die äußeren Lasten an den EAS-Freiwerten keine Arbeit leisten, was durch die 0 in der zweiten Zeile des Gleichungssystems unter \mathbf{P}^* zum Ausdruck kommt, kann Gl. (4.65) nach den Inkrementen $\Delta \boldsymbol{\alpha}$ aufgelöst und somit die korrigierte Steifigkeitsmatrix des Elementes angegeben werden:

$$\Delta \boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \left(\tilde{\mathbf{R}} + \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{a} \right), \quad (4.66)$$

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_{(e+u)} + \mathbf{K}_g - \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{L}. \quad (4.67)$$

An Gl. (4.66) erkennt man, daß bei dieser Vorgehensweise die Freiwerte α global gespeichert werden müssen. Auf Elementebene werden Inkremente $\Delta\alpha$ kondensiert und zur Korrektur der Elementsteifigkeitsmatrix herangezogen. Insbesondere ist anzumerken, daß im Hinblick auf die numerische Umsetzung bei der in der Literatur vorgeschlagenen EAS-Variante α den Charakter einer unabhängigen Variablen behält, während in der in Abschnitt 4.2.3 vorgeschlagenen Variante α durch die numerische Ermittlung zur abhängigen Variablen wird und für die konsistente Linearisierung demzufolge auch Einflüsse der Direktoren auf die EAS-Freiwerte möglich werden. Dies ist bei der Literaturvariante nur dann gegeben, wenn man diese in der Matrix L berücksichtigt.

4.2.6 Vergleich der Varianten

Der wesentliche Unterschied der beiden Vorgehensweisen besteht in der Art und Weise, in der die konsistente Linearisierung vollzogen wird. Während bei der hier vorgeschlagenen Vorgehensweise in der Diskretisierung die Freiwerte α wieder zu abhängigen Freiwerten werden, behalten sie in der Literatur ihren Status unabhängiger Variabler. Dies hat zur Folge, daß sich bei der Variante nach Abschnitt 4.2.3 im Falle nichtlinearen Materialverhaltens bei der Bildung der Ableitung $\alpha_{,a}$ auch ein Einfluß der Direktoren auf die EAS-Terme ergibt. Ob in der Literatur die Direktoren und die EAS-Freiwerte gekoppelt sind, hängt davon ab, ob deren Einfluß auf die Matrix L bei der Programmierung berücksichtigt wurde oder nicht. Wesentliche Unterschiede der Varianten sind in Tabelle 4.3 zusammengefaßt. In punkto Effizienz ist die Methode nach Kapitel 4.2.3 für den Fall linear elastischen Materialverhaltens der Methode nach BISCHOFF UND RAMM (1997) überlegen, da die α_p sofort auf Elementebene ermittelt werden können durch die Lösung eines linearen Gleichungssystems. Hierzu ist lediglich die Inversion einer 4x4-Matrix (Q1E4) oder einer 7x7-Matrix (Q1E7) vonnöten. Im Fall nichtlinearer Stoffgesetze gilt es abzuwägen, ob die Entkoppelung der α_p von der Ebene des globalen Gleichungssystems um den Preis der zusätzlichen Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems auf Elementebene erstrebenswert ist.

EAS nach Kapitel 4.2.3	EAS nach BISCHOFF UND RAMM (1997)
$\alpha = \alpha(\mathbf{a}_e)$	α unabhängige Variable
$\tilde{\mathbf{R}} = 0$	$\tilde{\mathbf{R}} \neq 0$ als Korrektor
ggf. Iteration auf Elementebene	keine Iteration im Element
α wird explizit ermittelt	$\Delta\alpha$ wird ermittelt
Systemebene entkoppelt von α	Systemebene gekoppelt mit $\Delta\alpha$
totales Differential $d\hat{\sigma}$ nötig	nur $\hat{\sigma}_{,a}$ benötigt

Tabelle 4.3: EAS im Vergleich

4.2.7 Stabilitätsprobleme bei EAS

Auch wenn die EAS-Methode ein sehr leistungsfähiges Werkzeug zur Verbesserung der Effizienz Finiter Elemente darstellt, gibt es Bereiche, in denen ihr Einsatz besonders vorsichtig erfolgen sollte. Bereits REESE (1994), WRIGGERS UND REESE (1996) und auch CRISFIELD ET AL. (1995) weisen darauf hin, daß im nichtlinearen Bereich bei großen Kompressionen unphysikalische Instabilitäten auftreten können. Diese Effekte wurden u.a. von ARMERO (2000), KORELC UND WRIGGERS (1996), BRAESS (1998), WALL, BISCHOFF & RAMM (2000), HARNAU UND SCHWEIZERHOF (2002) diskutiert. Allerdings wurden in den bis zum Jahre 2000 vorliegenden Arbeiten diese unphysikalischen Instabilitäten nur für EAS-Elemente nachgewiesen, die auf einem erweiterten Verschiebungs- oder Deformationsgradienten $\tilde{\mathbf{H}}$ oder $\tilde{\mathbf{F}}$ basieren. In einer systematischen Untersuchung soll zunächst geklärt werden, ob die beobachteten Phänomene auch auf die EAS-Variante $\tilde{\mathbf{E}}$ zutreffen.

4.2.8 Stabilitätsanalyse

Im Sinne der Statik läßt sich der Zustand eines mechanischen Systems als *stabil* bezeichnen, wenn folgendes gilt: Befindet sich das System in einer Gleichgewichtslage und erfährt eine Störung, so kehrt es nach dem Entfernen dieser Störung in seine *alte* Gleichgewichtslage zurück. Ist hingegen der neue Zustand, in den das System durch die Störung versetzt wurde, ebenfalls eine Gleichgewichtslage, so nennt man diesen Zustand des Systems *indifferent*. Identifiziert man das System mit der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e eines Finiten Elementes, so läßt sich dessen Stabilität z.B. anhand einer CHOLESKY Zerlegung von \mathbf{K}_e prüfen. Interessiert man sich jedoch für Moden, so liegt es nahe, die Stabilität in Verbindung mit einer Analyse des Eigenverhaltens von \mathbf{K}_e zu überprüfen. Hierzu wird das sog. Eigenwertproblem in der Form

$$\mathbf{K}_e \cdot \mathbf{e} = \tau \mathbf{e} \quad (4.68)$$

oder in der Form

$$(\mathbf{K}_e - \tau \mathbf{1}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (4.69)$$

gelöst. Für negative Eigenwerte τ ist das durch die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e beschriebene System instabil, d.h. es erreicht seine Stabilitätsgrenze für den Wert $\tau = 0$. Aus mechanischer Sicht läßt sich dies wie folgt deuten: Es existiert ein Verschiebungszustand \mathbf{e} , der keine Formänderungsenergie im Element speichert und gleichzeitig keinen Starrkörperverschiebungszustand darstellt, vorausgesetzt, das Element ist statisch bestimmt gelagert. Im Sinne einer Finite-Elemente-Formulierung sind physikalisch bedingte Stabilitätsfälle (instabiles Materialverhalten, strukturelle Instabilität infolge Knicken, Beulen, Kippen o.ä.) oder aber auch unphysikalische Stabilitätsfälle denkbar. Von M. MÜLLER (2002) wurde systematisch das Stabilitätsverhalten des Q1E4-Elementes untersucht. Zunächst ist dabei ein geeignetes Modell zu wählen. Am

effizientesten wäre es, das Stabilitätsverhalten anhand eines nicht gelagerten Elementes zu untersuchen. Dies führt jedoch zu Widersprüchen: Physikalisch plausibel ist es, die Eigenvektoren aufzuspalten in die Anteile Translation, Rotation und in einen Rest. Findet man für einen Eigenwert $\tau = 0$ einen solchen Rest des zugehörigen Eigenvektors \mathbf{e} , hat man eine Instabilitätsmode gefunden. Für nichtlineare Betrachtungen, d.h. verformte Konfigurationen, ist diese Zerlegung in Translation, Rotation und Rest im Falle des Eigenwertes null nicht mehr eindeutig möglich. Das ehemals

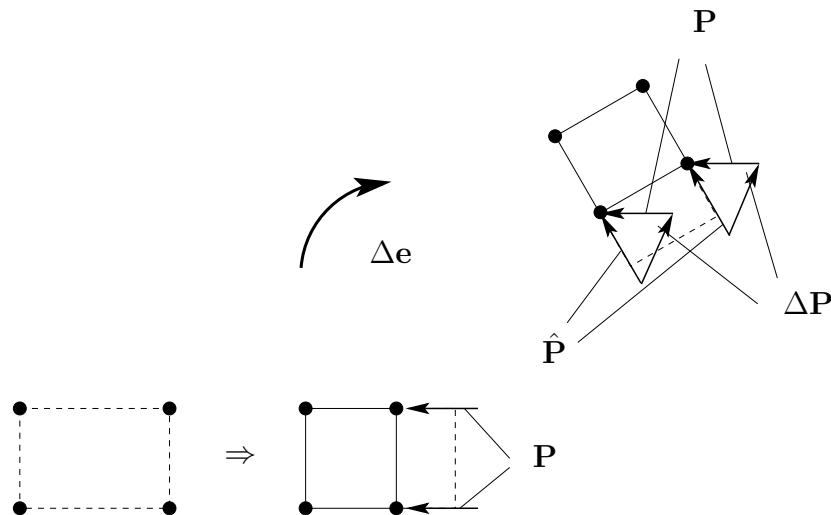


Abbildung 4.2: Verzerrtes Element unter *infinitesimaler* Starrkörperrotation

rechteckige Scheibenelement in Abb. (4.2) wird durch zwei Knotenkräfte zum Quadrat gestaucht. Der deformierte Zustand wird *eingefroren* und es wird eine infinitesimale Starrkörperrotation $\Delta\mathbf{e}$ überlagert. $\hat{\mathbf{P}}$ bezeichnet die *eingefrorene* Last \mathbf{P} nach der Starrkörperdrehung. Wäre nun der zugehörige Eigenwert gleich null, gälte infolge Gl. (4.68) $\mathbf{K}_e \cdot \Delta\mathbf{e} = \tau\Delta\mathbf{e} = 0$. Andererseits ist aus physikalischen Gründen $\mathbf{K}_e \cdot \Delta\mathbf{e} = \Delta\mathbf{P}$. Gemäß Abb. (4.2) muß aber $\Delta\mathbf{P} \neq 0$ sein, da die Belastung des Elementes ansonsten keine Starrkörperbewegung vollführte. D.h. der Belastungszustand änderte sich, womit die Annahme des *eingefrorenen* Zustandes verletzt wäre. Demzufolge gehört der Eigenwert $\tau = 0$ nur im Fall der Theorie I. Ordnung, d.h. für $\mathbf{P} = 0$, zur Starrkörperrotation $\Delta\mathbf{e}$. Um diesen Schwierigkeiten der eindeutigen Identifikation von Instabilitätsmoden im nichtlinearen Bereich aus dem Wege zu gehen, wurde für die von M. MÜLLER (2002) durchgeführten Analysen ein einzelnes, statisch und kinematisch bestimmt gelagertes Element gewählt.

Einachsige Kompression mit ST. VENANT-KIRCHHOFF Material In Abb. (4.3) ist das gelagerte Element skizziert. Das Element wurde als Scheibe in Kombination mit dem ST. VENANT-KIRCHHOFF Materialgesetz untersucht, da nur die Verschiebungen

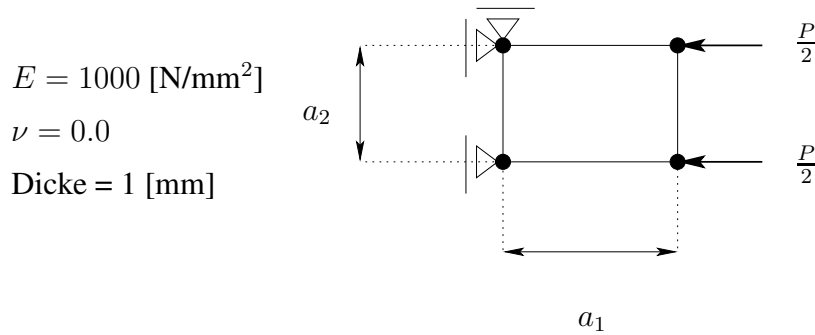


Abbildung 4.3: Q1E4-Element als Scheibe

in der Ebene berücksichtigt wurden. Dabei wurde das Längenverhältnis variiert zwischen $0, 1 \dots 10$ gemäß Abb. (4.4).

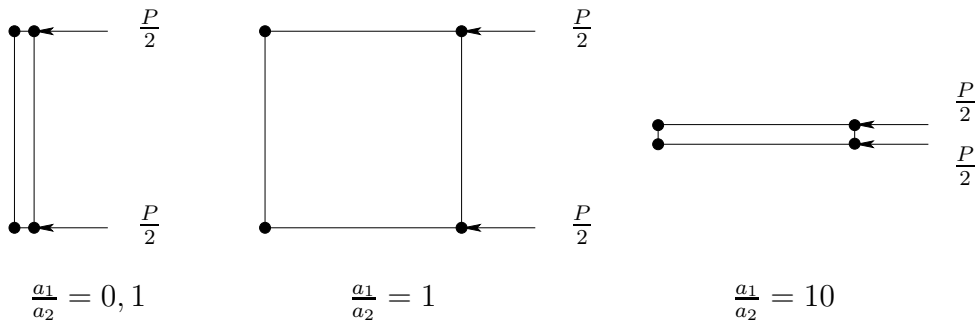


Abbildung 4.4: Längenverhältnisse

In Abb. (4.5) sind die Ergebnisse der "Versuche" für einachsige Kompression bei Laststeigerungen dargestellt. Man liest Abb. (4.5) von rechts nach links: Bei $P = P_{kr}$ knickt die balkenartige Scheibe mit $\frac{a_1}{a_2} = 10$ aus bei $e = \frac{\ell}{L} = 0.9979$. Nun vermindert man das Verhältnis $\frac{a_1}{a_2}$ (d.h. der balkenartige Charakter geht mehr und mehr verloren), läßt die äußere Last aber bei $P = P_{kr}$. Demgemäß knickt die Scheibe noch nicht, sondern verkürzt sich zunächst elastisch ohne instabil zu werden. Für die Lagerung der Scheibe gemäß Abb. (4.3) ergibt sich die kritische Knicklast gemäß der Balkentheorie

$$P_{kr} = \frac{\pi^2}{4a_1^2} EI . \quad (4.70)$$

Damit erhält man den Verlauf

$$\frac{\ell}{L} =: e \left(\frac{a_1}{a_2} \right) = 1 - 0.2056 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \quad (4.71)$$

als „EULER“ Kurve für Abb. (4.5). Entsprechend fällt die durchgezogene Linie des

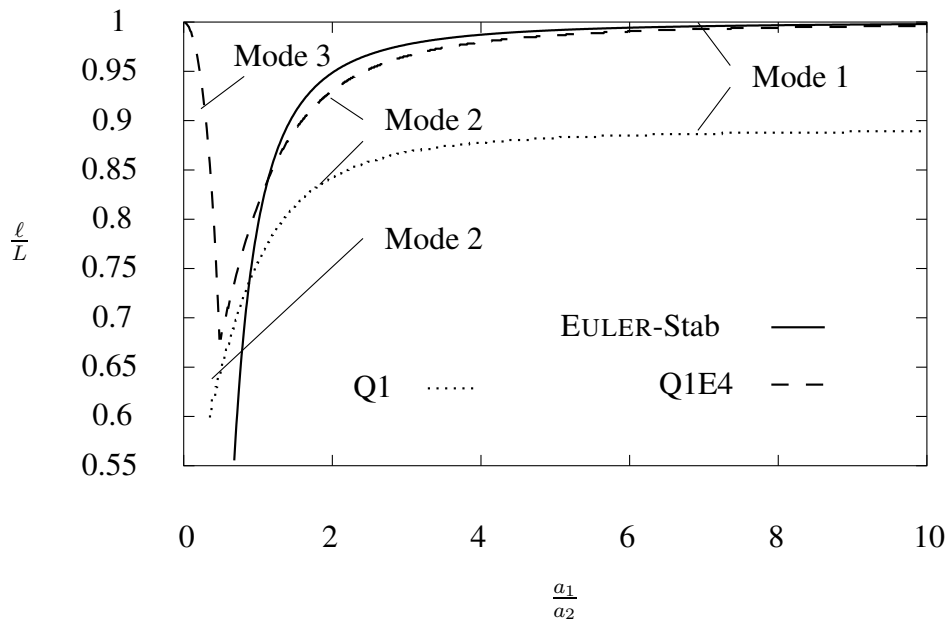


Abbildung 4.5: Längenverhältnisse (ST. VENANT-KIRCHHOFF)

EULER-Knickens zunächst mit abnehmendem $\frac{a_1}{a_2}$ und wird dann asymptotisch⁷. Die gestrichelte und die gepunktete Kurve beschreiben das Verhalten der Finiten Elemente. Verfolgt wird jeweils der kleinste Eigenwert. Das Q1-Element beginnt infolge des starken ebenen Schublockings nicht bei $\frac{\ell}{L} = 1$, sondern bei starker Stauchung ($\frac{\ell}{L} = 0,88$). Mit geringer werdendem Verhältnis $\frac{a_1}{a_2}$ wechselt dann der zugehörige Eigenvektor von Mode 1 auf Mode 2. Die Moden sind in Abb. (4.6) dargestellt.

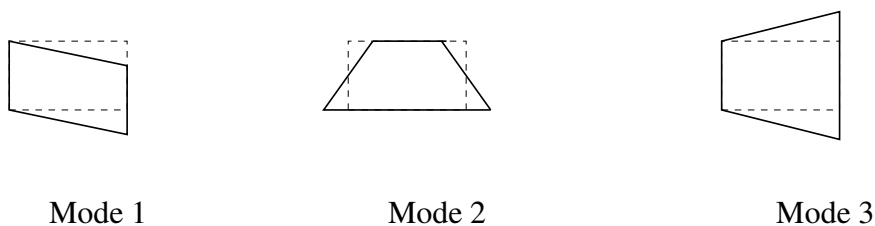


Abbildung 4.6: Moden des Q1E4-Elementes

Das Q1E4-Element hingegen gibt das Knicken der balkenartigen Scheibe wieder. Bis zu einer Stauchung $e = 0,68$ bei zugehörigem Längenverhältnis $\frac{a_1}{a_2} = 0,5$ ist das Stabilitätsversagen physikalisch bedingt. Verkürzt man die Scheibe hingegen noch stärker, so beobachtet man, daß für $\frac{a_1}{a_2} \rightarrow 0$ das Element mit Mode 3 praktisch schon unter

⁷Bei nicht mehr balkenartigen Abmessungen ist der quantitative Wert der EULER-Kurve natürlich nicht aussagefähig. Die Kurve dient nur qualitativ zum Vergleich für geringere Schlankheitsgrade.

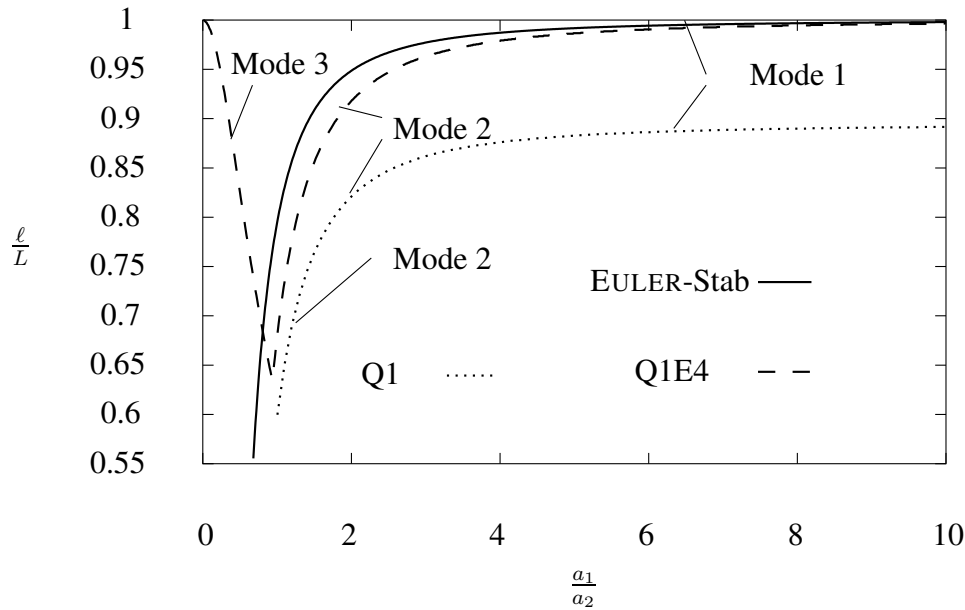


Abbildung 4.7: Längenverhältnisse (NEO-HOOKE)

der Last $P = 0$ instabil wird. Diese Instabilität ist unphysikalisch und stellt die zitierte Schwäche des EAS-Konzeptes dar, die damit auch für das EAS-Konzept auf Basis der GREEN-LAGRANGE Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ nachgewiesen ist.

Einachsige Kompression mit NEO-HOOKE Material Für die Untersuchungen des Lastfalls nach Abb. (4.3) wurde die Berechnung nicht mehr als die einer Scheibe, sondern als die einer Platte durchgeführt. Das bedeutet, die Drehfreiwerte und die transversale Verschiebung wurden nicht behindert. Natürlich wäre auch die Rechnung für eine Scheibe möglich, aber die Nichtlinearität des Stoffgesetzes bedingt, daß die Ableitung der Verzerrungen nach den Drehfreiwerten für die Elementsteifigkeitsmatrix gemäß Gl. (4.53) auch durch die EAS-Freiwerte beeinflusst wird. Hierfür ist der Term $\tilde{\epsilon}_{,a}$ verantwortlich, der die Ableitung $\frac{\partial \alpha_k}{\partial d_{jn}}$ beinhaltet. Somit wird die Biegesteifigkeit des Elements beeinflusst, und es wäre prinzipiell auch denkbar, daß zusätzliche unphysikalische Instabilitäten in Erscheinung träten. Das Verhalten des Elementes bei NEO-HOOKE-Formulierung ist vergleichbar bzw. qualitativ gleichwertig dem des ST. VENANT-KIRCHHOFF Stoffes. Das NEO-HOOKE Element erträgt gegenüber der ST. VENANT KIRCHHOFF-Variante geringfügig größere Stauchungen $e = 0.635$, die allerdings bereits bei einem höheren Schlankheitsgrad auftreten ($\frac{a_1}{a_2} = 0.95$).

Vergleich mit der Literatur Bei WRIGGERS UND REESE (1996) wird ein Kompressionsversuch gemäß Abb. (4.3) durchgeführt. Dabei ist eine quadratische Scheibe der Abmessung $a_1 = a_2 = 2$ [mm] gewählt, die Materialparameter ergeben sich

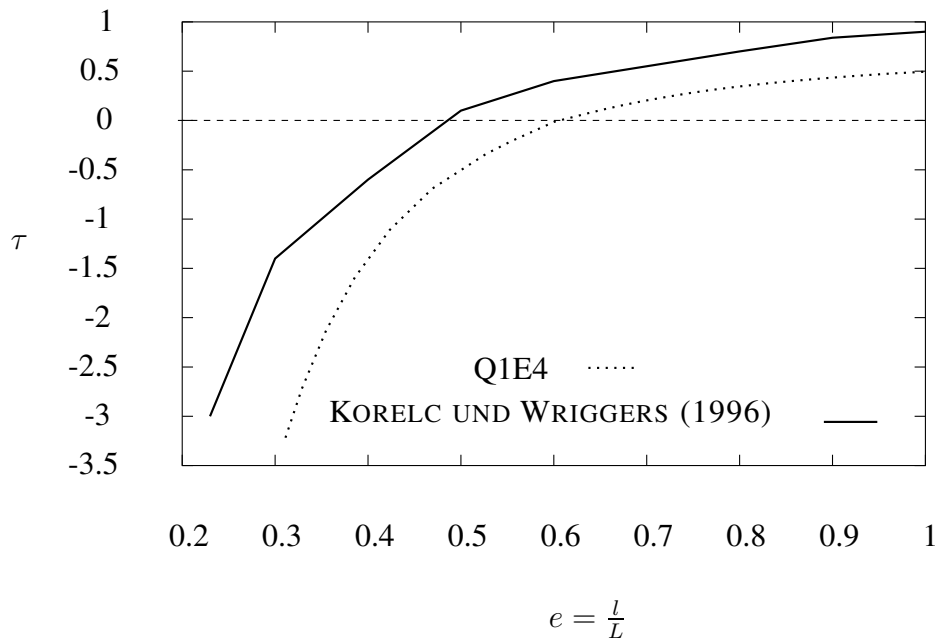


Abbildung 4.8: Eigenwerte im Vergleich

zu $E = 59.996 \text{ [N/mm}^2\text{]}$ und $\nu = 0.499$. Die Vergleichbarkeit ist insofern eingeschränkt, als WRIGGERS UND REESE (1996) den ebenen Verzerrungszustand untersuchen und nicht den ebenen Spannungszustand. Die Kurven bei WRIGGERS UND REESE (1996) sind leider nicht hinreichend parametrisiert. Daher wird nur der Wert des erstmaligen Auftretens der unphysikalischen Instabilität verglichen. Für die gegebenen Daten ermittelt das präsentierte Q1E4-Element eine kritische Stauchung von $e = 0.63$ (NEO-HOOKE Material), wohingegen von WRIGGERS UND REESE (1996) der Wert $e = 0.61$ angegeben wird. Diese geringe Abweichung von etwa 3% bestätigt die vorliegenden Ergebnisse. Auch im direkten Vergleich zu KORELC UND WRIGGERS (1996) ergeben sich nur geringfügige Abweichungen. Der in Abb. (4.3) skizzierte Versuch wird wiederholt mit dem NEO-HOOKE Stoff. Als Materialparameter sind $E = 2.5 \text{ [N/mm}^2\text{]}$ und $\nu = 0.25$ gewählt. Der Unterschied zwischen der Variante nach KORELC UND WRIGGERS (1996) besteht wiederum darin, daß anstatt des dort benutzten ebenen Verzerrungszustandes der ebene Spannungszustand angenommen wird. Weiterhin wenden KORELC UND WRIGGERS (1996) das EAS-Konzept auf den Verschiebungsgradienten an, arbeiten also mit $\tilde{\mathbf{H}}$ bzw. $\tilde{\mathbf{F}}$ statt mit $\tilde{\mathbf{E}}$.

4.2.9 Biegeverzerrung

Aus der Zerlegung der GREENSchen Verzerrungen nach Gl. (2.8) in

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2^0 + \zeta \mathbf{E}_2^1 \quad (4.72)$$

folgte nach Gl. (2.11) die Ermittlung der Biegeverzerrungen im Schalenkontinuum zu

$$\mathbf{E}_2^1 = \frac{1}{2} (\nabla_2 \circ \mathbf{r} \cdot (\mathbf{d} \circ \nabla_2 + \mathbf{r} \circ \nabla_2 \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla_2 \circ \mathbf{r} + \nabla_2 \circ \mathbf{d}) \cdot \mathbf{r} \circ \nabla_2).$$

Da für die Mittelfläche bereits eine Diskretisierung eingeführt ist, müßte lediglich für \mathbf{d} noch eine Diskretisierung vorgenommen werden. Eine direkte Interpolation des Direktorfeldes wurde z.B. von BETSCH (1996) oder DOLL (1998) ausführlich diskutiert. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein anderer Weg beschritten. Anstatt über die Interpolation der Direktoren bzw. Drehfreiheitsgrade durch Differentiation zu Verzerrungen zu gelangen, werden vielmehr die Verzerrungen selbst interpoliert. Die Vorgehensweise ähnelt somit in der Idee der von HUGHES UND TEZDUYAR (1981) und DVORKIN UND BATHE (1984) erstmals vorgeschlagenen ANS-Methode, auch wenn diese die Behandlung des Querschubes zum Gegenstand hat. An *sampling points* werden Verzerrungen ermittelt, die dann als Stützwerte für die Interpolation im Feld dienen. Dies geschieht mit Hilfe der in den Knoten ermittelbaren Neigungen γ_n , die dann unter Einbeziehung des DKT-Konzeptes [siehe BATOZ, BATHE & HO (1980) oder BATHE, DVORKIN & HO (1983)] unmittelbar zur Interpolation der Biegeverzerrungen im Element führen. Bevor dieses Konzept detailliert beschrieben wird, wird allerdings zuerst die Kinematik der Drehfreiheitsgrade beschrieben.

4.2.10 Beschreibung endlicher Drehungen

Die Beschreibung räumlicher Drehungen kann auf verschiedene Arten erfolgen. Üblicherweise werden hierfür algebraische Modelle gebraucht (PAULI Matrizen) oder es werden Beschreibungen verwendet, die Elementardrehungen bzw. quasi-ebene Drehungen um eine variable Achse benutzen. Allgemeine Überlegungen zu diesen Themen finden sich beispielsweise bei SYNGE (1960) oder ARGYRIS (1982). BRANK UND IBRAHIMBEGOVIC (2001) oder BÜCHTER (1992) hingegen nehmen in ihren Arbeiten unmittelbar Bezug auf die Drehkinematik von Schalen bzw. deren numerische Umsetzung. Im folgenden soll kurz angedeutet werden, auf welchem Weg man zur Formulierung des Drehtensors nach RODRIGUES gelangt, da diese Darstellung vielfach verwendet wird (DVORKIN UND BATHE (1984), EBERLEIN UND WRIGGERS (1999), BETSCH, MENZEL & STEIN (1998) et al.). Der Satz von RODRIGUES besagt, daß sich jede räumliche Drehung auf eine ebene (Eigen-)Drehung um eine variable (Eigen-)Achse reduzieren läßt. Zunächst betrachtet man eine ebene Drehung um eine raumfeste Achse nach Abb. (4.9).

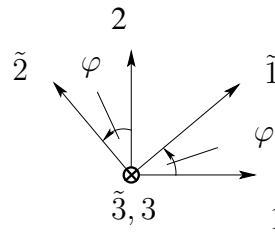


Abbildung 4.9: Ebene Drehung

Hierbei wird mit

$$\mathbf{Q} = \mathbf{e}_k \circ \tilde{\mathbf{e}}_k \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{Q} \quad (4.73)$$

die Abbildung der raumfesten Basis \mathbf{e}_k auf die um den Winkel φ gedrehte Basis $\tilde{\mathbf{e}}_k$ vermittelt. Es ergibt sich für die Koordinatenmatrix von \mathbf{Q} die Darstellung

$$Q_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.74)$$

Führt man Gl. (4.73) auf die raumfeste Basis \mathbf{e}_k zurück, erhält man die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 \sin \varphi - \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1 \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_2 \cos \varphi + \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_3 \\ &= \cos \varphi (\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_3 \\ &\quad - \sin \varphi (\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3) \\ &= \cos \varphi (\mathbf{1} - \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_3 - \sin \varphi (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{1}). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Von der Eigenschaft, daß \mathbf{e}_3 die Achse einer raumfesten Orthonormalbasis ist, wurde nur insofern Gebrauch gemacht, als sie durch \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 zu dieser Orthonormalbasis ergänzt wird und demzufolge die Orthogonalitätsbeziehungen $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$ gelten. Durch Betrachtung des Eigenwertproblems von \mathbf{Q} läßt sich zeigen, daß Gl. (4.75) auch für beliebige räumliche Drehungen gilt, wenn $\mathbf{e} := \mathbf{e}_3$ eine variable Achse ist. Man führt den sog. RODRIGUES Vektor $\boldsymbol{\varphi} := \varphi \mathbf{e}$ ein und erhält somit für Gl. (4.75) die Darstellung

$$\mathbf{Q} = \cos \varphi \mathbf{1} + \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\varphi} \frac{(1 - \cos \varphi)}{\varphi^2} - \frac{\sin \varphi}{\varphi} (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{1}). \quad (4.76)$$

Führt man den Versor anstelle von Gl. (4.73) durch skalare Multiplikation von links ein, erhalte man anstelle von Gl. (4.76) die auch von WRIGGERS (2001) und BELYTSCHKO, LIU & MORAN (2000) angegebene Form

$$\mathbf{Q} = \cos \varphi \mathbf{1} + \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\varphi} \frac{(1 - \cos \varphi)}{\varphi^2} + \frac{\sin \varphi}{\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (4.77)$$

wobei mit $\hat{\varphi} = \varphi \times \mathbf{1}$ eine gebräuchliche Abkürzung für schiefsymmetrische Tensoren eingeführt worden ist. Äquivalente Darstellungen sind

$$\mathbf{Q} = \cos \varphi \mathbf{1} + \mathbf{e} \circ \mathbf{e} (1 - \cos \varphi) + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}} \quad (4.78)$$

oder auch

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} + \frac{\sin \varphi}{\varphi} \hat{\varphi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{2}\varphi} \right)^2 \hat{\varphi}^2, \quad (4.79)$$

was sich unter Ausnutzung der Identitäten $2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) = 1 - \cos \varphi$ bzw. $\hat{\varphi}^2 = \varphi \circ \varphi - \varphi^2 \mathbf{1}$ ergibt. Läßt man die bei materiebehafteten Körpern nicht auftretenden Drehspiegelungen außer acht, d.h. beschränkt man sich auf eigentlich orthogonale Transformationen, so hat der Drehtensor \mathbf{Q} folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{Q}) &= 1 \\ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T &= \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Die Eigenwerte von \mathbf{Q} ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 \\ \mu_{2,3} &= e^{\pm j\varphi}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

d.h. sie liegen alle drei auf dem Einheitskreis der komplexen Zahlenebene. Der Winkel φ bedeutet den Eigendrehwinkel der vermittelten Rotation im Falle der Drehung um eine raumfeste Achse. Wenn die Achse variabel ist, versagt diese geometrische Interpretation. Offensichtlich sind die Dreheigenschaften des orthogonalen Tensors \mathbf{Q} nicht notwendigerweise auf die Transformationen von Basisvektoren beschränkt. Vielmehr steht mit \mathbf{Q} ein Werkzeug zur Verfügung, vermöge dessen Orthogonaltransformationen beliebiger tensor- oder vektorwertiger Größen beschrieben werden können.

Eine weitere Darstellung des Vektors \mathbf{Q} kann mittels des sog. EULER Vektors $\boldsymbol{\rho}$ angegeben werden - siehe SYNGE (1960). Dafür gilt:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_r + \rho_4 \mathbf{e}_4, \quad (4.82)$$

$$\boldsymbol{\rho}_r := \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{e}, \quad (4.83)$$

$$\rho_4 := \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (4.84)$$

$$1 = \boldsymbol{\rho}_r \cdot \boldsymbol{\rho}_r + \rho_4^2. \quad (4.85)$$

Hierbei ist $\boldsymbol{\rho}$ ein vierdimensionaler Vektor, der infolge der Normierungsnebenbedingung Gl. (4.85) nur drei Freiwerte besitzt und somit weiterhin eine dreidimensionale Rotation beschreibt. Diese Einführung ist zweckmäßig, um die starke Nichtlinearität der Gl. (4.75) infolge der trigonometrischen Funktionen auf eine polynomiale Nichtlinearität zu reduzieren. Zusätzlich kann die Nebenbedingung als Korrekturmöglichkeit

gebraucht werden kann, falls ρ iterativ ermittelt wird. Wird im k -ten Rechenschritt ermittelt $\rho^k \cdot \rho^{(k)} = (N^k)^2 \neq 1$, korrigiert man entsprechend $\rho^{k+1} = \frac{\rho^{(k)}}{N^k}$ für den nächsten Schritt. Anstelle von Gl. (4.76) erhält man die Darstellung

$$\mathbf{Q} = 2\rho_r \rho_r + \mathbf{1} (1 - 2\rho_r \cdot \rho_r) - 2\rho_4 (\rho_r \times \mathbf{1}). \quad (4.86)$$

Gegenüber Gl. (4.76) enthält die Darstellung des Drehtensors gemäß Gl. (4.86) die Winkelfunktionen nicht mehr explizit. In der Literatur wird für die Parameter $\rho_i (i = 1, 2, 3, 4)$ auch der Begriff Quaternionenkomponenten oder EULER Parameter verwendet.

Die durch den Drehtensor \mathbf{Q} vermittelte räumliche Drehung erfolgt gemäß Gl. (4.76) um die Achse \mathbf{e} mit dem Betrag φ . Diese Darstellung wird von vielen Autoren verwendet, z.B. von SIMO UND FOX (1989), BETSCH, MENZEL & STEIN (1998) und EBERLEIN UND WRIGGERS (1999). Im Anhang G wird die numerische Umsetzung kurz erläutert. In der hier vorgestellten Formulierung wird die RODRIGUES-Darstellung der Direktoren jedoch nicht verwendet, da auf die Interpolation des Direktorfeldes zugunsten der direkten Interpolation von Verzerrungen verzichtet wird.

4.2.11 Einsdirektorkinematik

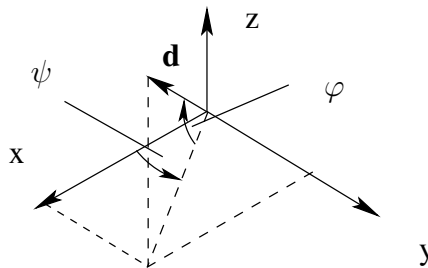


Abbildung 4.10: Direktorparametrisierung

Wie in Abb. (4.10) skizziert, werden zwei Winkel benutzt, um die Einheitsdirektoren \mathbf{d}_n in den Knoten n zu beschreiben (im folgenden wird der Index n der Übersichtlichkeit halber fortgelassen). Den Kugelkoordinaten auf der Erdoberfläche entsprechend bedeutet φ den Breitengrad und ψ den Längengrad. Im globalkartesischen Koordinatensystem lauten die Direktoren in der Referenzkonfiguration (Index 0)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & \cos \psi_0 \\ \cos \varphi_0 & \sin \psi_0 \\ \sin \varphi_0 & \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sqrt{D_i D_i} = 1 \quad (4.87)$$

und in der aktuellen Lage

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi \\ \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sqrt{d_i d_i} = 1. \quad (4.88)$$

Diese Darstellung ist eindeutig [$\mathbf{d}(\varphi = 0, \psi = 0) = \mathbf{e}_3$]. Für die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten sind die Ableitungen der Verzerrungen nach den Knotenfreiwerten zu berechnen. Unglücklicherweise ist die Ableitung $\mathbf{d},_{\varphi}$ singular in den Polen $\varphi = \pm\pi/2$. Um eine rechnerisch praktikable Lösung zu ermöglichen, wird häufig die RODRIGUES Darstellung benutzt - siehe Abschnitt 4.2.10. An dieser Stelle wird eine andere Technik benutzt: Jeder Knotendirektor \mathbf{d} wird durch zwei Winkel ξ und η in einer gedrehten Orthonormalbasis $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ parametrisiert. Diese Basis wird nach jedem Lastschritt k in der Berechnung derart transformiert, daß der Winkel ξ am Beginn jedes Lastschrittes gleich null ist. Anschaulich heißt dies: Die Äquatorebene der Kugelkoordinaten wird in jedem Lastschritt zu Beginn auf den jeweiligen Direktor gedreht - siehe ROTT (2003). Damit werden Singularitäten vermieden, solange der Winkel ξ während eines Lastschrittes kleiner als $\pi/2$ bleibt. Die zugehörigen Formeln zur Ermittlung der gedrehten Basis $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ mit den Winkeln des Lastschrittes φ^k und ψ^k lauten

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi^k + \cos \varphi^k \cos^2 \psi^k \\ \sin \psi^k \cos \psi^k (\cos \varphi^k - 1) \\ \sin \varphi^k \cos \psi^k \end{pmatrix}, \quad (4.89)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} \sin \psi^k \cos \psi^k (\cos \varphi^k - 1) \\ \cos^2 \psi^k + \cos \varphi^k \sin^2 \varphi^k \\ \sin \psi^k \cos \varphi^k \end{pmatrix}, \quad (4.90)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi^k \cos \psi^k \\ -\sin \varphi^k \sin \psi^k \\ \cos \varphi^k \end{pmatrix}, \quad (4.91)$$

$$\mathbf{d} = \cos \xi (\cos \eta \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \eta \hat{\mathbf{e}}_2) + \sin \xi \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (4.92)$$

Zu Beginn des Lastschrittes ist der Breitengrad im transformierten System $\hat{\mathbf{e}}_i$ der Äquator ($\xi = 0$), und die transformierte Länge η nimmt den Wert ψ^k an. Am Ende eines Lastschrittes erfolgt die Rücktransformation auf die Größen (φ, ψ) des globalkartesischen Koordinatensystems gemäß Gl. (4.88):

$$\sin \varphi^{k+1} = d_3 \quad \text{und} \quad \tan \psi^{k+1} = \frac{d_2}{d_1}. \quad (4.93)$$

Eine ausführliche Darstellung der Transformation zwischen den Basissystemen ist im Anhang F gegeben.

4.2.12 Discrete KIRCHHOFF Theory (DKT)

Infolge der unterschiedlichen geometrischen Beschreibungen von Mittelfläche und Schalenraum ist es bislang unmöglich, eine Aussage über die Biegefläche des Elements zu machen. Insbesondere die Ränder sind infolge der bilinearen Mittelflächeninterpolation nicht gekrümmt, sondern geradlinig. Wäre die Biegefläche $w(\xi, \eta)$ des Elementes bekannt, ermittelte man die Biegeverzerrungen im Sinne der linearen KIRCHHOFF Theorie als $\mathbf{E}_2^1 = -\nabla_2 \circ \nabla_2 w$. In der Diskretisierung wird die Biegefläche gar nicht exakt ermittelt, so daß die Biegeverzerrungen \mathbf{E}_2^1 auf eine andere Art bestimmt werden müssen. Der Grundgedanke ist, diese durch Gradientenbildung

$$\mathbf{E}_2^1 = \nabla \gamma - \nabla \Gamma \quad (4.94)$$

einer direkten Verzerrungsinterpolation zu ermitteln⁸. Γ bzw. γ bezeichnen hierbei Verzerrungen, die sich - wie später gezeigt wird - als *relative* Neigungen interpretieren lassen. Die Vorgehensweise ähnelt derjenigen von DVORKIN UND BATHE (1984) oder HUGHES UND TEZDUYAR (1981) bei der Ermittlung der Querschubverzerrungen, die mittlerweile als ANS-Technik bekannt geworden ist. Vergleicht man Gl. (4.94) mit Gl. (2.11) bzw. Gl. (2.16) und betrachtet \mathbf{E}_2^1 in Analogie zum Dreieckselement in Abschnitt 4.3, so stellt dieser Ansatz im Gegensatz zu den exakten Formeln der Herleitung der Dreiecksbiegeverzerrungen gemäß Gl. (4.127) bzw. Gl. (4.129) eine Näherung dar. Unter Bezug auf Gl. (2.16) wäre Gl. (4.94) demnach exakt, sähe man für \mathbf{E}_2^1 die Ortsableitung im Element als konstant an und nur die Ableitungen des Direktors als veränderlich. Man kann nun Gl. (4.94) derart interpretieren, daß die Anteile der mittleren Elementkrümmung im Viereck durch die Anteile Γ_{in} bzw. γ_{in} in den Gln. (4.95) und (4.96) wiedergegeben werden. Die Krümmungsgradienten des Viereckelementes hingegen werden erfaßt durch die Terme C_{in} bzw. c_{in} . Die Interpolation der Verzerrungen in Gl. (4.94) erfolgt über Stützwerte in Kollokationspunkten, die aus den Knotenfreiwerten $\mathbf{R}_n, \mathbf{D}_n$ bzw. $\mathbf{r}_n, \mathbf{d}_n$ gewonnen werden. Es werden keine zusätzlichen Freiwerte eingeführt. Großbuchstaben bezeichnen Größen der Referenz, Kleinbuchstaben entsprechend solche der aktuellen Lage. Beim Vergleich von Gl. (4.94) und Gl. (2.11) fällt auf, daß in der diskretisierten Form die Terme mit dem Krümmungstensor \mathbf{B} formal nicht wiederzufinden sind; auch im folgenden treten diese nicht auf. Da in der Kontinuumsformulierung $\mathbf{B} = -\nabla_2 \circ \mathbf{n}$ ein Differentialquotient ist, wird dieser in der diskretisierten Form durch Differenzen approximiert. Für die Anwendung bedeutet dies, daß die elementinternen Krümmungen klein sein müssen, d.h. die Längen der gekrümmten Seitenkanten dürfen nur geringfügig abweichen von den Sehnenlängen. Für die Interpolation der Neigungen Γ bzw. γ wählt man im Viereck folgende Ansätze:

$$\Gamma_i(\xi, \eta) = N_n(\xi, \eta)\Gamma_{in} + N_n^*(\xi, \eta)C_{in}, \quad (4.95)$$

$$\gamma_i(\xi, \eta) = N_n(\xi, \eta)\gamma_{in} + N_n^*(\xi, \eta)c_{in}. \quad (4.96)$$

⁸Ggf. inklusive Symmetrisierung.

Der erste Summand in Gl. (4.95) und Gl. (4.96) bezeichnet den Anteil der bilinearen Interpolation und der zweite Term repräsentiert die DKT-Philosophie nach BATOZ, BATHE & HO (1980) und BATHE, DVORKIN & HO (1983). Die einzelnen Größen in den Gln. (4.95) und (4.96) sind dabei wie folgt definiert:

- $N_n(\xi, \eta)$ sind die bilinearen Ansatzfunktionen im Einheitsviereck nach Gl. (4.3) bis Gl. (4.6). Diese wurden bereits bei der Beschreibung der Membranverzerungen verwendet.
- Γ_{in}, γ_{in} bezeichnen die Stützwerte der bilinearen Interpolation. Diese werden aus dem Deformationsgradienten \mathbf{F}^0 der Elementmitte ($\xi = 0, \eta = 0$) berechnet - siehe Abb. (4.12). Sie lassen sich deuten als Neigungen an den Knoten relativ zur *mittleren* Elementebene.
- $N_n^*(\xi, \eta)$ sind die Seitenmittenansatzfunktionen, die zur quadratischen Interpolation der Neigungen im Einheitsviereck gemäß DKT beitragen.
- Mit C_{in}, c_{in} werden die zugehörigen Stützwerte der Interpolationsfunktionen $N_n^*(\xi, \eta)$ bezeichnet, die den Anteil des DKT-Gedankens repräsentieren. Sie lassen sich geometrisch interpretieren als Knotenneigungen relativ zur Elementkante bzw. -sehne.

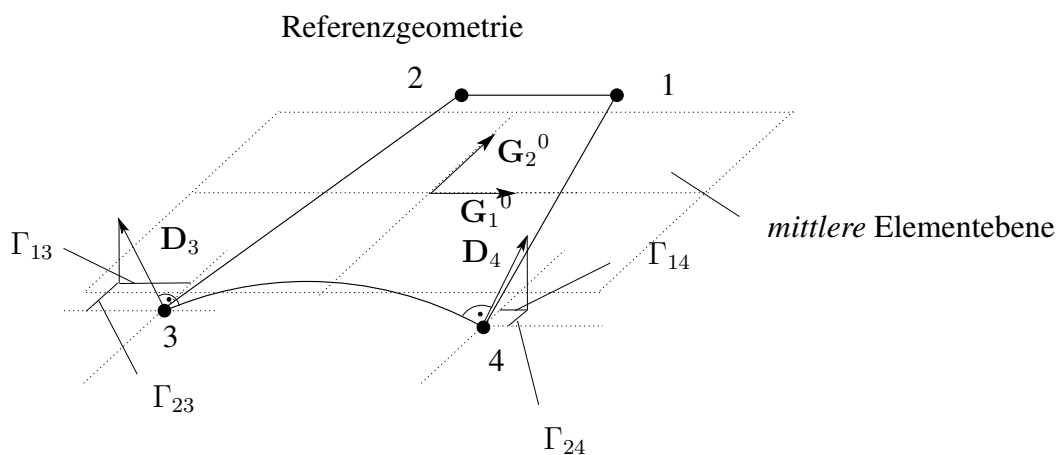
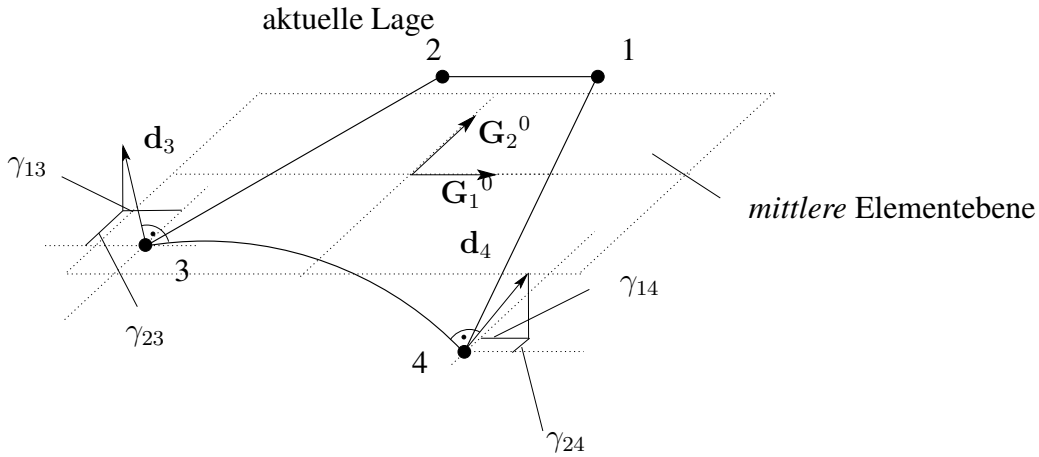


Abbildung 4.11: Relative Knotenneigungen Γ_n

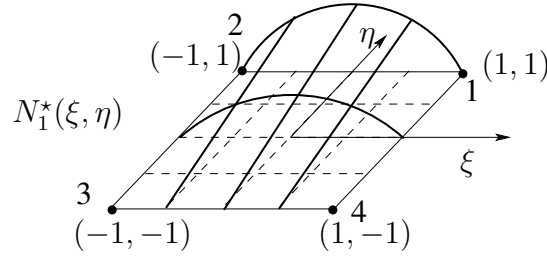
Abbildung 4.12: Relative Knotenneigungen γ_n

Die Knotenneigungen lauten:

$$\Gamma_{in} = \bar{F}_{ij}^0 D_{jn} = G_i^{\alpha 0} N_{m,\alpha}^0 R_{jm} D_{jn}, \quad (4.97)$$

$$\gamma_{in} = F_{ij}^0 d_{jn} \stackrel{\text{Gl. (4.15)}}{=} G_i^{\alpha 0} N_{m,\alpha}^0 r_{jm} d_{jn}. \quad (4.98)$$

Die Größe \bar{F}_{ij}^0 in Gl. (4.97) bezeichnet dabei den mit der Referenzlage zu bildenden Deformationsgradienten in der Elementmitte. Die nachstehenden geometrischen Überlegungen bzw. Interpretationen werden anhand der aktuellen Neigungen γ_{in} angestellt bzw. vorgenommen. Für die referenzbezogenen Neigungen Γ_{in} gelten sie in Analogie. Die mit Hilfe von $\mathbf{F}^0 := \mathbf{F}(\xi = \eta = 0)$ gemäß Gl. (4.98) berechneten γ_{in} lassen sich als Projektionen der Knotendirektoren \mathbf{d}_n in Richtung der kovarianten Basisvektoren $\mathbf{G}_\alpha^0 := \mathbf{G}_\alpha(\xi = \eta = 0)$ auffassen. Die Gl. (4.98) verdeutlicht allerdings, daß der Begriff Projektion nicht ganz exakt ist: Im allgemeinen sind die den Deformationsgradienten der Elementmitte \mathbf{F}^0 bildenden kovarianten Basisvektoren \mathbf{G}_α^0 keine Einheitsvektoren. Daher enthält das Skalarprodukt zwischen \mathbf{F}^0 und \mathbf{d}_n noch einen Einfluß aus dem Betrag, der eine Mittelflächendehnung repräsentiert. Exakt wäre der Begriff Projektion demnach nur, wenn die Referenzgeometrie des Elementes eben und rechtwinklig wäre, so daß sich die \mathbf{G}_α^0 als Einheitsvektoren ergäben. Wäre die tatsächliche Biegefläche bekannt, ergäbe das Skalarprodukt zwischen den Tangentenvektoren am Knoten und den Direktoren tatsächlich eine transversale Schubverzerrung, die bei Gültigkeit der KIRCHHOFF Hypothese verschwände. Da aber \mathbf{F}^0 die Bezugsebene zur Ermittlung der Neigungen definiert, sind die Neigungen γ_n am Knoten n ungleich null. Somit werden relative Neigungen ermittelt. Eine bilineare Interpolation der γ_{in} allein wäre unzureichend, denn damit ließen sich längs der Elementränder allenfalls konstante Biegemomentenverläufe darstellen. In Übereinstimmung mit BATHE ET AL. werden entlang der Ränder kubische Verläufe der Biegelinien angenommen, weshalb die Neigungen γ entsprechend parabolisch zu interpolieren sind. Hierzu werden zunächst quadratische Interpolationsfunktionen N_n^* im Viereck eingeführt.

Abbildung 4.13: Seitenmittenansatzfunktion N_1^*

Die Seitenmittenansatzfunktionen lauten:

$$N_1^* = \frac{1}{8} (1 - \xi^2)(1 + \eta), \quad (4.99)$$

$$N_2^* = \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 - \eta^2), \quad (4.100)$$

$$N_3^* = \frac{1}{8} (1 - \xi^2)(1 - \eta), \quad (4.101)$$

$$N_4^* = \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 - \eta^2). \quad (4.102)$$

In Abb. (4.13) ist exemplarisch die Funktion N_1^* dargestellt; die anderen Funktionen im Einheitsquadrat ergeben sich wieder durch Drehungen um $\pi/2$, π und $3\pi/2$. Entsprechend ergeben sich die Ableitungen bzgl. der Flächenparameter zu

$$N_{1,\xi}^* = -\frac{1}{4} \xi(1 + \eta), \quad N_{1,\eta}^* = \frac{1}{8} (1 - \xi^2), \quad (4.103)$$

$$N_{2,\xi}^* = -\frac{1}{8} (1 - \eta^2), \quad N_{2,\eta}^* = -\frac{1}{4} \eta(1 - \xi), \quad (4.104)$$

$$N_{3,\xi}^* = -\frac{1}{4} \xi(1 - \eta), \quad N_{3,\eta}^* = -\frac{1}{8} (1 - \xi^2), \quad (4.105)$$

$$N_{4,\xi}^* = \frac{1}{8} (1 - \eta^2), \quad N_{4,\eta}^* = -\frac{1}{4} \eta(1 + \xi). \quad (4.106)$$

Die Interpolation der Neigungen im Element erfolgt nun in Anlehnung an VERHOEVEN (1992) unter Berücksichtigung der von BATOZ, BATHE & HO (1980) und BATHE UND HO (1981) vorgeschlagenen DKT-Philosophie: Entlang der Ränder wird quadratisch interpoliert, ins Innere des Elementes hinein linear. Dies erklärt, weshalb DKT-Elemente als *inkompatibel* im Innern des Elementes, aber als *kompatibel am Rand* bezeichnet werden.⁹ Die C^1 -Stetigkeit normal zum Rand ist nicht gewährleistet.

⁹Für die lineare Theorie läßt sich die Kompatibilitätsbedingung notieren als $(\mathbf{e}_3 \times \nabla_2) \cdot (\nabla_2 \circ \nabla_2 w) = 0$. Daß in diesem Fall $(\mathbf{e}_3 \times \nabla_2) \cdot \mathbf{E}_2^1 = 0$ im Elementinnern nicht erfüllt ist, kommt auch in der Unsymmetrie der späteren Gln. (4.111) und (4.112) zum Ausdruck. Allerdings gewährleistet die Kompatibilität am Rand immerhin die C^0 -Stetigkeit, so daß längs der Seiten keine Klaffungen zwischen den Elementen auftreten.

In beiden Abbildungen geht der Blick auf die Seite 3 eines Elementes in Richtung der Achse G_2^0 .

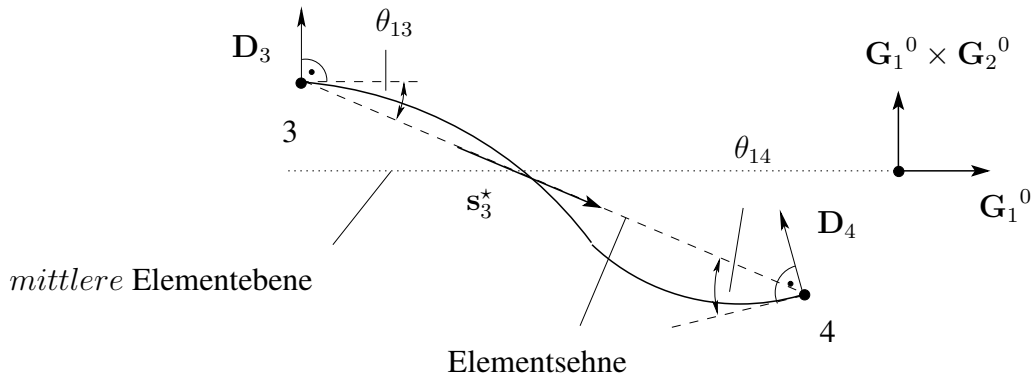


Abbildung 4.14: Seitenbiegewinkel der RKF

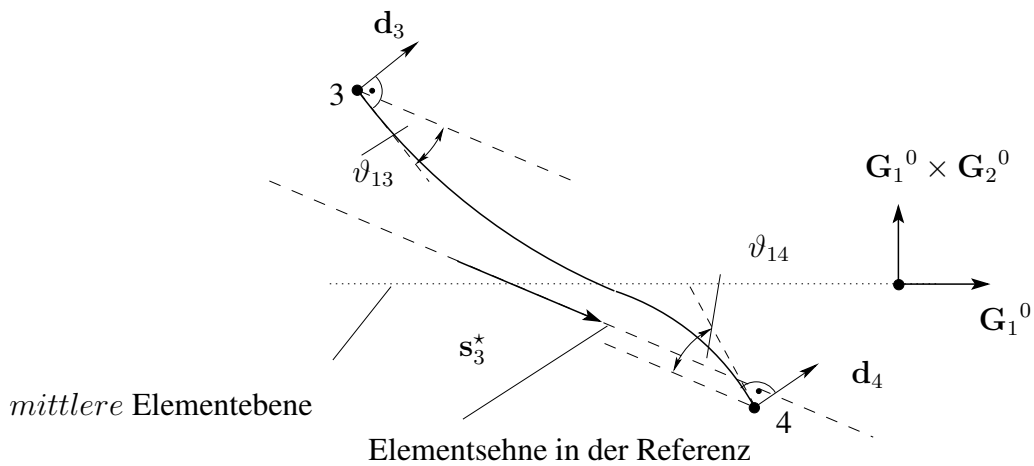


Abbildung 4.15: Seitenbiegewinkel der AKF

Die Projektion in Richtung der Elementkante wird durch den Vektor s_{in}^* gewährleistet. Die Bezeichnung \star wurde gewählt, um zu verdeutlichen, daß s_n^* kein Einheitsvektor ist, sondern die Dimension $\frac{1}{\text{Länge}}$ besitzt. Der entsprechende Ansatz für die Knotenstützwerte C_{in} bzw. c_{in} lautet

$$C_{in} = -3 \frac{R_{in+1} - R_{in}}{\underbrace{\|R_{kn+1} - R_{kn}\|^2}_{=:s_{in}^*}} (R_{jn+1} - R_{jn}) (D_{jn+1} + D_{jn}) , \quad (4.107)$$

$$c_{in} = -3 \frac{R_{in+1} - R_{in}}{\underbrace{\|R_{kn+1} - R_{kn}\|^2}_{=:s_{in}^*}} (r_{jn+1} - r_{jn}) (d_{jn+1} + d_{jn}) . \quad (4.108)$$

Man kann den quadratischen Teil längs des Randes auch geometrisch deuten: Die Biegewinkel θ_{jn} und ϑ_{jn} an den Elementknoten werden definiert über das Skalarprodukt aus dem Knotendirektor und dem Deformationsgradienten auf der Elementkante. Die anschließende Projektion in Richtung der Seite vermittelt der Seiteneinheitsvektor. In Abb. (4.15) soll dies verdeutlicht werden. Die Biegewinkel am Knoten n sind dabei mit θ_{jn} und ϑ_{jn} bezeichnet, da die Werte Γ_{jn} bzw. γ_{jn} bereits für die Neigewinkel gegenüber der mittleren Elementebene reserviert sind. Im Hinblick auf die Programmtechnik wird in die Gln. (4.107) und (4.108) der bezogene Seitenvektor s_n^* eingeführt. Damit ergeben sich die Neigungen im Feld für die RKF zu

$$\begin{aligned} \Gamma_i(\xi, \eta) &= \sum_{n=1}^4 [N_n(\xi, \eta) \Gamma_{in} \\ &\quad - \sum_{l=1}^3 3 N_n^*(\xi, \eta) s_{in}^* (R_{ln+1} - R_{ln}) (D_{ln+1} + D_{ln})] \end{aligned} \quad (4.109)$$

und in der AKF als

$$\begin{aligned} \gamma_i(\xi, \eta) &= \sum_{n=1}^4 [N_n(\xi, \eta) \gamma_{in} \\ &\quad - \sum_{l=1}^3 3 N_n^*(\xi, \eta) s_{in}^* (r_{ln+1} - r_{ln}) (d_{ln+1} + d_{ln})]. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Da $n = 1, 2, 3, 4$ gilt, durchläuft $n + 1$ zyklisch diesen Wertevorrat. Die Neigungsgradienten beider Konfigurationen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} (\nabla)_k \Gamma_i &= G_k^\beta [N_{n,\beta} G_i^{\alpha 0} N_{m,\alpha}^0 R_{jm} D_{jn} \\ &\quad - 3 N_{n,\beta}^* s_{in}^* (R_{jn+1} - R_{jn}) (D_{jn+1} + D_{jn})] \end{aligned} \quad (4.111)$$

bzw.

$$\begin{aligned} (\nabla)_k \gamma_i &= G_k^\beta [N_{n,\beta} G_i^{\alpha 0} N_{m,\alpha}^0 r_{jm} d_{jn} \\ &\quad - 3 N_{n,\beta}^* s_{in}^* (r_{jn+1} - r_{jn}) (d_{jn+1} + d_{jn})]. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Da die Gln. (4.111) und (4.112) in i, k nicht symmetrisch sind, müssen diese noch symmetrisiert werden. Außerdem ist noch der Bezug zur lokalen Orthogonalbasis \bar{e}_β herzustellen. Zweckmäßigkeitshalber klammert man die Knotenfreiwerte aus, so daß man eine ausschließlich referenzabhängige, innerhalb des Elementes veränderliche Matrix $B_{\alpha\beta mn}$ erhält. Die Biegeverzerrung erhält man dann, indem man die Referenzkrümmung von der aktuellen Krümmung abzieht. Es folgt im Integrationspunkt $\langle p \rangle$ die Darstellung

$$\kappa_{\alpha\beta}^{\langle p \rangle} = \underbrace{B_{\alpha\beta mn}^{\langle p \rangle}}_{\text{RKF}} \left(\overbrace{r_{km} d_{kn}}^{\text{AKF}} - \underbrace{R_{km} D_{kn}}_{\text{RKF}} \right). \quad (4.113)$$

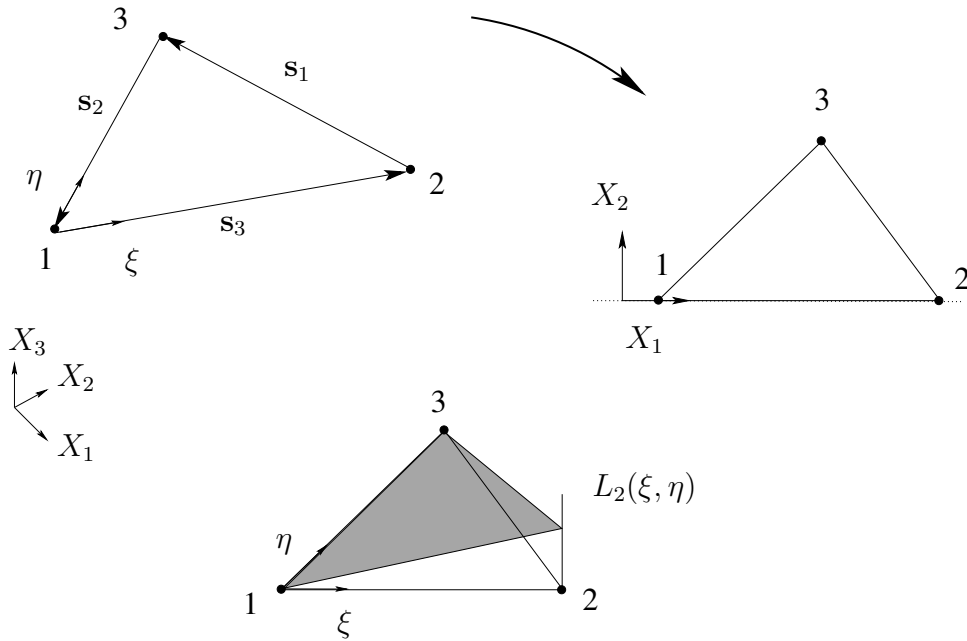
Für die Matrix $B_{\alpha\beta mn}$ gilt dabei:

$$\begin{aligned}
B_{\alpha\beta mn}^{(p)} &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,l=1}^3 \bar{e}_{l\alpha} \bar{e}_{i\beta} \left[\sum_{\epsilon,\lambda=1}^2 G_l^\epsilon (N_{n,\epsilon} G_i^{\lambda 0} N_{m,\lambda}^0 \right. \right. \\
&\quad - 3 (\delta_{mn} - \delta_{mn-1}) N_{n-1,\epsilon}^* s_{in-1}^* \\
&\quad + 3 (\delta_{mn+1} - \delta_{mn}) N_{n,\epsilon}^* s_{in}^* \\
&\quad + \sum_{i,l=1}^3 \bar{e}_{l\beta} \bar{e}_{i\alpha} \left[\sum_{\epsilon,\lambda=1}^2 G_l^\epsilon (N_{n,\epsilon} G_i^{\lambda 0} N_{m,\lambda}^0 \right. \\
&\quad - 3 (\delta_{mn} - \delta_{mn-1}) N_{n-1,\epsilon}^* s_{in-1}^* \\
&\quad \left. \left. + 3 (\delta_{mn+1} - \delta_{mn}) N_{n,\epsilon}^* s_{in}^* \right) \right] \right\}^{(p)}. \tag{4.114}
\end{aligned}$$

4.3 Dreieckselement

Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt auf der Umsetzung der in Kapitel 2 beschriebenen Schalentheorie am Vierknotenelement. Um bei der Diskretisierung jedoch flexibler zu sein, wurde das von LÜBCKE (1992) veröffentlichte Dreiknotenelement für die Untersuchung nicht planarer Referenzkonfigurationen ebenfalls erweitert. Basis hierfür ist die Arbeit von SCHOOP (1989); ausführlich diskutiert wird das hier vorgestellte Element auch von WENZEL UND SCHOOP (2003). Die Beschreibung des Dreiecks erfolgt analog zum Abschnitt 4.2. D.h., es wird ebenfalls die fünfparametrische Formulierung verwendet. Für die Beschreibung gilt ebenfalls die Summationskonvention nach EINSTEIN wie in Abschnitt 4.2. Es gilt lediglich für die *Knotenindizes* $m, n = 1, \dots, 3$. Hinsichtlich der Größen $\mathbf{R}_n, \mathbf{D}_n, \mathbf{r}_n$ und \mathbf{d}_n gilt auch das bereits in Abschnitt 4.2 Gesagte. Die Ermittlung der Verzerrungen im diskretisierten Gebiet orientiert sich an folgenden Punkten:

- Zur Berechnung der Membranverzerrungen wird das Sehnendreieck zwischen den Elementknoten anstelle der gekrümmten Elementmittelfläche verwendet. Diese Näherung ist sinnvoll, solange die Abweichung zwischen ebenem und gekrümmtem Dreieck gering ist.
- Die Elementkoordinaten im Dreiecksgebiet (ξ, η) werden ersetzt durch kartesische Koordinaten des ebenen Dreiecks. Einfachheit halber orientiert man (willkürlich) die X_1 -Richtung an einer Dreiecksseite. Die Orientierung der Achse ist eine Frage des Präprozessings, d.h. eine Eingabegröße.
- Die Biegeverzerrungen werden dadurch ermittelt, daß die relativen Neigungen der Knotendirektoren zur Ebene des Sehnendreiecks in der aktuellen Lage und der Referenzkonfiguration miteinander verglichen werden.

Abbildung 4.16: Dreiecksgeometrie und Ansatzfunktion $L_2(\xi, \eta)$

Isoparametrisches Konzept Wie beim Viereckselement werden Referenz \mathbf{R} und aktuelle Lage \mathbf{r} mit denselben Funktionen beschrieben. Die Dreiecksgeometrie wird linear interpoliert zwischen den drei Eckknoten. Hierzu werden die Dreieckskoordinaten nach ZIENKIEWICZ (1975) verwendet. Damit ergibt sich die Mittelfläche im Sehnendreieck der Referenzkonfiguration als

$$\mathbf{R}(\xi, \eta) = L_n(\xi, \eta)\mathbf{R}_n \quad n = 1, 2, 3. \quad (4.115)$$

Die Interpolationsfunktionen L_n nach Abb. (4.16) nehmen entsprechend am Knoten n den Wert eins und am Knoten m den Wert null für $m \neq n$ an. Die Interpolation der aktuellen Lage lautet entsprechend

$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = L_n(\xi, \eta)\mathbf{r}_n \quad n = 1, 2, 3. \quad (4.116)$$

\mathbf{r} und insbesondere auch \mathbf{R} sind dreidimensionale Vektoren, beschrieben durch die globalkartesische Basis \mathbf{e}_i . Die Interpolationsfunktionen im Dreieck lauten:

$$L_1 = 1 - \xi - \eta, \quad (4.117)$$

$$L_2 = \xi, \quad (4.118)$$

$$L_3 = \eta. \quad (4.119)$$

Damit ergibt sich der Deformationsgradient als konstant im Dreieck. Am bequemsten ist es, die Dreiecksebene in die (X_1, X_2) -Ebene des globalkartesischen Koordinatensystems zu legen und die X_1 -Achse an einer Dreiecksseite auszurichten. Wegen der

linearen Beziehung zwischen den Flächenkoordinaten (ξ, η) und den kartesischen Koordinaten sind die Gln. (4.117) bis (4.119) unmittelbar invertierbar.

$$\xi = \frac{1}{2A_0} [(X_{23} - X_{21})X_1 + (X_{11} - X_{13})X_2 + (X_{13}X_{21} - X_{11}X_{23})] \quad (4.120)$$

$$\eta = \frac{1}{2A_0} [(X_{21} - X_{22})X_1 + (X_{12} - X_{11})X_2 + (X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21})] \quad (4.121)$$

Die Ableitung der L_n nach den kartesischen Koordinaten ergibt sich damit zu

$$\frac{\partial L_n}{\partial X_\alpha} = L_{n,\alpha} = \frac{1}{2A_0} \begin{pmatrix} X_{22} - X_{23} & X_{23} - X_{21} & X_{21} - X_{22} \\ X_{13} - X_{12} & X_{11} - X_{13} & X_{12} - X_{11} \end{pmatrix}. \quad (4.122)$$

A_0 bedeutet hierbei: Elementfläche in der Referenzlage.

4.3.1 Deformationsgradient

Wegen der kartesischen Darstellung benötigt man den ebenen Nablaoperator nicht in Form von Gl. (2.4), sondern kann auf die Darstellung

$$\nabla_2 = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \quad (4.123)$$

zurückgreifen. Demzufolge erhält man sofort eine zweidimensionale Beschreibung und benötigt - anders als beim Viereck - keine lokalen Orthogonalbasen $\bar{\mathbf{e}}_k$. Damit ergibt sich der Deformationsgradient zu

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{r} \circ \nabla_2 \stackrel{\text{Gl. (4.115)}}{=} (L_n \mathbf{r}_n) \circ \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial X_\alpha}. \quad (4.124)$$

Die partiellen Ableitungen der linearen Interpolationsfunktionen nach den Flächenkoordinaten sind in Gl. (4.122) angegeben.

4.3.2 Membranverzerrung

Der GREENSche Tensor der Mittelflächenverzerrungen nach Gl. (2.10) lautet

$$\mathbf{E}_2^0 = \frac{1}{2} (\nabla_2 \circ \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \circ \nabla_2 - \mathbf{E}_2). \quad (4.125)$$

Da bereits der Deformationgradient \mathbf{F}_2 im Dreieck konstant ist, ergeben sich die Membranverzerrungen ebenfalls als konstant. Mit Gl. (4.123) lautet $\epsilon_{\alpha\beta}^0$:

$$\epsilon_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} (L_{n,\alpha} L_{m,\beta} r_{im} r_{in} - \delta_{\alpha\beta}). \quad (4.126)$$

4.3.3 Biegeverzerrung

Da die Tangentenvektoren $\mathbf{r}_{,\alpha}$, $\mathbf{R}_{,\alpha}$ im Element konstant sind, kann man Gl. (2.16) umschreiben zu

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} ((\mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d})_{,\beta} + (\mathbf{r}_{,\beta} \cdot \mathbf{d})_{,\alpha} - (\mathbf{R}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D})_{,\beta} - (\mathbf{R}_{,\beta} \cdot \mathbf{D})_{,\alpha}). \quad (4.127)$$

Nun führt man analog zum Viereck zu den Gln. (4.97) und (4.109) folgende Abkürzungen ein:

$$\gamma_{\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} \quad \text{und} \quad \Gamma_{\alpha} = \mathbf{R}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}. \quad (4.128)$$

Gl. (4.127) lautet dann

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\gamma_{\alpha,\beta} + \gamma_{\beta,\alpha} - \Gamma_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\beta,\alpha}). \quad (4.129)$$

Wiederum gilt: Wäre $\mathbf{r}_{,\alpha}$ ausgehend von der tatsächlich gekrümmten Mittelfläche berechnet worden, wäre γ_{α} eine Querschubverzerrung und müßte infolge der KIRCHHOFF Hypothese verschwinden. Im Element definieren die Tangentenvektoren $\mathbf{r}_{,\alpha}$ die Sehnenebene des Dreiecks. Daher kann γ_{α} als relative Neigung gegenüber dieser Ebene interpretiert werden. γ_{α} beschreibt also die Neigung in der lokalen X_{α} -Richtung. Dies ist sinnvoll, solange die elementinternen Drehungen klein sind. Finite Starrkörperrotationen der Gesamtstruktur im globalen werden exakt erfaßt, da GREENLAGRANGE Verzerrungen verwendet werden. Aus Gl. (4.129) ergeben sich die Biege-

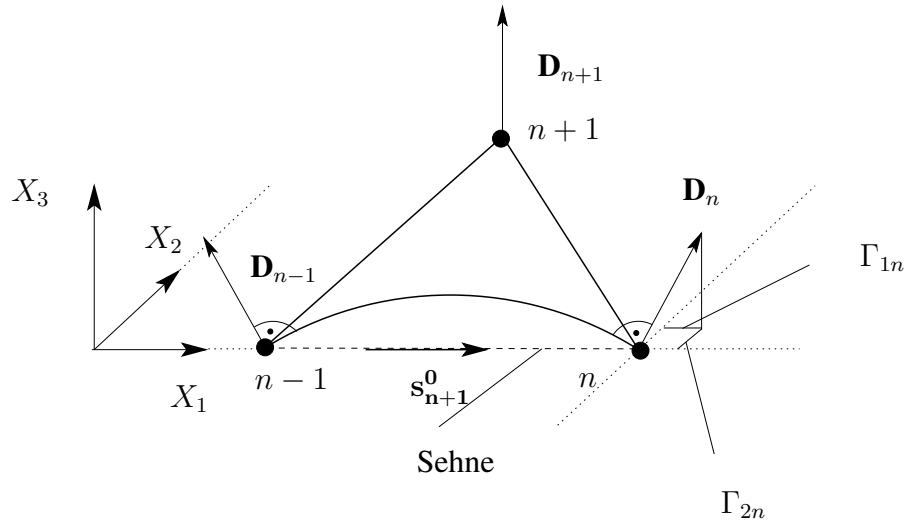


Abbildung 4.17: Relative Neigungen $\Gamma_{\alpha n}$ am Knoten n

verzerrungen als symmetrischer Anteil der Ableitungen der relativen Neigungen im Feld. Die Neigungen an den Elementknoten $\Gamma_{\alpha n}$ und $\gamma_{\alpha n}$ können einfach ermittelt werden:

$$\gamma_{\alpha n} = L_{m,\alpha} \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{d}_n \quad \Gamma_{\alpha n} = L_{m,\alpha} \mathbf{R}_m \cdot \mathbf{D}_n \quad n = 1, 3 \quad (4.130)$$

In Analogie zur Vorgehensweise beim Viereck werden wiederum die Neigungen direkt interpoliert anstelle der Direktoren \mathbf{D} und \mathbf{d} . In diesem Sinne ähnelt die Vorgehensweise wiederum dem ANS-Grundgedanken von HUGHES UND TEZDUYAR (1981). Während man normal zum Rand ins Dreieck hinein linear interpoliert, nimmt man längs der Elementränder einen parabolischen Verlauf von γ_α an. Wie beim Viereck kann damit die Dreiecksseite einen linearen Momentenverlauf im Sinne einer kubischen Biegelinie des klassischen Balkenkontinuums darstellen. In Anlehnung an BATOZ, BATHE & HO (1980) und BATHE, DVORKIN & HO (1983) ergibt sich als Interpolation

$$\gamma_\alpha = L_n \gamma_{\alpha n} - \frac{3}{2} s_{\alpha n}^0 s_{\beta n}^0 L_{n+1} L_{n-1} (\gamma_{\beta n-1} + \gamma_{\beta n+1}). \quad (4.131)$$

Hierbei bezeichnet $s_{\alpha n}^0$ den Seiteneinheitsvektor des Sehnendreiecks (siehe Abb. 4.17). Die Indizes $n+1$ bzw. $n-1$ durchlaufen zyklisch den Wertevorrat 1, 2, 3. Alle Elemente, die einen speziellen Knoten l beinhalten, nutzen gemeinsam die Direktoren \mathbf{d}_l und \mathbf{D}_l . Jedoch unterscheiden sich die relativen Knotenneigungen γ_α , da sich in einem Knoten auch die angrenzenden Sehnendreiecke unterscheiden. Die Komponenten längs der Ränder sind identisch, aber die Komponenten normal zum Rand unterscheiden sich. Man bezeichnet diese Elemente wie schon die Viereckselemente in Abschnitt 4.2 infolge der Kinematik als *inkompatibel im Innern* bzw. *kompatibel am Rand*, da die Neigungen längs der Ränder integrierbar sind und eindeutige Biegelinien ergeben. Die Ableitung von Gl. (4.131) nach X_ϵ bzw. die Gradientenbildung ergibt

$$\gamma_{\alpha,\epsilon} = L_{n,\alpha\epsilon} \gamma_{\alpha n} - \frac{3}{2} s_{\alpha n}^0 s_{\beta n}^0 (L_{n+1,\epsilon} L_{n-1} + L_{n-1,\epsilon} L_{n+1}) (\gamma_{\beta n-1} + \gamma_{\beta n+1}). \quad (4.132)$$

Für die Auswertung in den Integrationspunkten ergibt sich nach einigen Umformungen mit Gl. (4.130)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha,\epsilon}^{(p)} &= \sum_{m,n=1}^3 [L_{n,\epsilon} \delta_{\alpha\beta} - \frac{3}{2} s_{\alpha n+1}^0 s_{\beta n+1}^0 (L_{n-1,\epsilon} L_n + L_{n,\epsilon} L_{n-1}) \\ &\quad - \frac{3}{2} s_{\alpha n-1}^0 s_{\beta n-1}^0 (L_{n,\epsilon} L_{n+1} + L_{n+1,\epsilon} L_n)] L_{m,\beta}^{(p)} R_{km} D_{kn}, \quad (4.133) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha,\epsilon}^{(p)} &= \sum_{m,n=1}^3 [L_{n,\epsilon} \delta_{\alpha\beta} - \frac{3}{2} s_{\alpha n+1}^0 s_{\beta n+1}^0 (L_{n-1,\epsilon} L_n + L_{n,\epsilon} L_{n-1}) \\ &\quad - \frac{3}{2} s_{\alpha n-1}^0 s_{\beta n-1}^0 (L_{n,\epsilon} L_{n+1} + L_{n+1,\epsilon} L_n)] L_{m,\beta}^{(p)} r_{km} d_{kn}. \quad (4.134) \end{aligned}$$

Wie bereits beim Viereckselement sind die $\Gamma_{\alpha,\beta}$ bzw. $\gamma_{\alpha,\beta}$ nicht symmetrisch. Daher müssen die Gln. (4.133) und (4.134) symmetrisiert werden. Zweckmäßigkeitshalber

klammert man die Knotenfreiwerte aus, so daß man mit der ausschließlich referenz-abhängigen Matrix $B_{\alpha\epsilon mn}$ die Darstellung

$$\kappa_{\alpha\epsilon}^{\langle p \rangle} = \underbrace{B_{\alpha\epsilon mn}^{\langle p \rangle}}_{\text{RKF}} \left(\overbrace{r_{km} d_{kn}}^{\text{AKF}} - \underbrace{R_{km} D_{kn}}_{\text{RKF}} \right) \quad (4.135)$$

erhält. Dabei gilt für die wiederum ausschließlich referenzgrößenabhängige Matrix $B_{\alpha\epsilon mn}$ im GAUSSpunkt $\langle p \rangle$:

$$\begin{aligned} B_{\alpha\epsilon mn}^{\langle p \rangle} = & \frac{1}{2} \left\{ [L_{n,\epsilon} \delta_{\alpha\beta} - \frac{3}{2} s_{\alpha n+1}^0 s_{\beta n+1}^0 (L_{n-1,\epsilon} L_n + L_{n,\epsilon} L_{n-1}) \right. \\ & - \frac{3}{2} s_{\alpha n-1}^0 s_{\beta n-1}^0 (L_{n,\epsilon} L_{n+1} + L_{n+1,\epsilon} L_n) \\ & + L_{n,\alpha} \delta_{\epsilon\beta} - \frac{3}{2} s_{\epsilon n+1}^0 s_{\beta n+1}^0 (L_{n-1,\alpha} L_n + L_{n,\alpha} L_{n-1}) \\ & \left. - \frac{3}{2} s_{\epsilon n-1}^0 s_{\beta n-1}^0 (L_{n,\alpha} L_{n+1} + L_{n+1,\alpha} L_n)] L_{m,\beta} \right\}^{\langle p \rangle} . \quad (4.136) \end{aligned}$$

Kapitel 5

Ergebnisse

Zur Beurteilung der Eignung und Leistungsfähigkeit von Finiten Elementen sind neben den formalen Tests zur Überprüfung der Programmierung¹ eine Reihe sog. *Benchmark* Beispielen zu untersuchen. Hierbei gilt: Was am einfachen Beispiel nicht korrekt ist, wird am komplizierten nicht besser. Oder anders formuliert: Wenn eine lineare Rechnung keine sinnreichen Ergebnisse liefert, gelten die Ergebnisse nichtlinearer Berechnungen erst recht als zweifelhaft. Im folgenden werden hauptsächlich die viereckigen Elementvarianten Q1 und Q1E4 (ggf. Q1E7) behandelt. Das Dreieckselement DKT3D wird im Abschnitt 5.2 untersucht. Die meisten Rechenbeispiele sind mit Daten ohne Angabe der Dimension (Geometrie, Materialparameter) versehen. Im Sinne der Verifizierbarkeit ist lediglich darauf zu achten, daß die Daten *konsistent* eingegeben werden. D.h., wenn Kräfte in $[kN]$ und Längen in $[cm]$ eingegeben werden, ist der Elastizitätsmodul in $[kN\ cm^{-2}]$ einzusetzen usw.

5.1 Linear elastische Beispiele, Knick- und Beulprobleme

Es werden zunächst einfache Lastfälle für ebene Rechteckgeometrien untersucht und der Patchtest für die Zugscheibe verifiziert. Die Darstellbarkeit konstanter Biegezustände wird nur exemplarisch anhand des Beispiels der konstanten Torsion einer Quadratplatte geprüft (siehe Abschnitt 5.1.6). Ausführliche Untersuchungen der Eigenschaften des DKT-Konzeptes anhand des 4-Knotenelementes findet man bei VERHOEVEN (1992). Anhand der Lastfälle Scheibenbiegung und Schubbiegung wird überprüft, ob die Zielsetzung der Verbesserung der Membraneigenschaften beim Q1E4-Element erreicht wurde. Weiterhin werden Stabilitätsfälle untersucht, um zu prüfen, inwieweit ggf. unphysikalische Instabilitäten im Sinne des Hourglassings zu

¹Beispielsweise überprüft man Ableitungen anhand des Vergleichs von Differentialquotient und Differenzenquotient. Elementar ist ebenfalls die Kontrolle, ob für den Fall, daß Referenzkonfiguration und aktuelle Lage zusammenfallen, Verzerrungsfreiheit gewährleistet ist.

beobachten sind. Zusätzlich werden der Literatur entnommene Standardlastfälle berechnet und die Ergebnisse verglichen. Eine Sammlung von *Benchmarks* haben z.B. von MACNEAL UND HARDER (1985), SIMO, FOX & RIFAI (1989) oder auch BAŞAR UND DING (1997) zusammengestellt. Für die Abmessungen ℓ, b, t bei balkenartigen Strukturen in den Abschnitten 5.1.1 bis 5.1.4 gilt, daß ℓ die Länge und b, t die Querschnittsabmessungen Breite und Höhe repräsentieren.

5.1.1 Zugscheibe

Betrachtet wird eine balkenartige Scheibe nach Abb. (5.1). Für den Lastfall des einachsigen Zuges mit $\nu = 0$ wird am Ende der Scheibe eine konstante Verschiebung erwartet, die auch bei einem unregelmäßigen Netz vom Element exakt dargestellt werden muß. Bei linearer Rechnung ergibt sich die analytische Lösung (Balkenverhältnisse) zu $u_E = \frac{P\ell}{EA} = 1$. Die Scheibe wird mit einem 2×2 Netz diskretisiert. Somit muß in den drei Randknoten 7, 8 und 9 für Netz I und Netz II derselbe Wert u_E ermittelt werden. Die Randkraft P wird durch Knotenkräfte aufgeprägt. Diese werden auf Mittel-(8) und Randknoten(7,9) im Verhältnis 2:1 aufgeteilt.

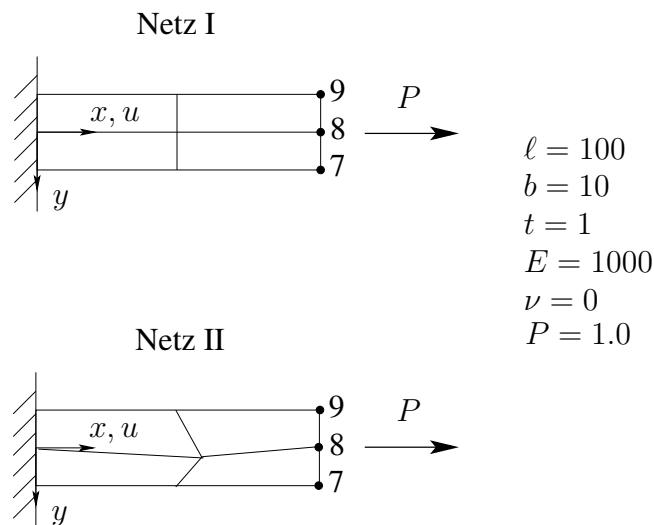


Abbildung 5.1: Diskretisierungen der Zugscheibe

Tab. (5.1) stellt die Ergebnisse des regelmäßigen und des unregelmäßigen Netzes gegenüber. Der Scheibenpatchtest für den Lastfall Zug ist bestanden, denn auch die verzerrte Diskretisierung bildet den konstanten Zustand exakt ab.

Knoten	Verschiebung u_E		
	exakt	Netz I	Netz II
7	1	1.000000	1.000000
8	1	1.000000	1.000000
9	1	1.000000	1.000000

Tabelle 5.1: u_E im Vergleich

5.1.2 Scheibenbiegung

In Abb. (5.2) wird die bereits in Abb. (5.1) skizzierte Geometrie für den Lastfall Biegung in der Scheibenebene untersucht. Gerade dieser Zustand wird durch die bilineare Interpolation ohne Zusatzeffekte nur sehr schlecht erfaßt. Die rein bilinearen Membranverzerrungen interpretieren die in Abb. (5.2) dargestellte Belastung als Scherdeformation und führen damit zu dem im Abschnitt 4.1 beschriebenen ebenen Schublocking. Genau dieser Mißstand soll durch die zusätzlich angenommenen Membranverzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ beseitigt werden. Die Momentenbelastung wird durch ein Kräftepaar in den Knoten 7 und 9 aufgeprägt. Es gilt $P = 10$; die Biegung erfolgt um die z-Achse, d.h. die *steife* Achse.

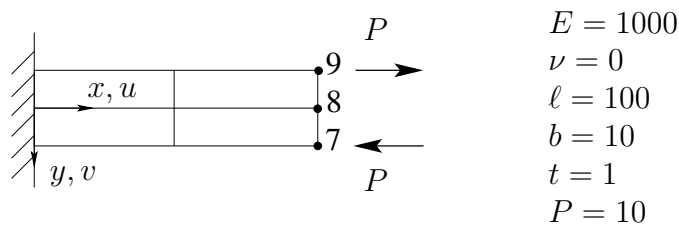


Abbildung 5.2: Lastfall reine Scheibenbiegung

Als Konvergenzstudie wurde die Durchsenkung v_8 des Knotens 8 über der Anzahl der Elemente N_{el} pro Länge ℓ untersucht und in Abb. (5.3) dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß das extrem starke Locking-Verhalten des Q1-Elementes durch die Erweiterung um die EAS-Terme behoben werden konnte. Bereits mit einem Element wird der analytische Wert von $v_8 = \frac{M\ell^2}{2EI_z} = \frac{12Pb\ell^2}{2Etb^3} = 6\frac{P\ell^2}{Etb^2} = 6$ erreicht.

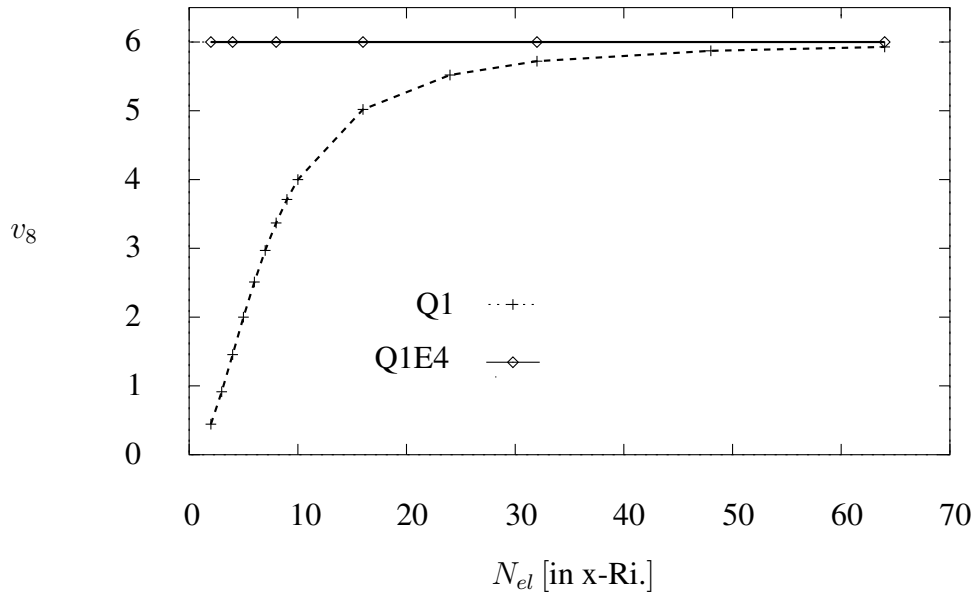


Abbildung 5.3: Konvergenz bei Scheibenbiegung

5.1.3 Schubbiegung

Bei der Schubbiegung nach Abb. (5.4) wird wieder dieselbe Grundgeometrie der Krag-scheibe wie bereits in den Abschnitten 5.1.1 und 5.1.2 untersucht.

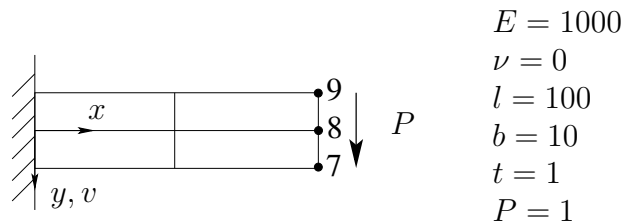


Abbildung 5.4: Lastfall Schubbiegung

Anstelle eines Kräftepaars wirkt auf die Krag-scheibe eine Querkraft am Ende. Damit wird - durch Balkengrößen ausgedrückt - ein Zustand konstanter Querkraft und eines linearen Biegemomentes erzeugt. Die analytische Vergleichslösung folgt somit im Sinne der Theorie des TIMOSHENKO Balkens zu

$$v_8 = \frac{Pl^3}{3EI_z} + \frac{Pl}{GA_s} = \frac{Pl}{Ebt} \left[4\frac{\ell^2}{b^2} + 2.4 \right] = 4.024$$

Allerdings ist der Einfluß der Schubdeformation auf die Enddurchsenkung geringer als 1%, d.h. vernachlässigbar. Wiederum wird das Konvergenzverhalten untersucht.

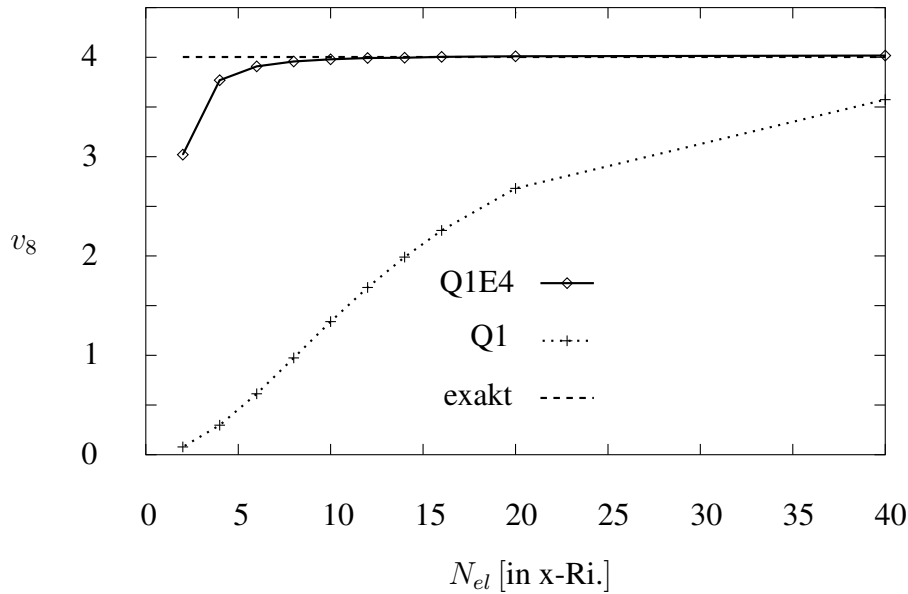


Abbildung 5.5: Konvergenz

Auch dieses Beispiel dokumentiert eindrucksvoll die Leistungsfähigkeit des verbesserten Membranverzerrungsansatzes. In Abb. (5.5) wird die Verschiebung v_8 des Knotens 8 über der Anzahl der Elemente N_{el} pro Scheibenlänge aufgetragen. Bereits mit einer Diskretisierung von (4×2) Elementen beträgt die Abweichung vom Sollwert nur 1.1% für das Q1E4-Element, wohingegen das rein bilineare Element Q1 noch 76% unterhalb des Sollwertes liegt. Das ausgeprägte locking-Verhalten ist also für diesen Lastfall fast vollständig behoben.

5.1.4 Balkenknickung

Bei der Betrachtung des Stabilitätsverhaltens soll insbesondere untersucht werden, ob die von WRIGGERS UND REESE (1996) diskutierten numerischen Instabilitäten auftreten. Hierzu wird als elementares Knickproblem der einseitig eingespannte EULER Stab nach Abb. (5.6) diskutiert. Es werden wiederum balkenartige Abmessungen ohne Querkontraktion untersucht, damit die kritischen Lasten nach der Theorie II. Ordnung als Vergleichswert herangezogen werden können. Der Elastizitätsmodul verbleibt bei $E = 1000$. Die Stabilitätsgrenze wird angezeigt durch den Wechsel des Vorzeichens der Determinante der Systemsteifigkeitsmatrix. Betrachtet man die Struktur in der FE-Diskretisierung als Platte ($u_\alpha \neq 0, w \neq 0$), so tritt mit steigender Drucklast P als erstes der Stabilitätsfall für den Fall der Biegung um die weiche Achse (y -Achse) auf. Hierzu lautet die zugehörige kritische Last

$$P_{kr}^y = \frac{\pi^2}{4\ell^2} EI_y = \frac{\pi^2}{4\ell^2} E \frac{t^3 b}{12} = 0.2056 . \quad (5.1)$$

In diesem Fall werden primär Biegeterme angesprochen, so daß man bei geringen Kompressionen keine unphysikalischen Instabilitäten erwartet. Interessant ist es nun, im Vergleich dazu das Stabilitätsproblem hinsichtlich der steifen Achse (z -Achse) zu untersuchen. Hierzu ist es erforderlich, in der Diskretisierung die Struktur als Scheibe zu berechnen ($u_\alpha \neq 0, w = 0$), da die zugehörige Instabilität natürlich erst bei größeren Lasten auftritt als es bei der weichen Achse der Fall war. Die Numerik ist von sich aus leider nicht in der Lage, diese Unterscheidung zu treffen. Nach Theorie II. Ordnung erhält man die kritische Last

$$P_{kr}^z = \frac{\pi^2}{4\ell^2} EI_z = \frac{\pi^2}{4\ell^2} E \frac{b^3 t}{12} = 20.56. \quad (5.2)$$

Es wird nur das Q1E4-Element betrachtet. Wie bereits in Abschnitt 4.2.8 dargelegt wurde, sind für unphysikalische Instabilitätseffekte insbesondere die Elementabmessungen maßgeblich. Es werden verschiedene Diskretisierungen untersucht. Die Ergebnisse sind in Tab. (5.2) zusammengestellt. In Tab. (5.2) sind für jede untersuchte

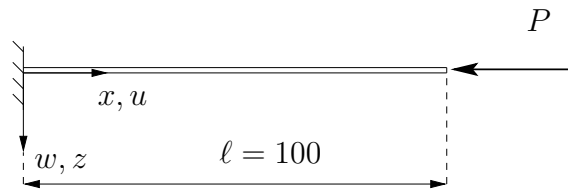


Abbildung 5.6: 2. EULER Fall

Diskretisierung das Elementseitenverhältnis und die jeweils in bezug auf Gl. (5.1) bzw. Gl. (5.2) ermittelten prozentualen Fehler angegeben. Augenscheinlich sind die elementinternen Stauchungen selbst bei dem geringen Seitenverhältnis $\frac{a_1}{a_2} = 0.2$ der (100x2)-Diskretisierung so gering, daß keine Hourglassing-Instabilität auftritt. Daß P_{kr}^y bei der

Netz	$\frac{a_1}{a_2}$	P_{kr}^y	Δ [%]	P_{kr}^z	Δ [%]
2x2	10	0.21635	+ 5.2	22.876	+ 11.3
10x2	2	0.20635	+ 0.4	20.647	+ 0.4
100x2	0.2	0.20564	< 0.1	20.563	< 0.1

Tabelle 5.2: P_{kr} bei Einspannung

sehr groben (2x2)-Elementierung besser genähert wird als P_{kr}^z liegt auf der Hand: Bereits Abb. (5.5) verdeutlicht, daß bei der (2x2)-Diskretisierung die Scheibe noch nicht

zu 100% lockingfrei ist. EI_z hängt von den Membraneigenschaften der Struktur ab, EI_y hingegen von den Biegeeigenschaften. DKT bildet den Zustand der konstanten Biegung bereits mit einem Element korrekt ab und ist per definitionem frei von transversalem Schublocking. Demzufolge muß die Konvergenz der kritischen Last im Falle der Biegung um die weiche Achse schneller sein als bei der steifen Achse.

5.1.5 Beulen einer Rechteckplatte

Auch eine zweidimensionale Struktur unter Querkontraktionseinfluß soll auf Stabilität untersucht werden. Es wird die kritische Beullast für den Fall der allseitig gelenkig gelagerten Rechteckplatte untersucht, da für diesen Fall noch eine analytische Abschätzung möglich ist. Als analytischer Vergleichswert für die kritische Knicklast nach der Theorie II. Ordnung ergibt sich [siehe z.B. TIMOSHENKO UND GERE (1961)]

$$p^{kr} = \pi^2 \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{j^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2 \frac{a^2}{j^2} \left[\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}} \right]. \quad (5.3)$$

Hierbei bedeuten a und b die Längenabmessungen der Platte, t die Dicke, E den Elastizitätsmodul und ν die Querkontraktionszahl. Die Indizes j und k stellen die Anzahl der Sinuswellen in Richtung der Längenabmessungen a bzw. b dar. Mit den Daten

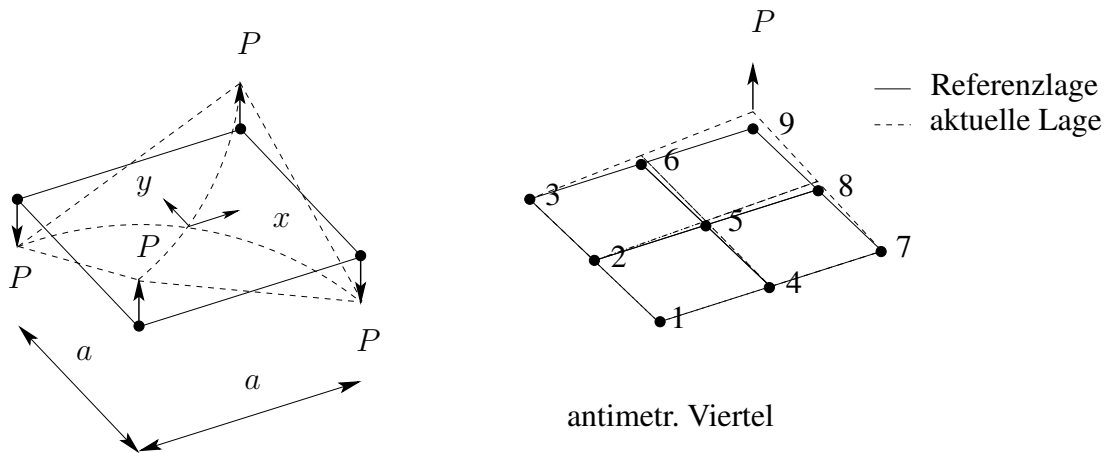
$$a = 80, b = 40, t = 1, E = 7000, \nu = 0.3$$

ergibt sich damit als kleinste kritische Beullast für $j=2$ und $k=1$ der Wert $p^{kr} = 632.7$. Hierbei wird nicht zwischen den Elementen Q1 und Q1E4 unterschieden, da zwischen

Netz	$\frac{a_1}{a_2}$	p^{kr}	Δ [%]
4x4	2	681.3	+7.6
8x4	1	670.2	+5.9
12x4	0.667	668.7	+5.7
16x4	0.5	668.1	+5.6
16x8	1	640.8	+1.3
40x20	1	635.0	+0.3

Tabelle 5.3: p^{kr} für verschiedene Netze

beiden Varianten keine numerischen Unterschiede festgestellt wurden. Das Verhältnis $\frac{a_1}{a_2}$ kennzeichnet weiterhin das Elementseitenverhältnis. Auch bei diesem Randwertproblem traten keine unphysikalischen Instabilitäten auf.



$$\begin{aligned}
 E &= 2.1 \cdot 10^5 & t &= 0.1 \text{ (Dicke)} \\
 a &= 10 & \nu &= 0.3 \\
 P &= 0.002
 \end{aligned}$$

Abbildung 5.7: Konstante Torsion

5.1.6 Reine Torsion einer Quadratplatte

Die Anforderung, konstante Krümmungen exakt darstellen zu können, beinhaltet bei zweidimensionalen Strukturen auch die Darstellbarkeit des Lastfalls Torsion, also die konstante Verwindung $\kappa_{xy} = \kappa_{xy0} = \text{konstant}$. Dieser Test spricht bei einer linearen Rechnung ausschließlich die Biegeterme an. Er wird für eine quadratische Platte gemäß Abb. (5.7) durchgeführt. Auf der linken Seite in Abb. (5.7) ist der Zustand konstanter Verwindung durch zwei gegensinnig orientierte Kräftepaare realisiert. Da der (2x2)-Verband aus Finiten Elementen eine Lagerung erfordert, wird der Zustand im FE-Programm durch die Berechnung eines Viertels der Platte unter Ausnutzung der Antimetriebedingungen berechnet. Es werden Antimetriefesseln in den Knoten 1, 2, 3, 4 und 7 angebracht. Die Platte wird am Knoten 9 in vertikaler Richtung belastet. Hierbei wird im Sinne der KIRCHHOFF Theorie gefordert, daß die an der freien Ecke aufgebrauchte Einzelkraft (als KIRCHHOFFsche Ersatzkraft) gerade dem negativen doppelten Torsionsmoment entsprechen muß. Ausgewertet werden die Verschiebung w_9^2 des Kraftangriffspunktes in Richtung der Kraft sowie die Torsionsmomente M_{xy} in den Integrationspunkten. Bereits mit nur einem Element ergibt sich $w_9 = 1.8571425 \cdot 10^{-3}$. Der exakte Wert ergibt sich zu $w_9 = \frac{6P(1-\nu^2)}{Et^3}xy = 1.8571429 \cdot 10^{-3}$. Tab. (5.4) zeigt die Werte des Torsionsmomentes in den Integrationspunkten. Ein unregelmäßiges Netz liefert identische Zahlenwerte. Damit verifiziert dieses Beispiel den *Torsions*-Patchtest des DKT-Ansatzes nach Abschnitt 4.2.12.

²Hierfür existiert eine analytische Lösung - siehe GIRKMANN (1963).

Element	Integrationspunkt	Torsionsmoment M_{xy}
1,2,3,4	1	-0.0010
	2	-0.0010
	3	-0.0010
	4	-0.0010

Tabelle 5.4: konstantes Torsionsmoment

5.1.7 Pinched Cylinder

Betrachtet wird ein Hohlzylinder mit starren Endscheiben nach Abb. (5.8). In der Symmetrieebene des Zylinders wirkt ein Paar von gegenüberliegenden Einzellasten, die den Zylinder in radialer Richtung zusammendrücken. Wegen der Symmetrie wird nur ein Achtel der Struktur betrachtet. Die Endscheiben des Zylinders sind starr. D.h. in diesen sind die Verschiebungen in der (X_1, X_3) -Ebene behindert. Der Rand kann sich nur in der X_2 -Richtung verschieben. Längs der Symmetrieränder sind entsprechende Symmetriefesseln angebracht. Die Belastung der Struktur ist gegeben als $P = 1$. Die Materialdaten sind $E = 3 \cdot 10^6$ und $\nu = 0,3$. Die Abmessungen des Zylinders betragen $R = 300$, $\ell = 600$; die Dicke beträgt $t = 3$.

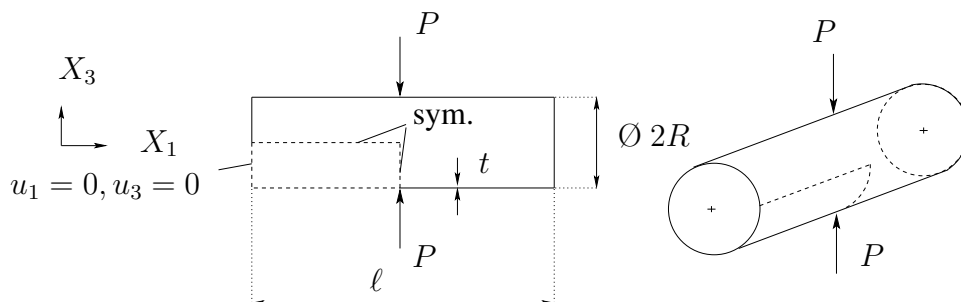


Abbildung 5.8: Geometrie und Belastung am Pinched Cylinder

Viele Autoren benutzen dieses Randwertproblem als Testbeispiel, z.B. SIMO, FOX & RIFAI (1989), ANDEFINGER (1991) und SCHOOP (1989). Auch für dieses Beispiel werden wieder Konvergenzuntersuchungen durchgeführt. Manche Autoren geben als Vergleichswert die Verschiebung des Lastangriffspunktes w_P in Lastrichtung als Absolutwert, andere in normierter Form an. Zu Vergleichszwecken werden hier die Verschiebungen normiert. In Anlehnung an SCHOOP (1989) werden daher in Abb. (5.10) die Werte in der Normierung $\hat{w} = w_P \frac{Et}{P}$ angegeben. In Abb. (5.9) ist das Konvergenzverhalten für das Q1E4-Element im Vergleich zum Q1-Element angegeben. Bei den Abmessungen $\frac{t}{R} = \frac{1}{100}$ und $\frac{t}{\ell/2} = \frac{1}{100}$ gilt die Schale als dünn. Damit sind Schubverformungen von untergeordneter Bedeutung und das Problem kann als biegedominant angesehen werden. Eine Extrapolation der Werte nach Abb. (5.9) liefert für die

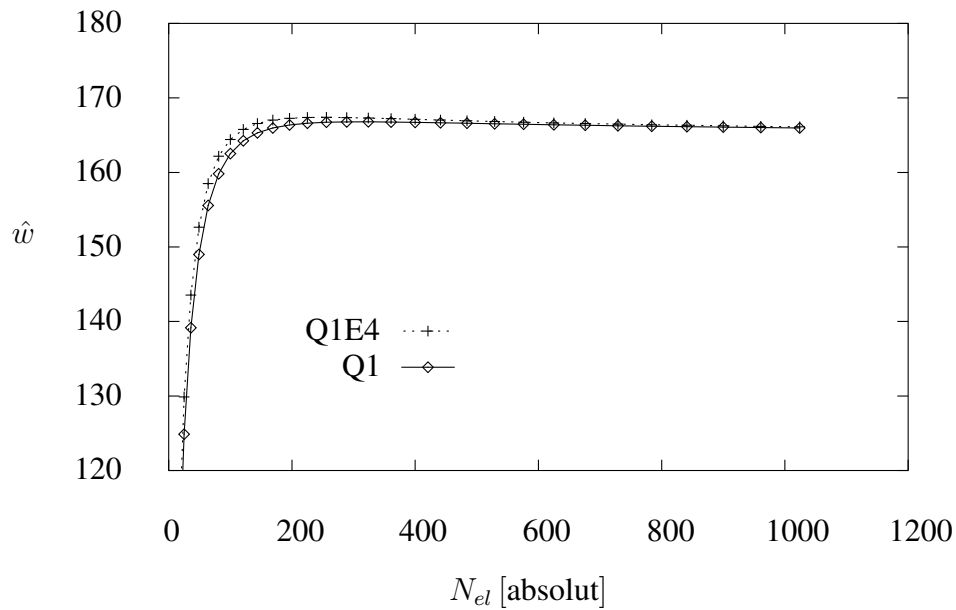


Abbildung 5.9: Konvergenz im Vergleich (Q1 und Q1E4)

normierte Verschiebung des Q1E4-Elementes den Wert $\hat{w} = 165.086$. Der Einfluß stark veränderlicher Membranterme auf die Verschiebung \hat{w} ist bei diesem Lastfall nicht maßgeblich, da die Konvergenzkurven für beide Elementvarianten nicht stark voneinander abweichen. Diese Feststellung wird unterstützt durch die Untersuchungen von HAUPTMANN (1997). Die Konvergenz ist ausgesprochen gut. Die EAS-

Nummer	Elementtyp
1	SIMO, FOX & RIFAI (1989)
2	ANDELFINGER (1991)
3	Q1
4	Q1E4

Tabelle 5.5: Legende zu Abb. (5.10)

Formulierung zeigt ein geringfügig weicheres Verhalten als die rein bilineare Formulierung; sie stimmt überein mit dem von SIMO, FOX & RIFAI (1989) vorgeschlagenen Element. Das Element von ANDELFINGER (1991) beinhaltet Querschubverzerrungen, die nach der ANS-Methode behandelt werden, und modelliert das Biegeproblem auch mittels EAS. Demgegenüber zeigt sich die DKT-Formulierung deutlich überlegen. Die Last P wird über eine Membrankraft in Umfangsrichtung und Biegemomente abgetragen. Augenscheinlich dominiert die Biegung das Problem.

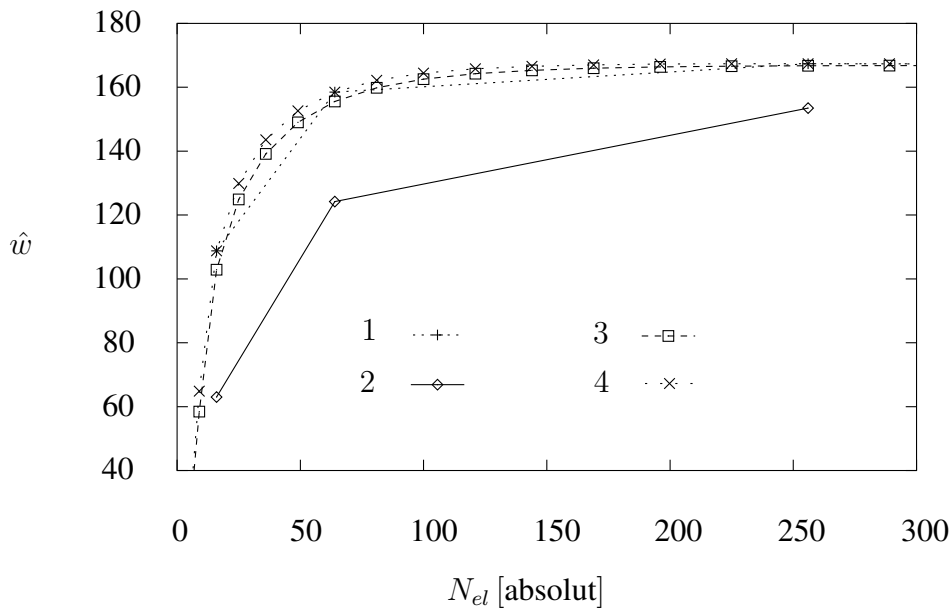


Abbildung 5.10: Konvergenz im Vergleich mit der Literatur

5.1.8 Pinched Hemisphere

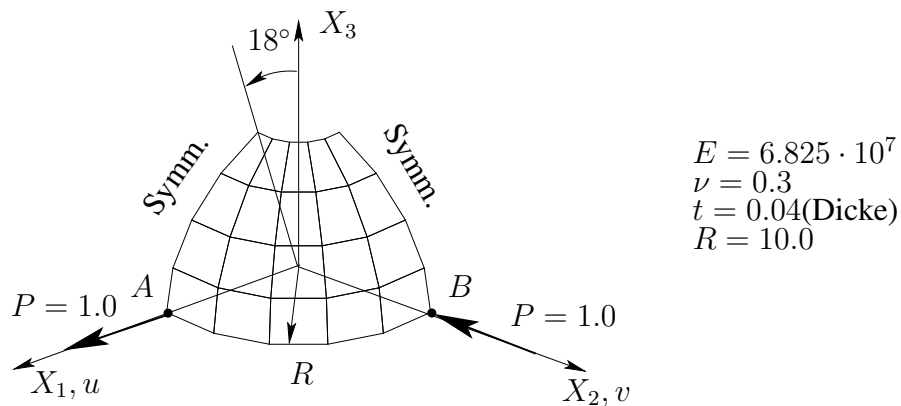


Abbildung 5.11: Pinched Hemisphere

Die in Abb. (5.11) skizzierte Achtelkugelschale mit einer Öffnung am Nordpol wird in der Literatur als *pinched hemisphere* bezeichnet. Belastet wird das Tragwerk durch zwei Einzelkräfte, die in der Äquatorebene entgegengesetzt in radialer Richtung wirken [siehe Abb. (5.11)]. Die Belastung ist bestrebt, die Schale oval zu verformen. Bei einem Verhältnis $\frac{t}{R} = \frac{1}{250}$ ist das Problem als biegedominiert anzusehen. In erster Linie muß sich also das DKT-Konzept bei diesem Beispiel bewähren. Große Unterschiede bei der Lösung zwischen Q1- und Q1E4-Element sind hingegen nicht zu er-

warten. Diese Struktur wird von vielen Autoren als Testbeispiel herangezogen, u.a. von BÜCHTER (1992), MACNEAL UND HARDER (1985), SIMO, FOX & RIFAI (1989) und DING (1989). Als Benchmark dient der Wert für die Verschiebung $u_A = v_B$ (lineare Rechnung!) der Kraftangriffspunkte (A,B) in Richtung der Kraft. Die Konvergenz ist in Abb. (5.12) für verschiedene Elementformulierungen im Vergleich dargestellt. Als Referenzlösung werden in der Literatur verschiedene Werte genannt. Während

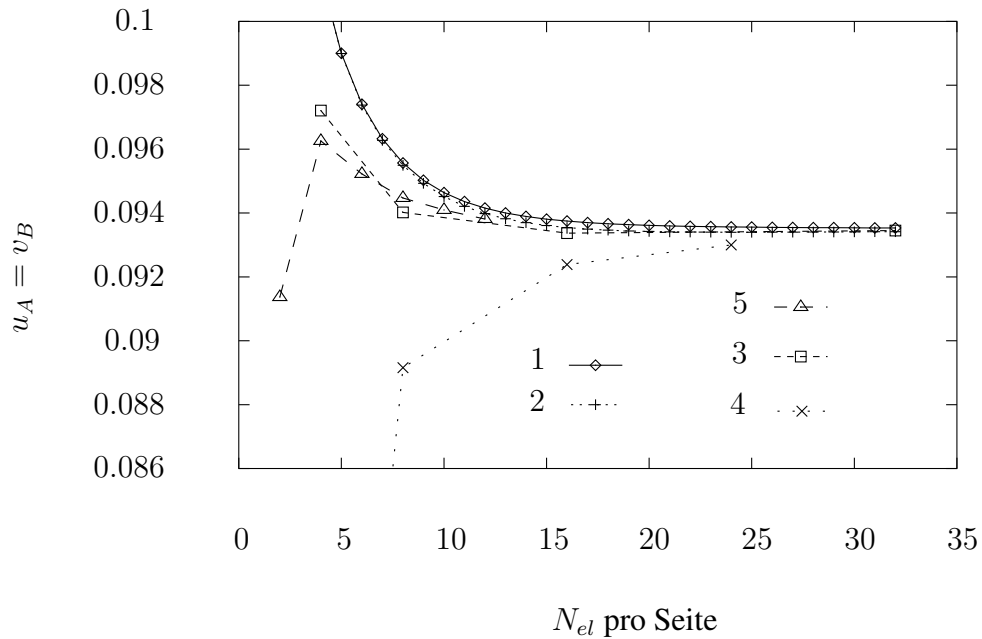


Abbildung 5.12: Konvergenzstudie Pinched Hemisphere

Nummer	Elementtyp
1	Q1E4
2	Q1
3	BÜCHTER (1992)
4	DING (1989)
5	MACNEAL UND HARDER (1985)

Tabelle 5.6: Legende zu Abb. (5.12)

MACNEAL UND HARDER (1985) $u_A = v_B = 0.094$ angeben, wird von SIMO, FOX & RIFAI (1989) $u_A = v_B = 0.093$ genannt. BÜCHTER (1992) gibt $u_A = v_B = 0.09358$ an. Das Element Q1E4 konvergiert gegen $u_A = v_B = 0.09352$ (extrapoliert nach RICHARDSON). Im Vergleich hierzu ist die Lösung von BÜCHTER (1992) nur 0.1% weicher.

Nummer	Element	$u_A = v_B$	Δ
1	Q1E4	0.09557	+ 2.2 %
2	Q1	0.09549	+ 2.1 %
3	BÜCHTER (1992)	0.09402	+ 0.5 %
4	DING (1989)	0.08916	-4.4 %
5	MACNEAL UND HARDER (1985)	0.09447	+ 1.0 %

Tabelle 5.7: u_A, v_B im Vergleich beim (8x8)-Netz

Das von DING (1989) als SDFR20-B eingeführte 4-Knotenelement gehört zur Klasse der gemischten Finiten Elemente. Es interpoliert die Verschiebungsfreiwerte bilinear und verwendet 14 Spannungsparameter. Gegenüber der EAS-Formulierung zeichnet es sich durch eine langsamere Konvergenz aus. Aus diesem Blickwinkel erscheint der höhere elementinterne Aufwand beim Typ SDFR20-B nicht als gerechtfertigt. Das Element nach BÜCHTER (1992) konvergiert etwas schneller als das vorgeschlagene EAS-Element Q1E4. Auffällig ist der sprunghafte Verlauf der Konvergenz des Nastran-Elementes Quad4 nach MACNEAL UND HARDER (1985).

Die Kurve 2 des Q1-Elementes ist quasi kongruent zur Kurve 1 des Q1E4-Elementes. Im Vergleich zwischen diesen beiden Elementen ergeben sich nur geringfügige Unterschiede. Die Membranzustände im Tragwerk werden offensichtlich bereits durch die rein lineare Interpolation gut erfaßt, d.h. es sind keine extremen Gradienten in den Membranzuständen im Deformationsverhalten zu vermuten. Das Q1E4-Element konvergiert gegen $u_A = v_B = 0.09352$ (extrapoliert nach RICHARDSON). Zusammenfassend sind in Tab. (5.7) für eine (8x8)-Diskretisierung die Werte der Verschiebung des Lastangriffspunktes im Vergleich angegeben. Dabei sind die prozentualen Abweichungen bezogen auf den (extrapolierten) Referenzwert $u_A = v_B = 0.09352$ angegeben. Dieser wird als Benchmark angesehen.

5.1.9 COOKS Scheibe

Ein exzellentes Beispiel zum Testen der Membraneigenschaften ist die in Abb. (5.13) dargestellte trapezförmige Scheibe der Dicke $t = 1$. Als Materialwerte sind angenommen $E = 1.0$ und $\nu = 0.33$, die Belastung wird in der skizzierten Richtung wirkend über alle Randknoten verteilt aufgeprägt. In der Literatur wird dieses Problem als *COOKS membrane problem* zitiert. Verglichen wird die vertikale Verschiebung w_A des Punktes A abhängig von der Anzahl der Elemente. Hierbei wird die vorliegende EAS-Formulierung verglichen mit SIMO, FOX & RIFAI (1989) und POCESKI (1996). Als Referenzwert zitieren SIMO ET AL. und POCESKI die Lösung nach JANG UND PINSKY (1987), die auf der Lösung eines 9-Knoten-Viereckselementes basiert. Der dort angegebene Wert von $w_A = 23.911$ wird als auskonvergiert ange-

sehen³, wobei eine Berechnung mit einer 32x32 Diskretisierung zugrunde liegt. Allerdings vermutet bereits POCESKI, dieser allgemein gebräuchliche Vergleichswert sei etwas zu steif. POCESKI gibt für sein Element einen nach RICHARDSON extrapolierten Wert von $w_A = 24.127$ an. Extrapoliert man die Werte von SIMO, FOX & RIFAI

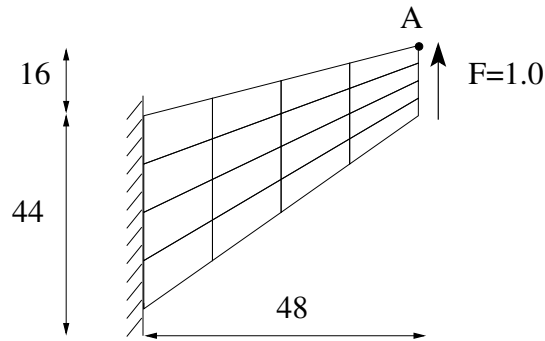


Abbildung 5.13: Geometrie für Cook's Membrane

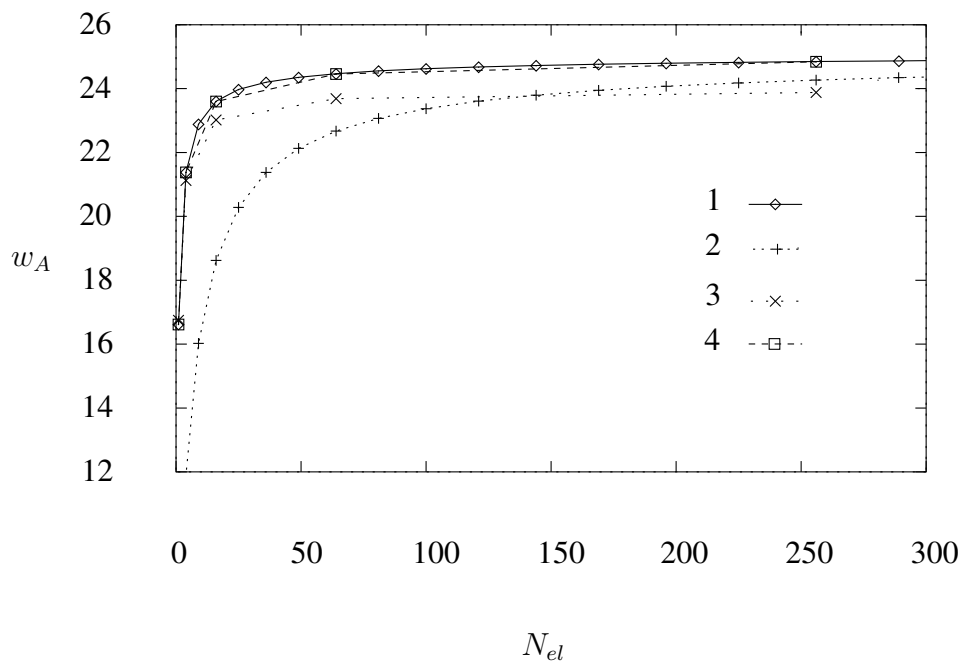


Abbildung 5.14: Konvergenz im Vergleich

(1989), erhält man $w_A = 23.957$. Hierbei stützt sich die RICHARDSON Extrapolation auf die Verschiebungswerte für je eine Diskretisierung mit 16, 64 und 256 Elementen. Abb. (5.14) zeigt wiederum die exzellente Performance des Q1E4-Elementes gegenüber dem Q1-Element. Nach RICHARDSON extrapoliert strebt das Q1E4-Element

³Bezogen auf die Rechenleistungen, die von den Autoren 1987 genutzt wurden.

Nummer	Elementtyp
1	Q1E4
2	Q1
3	SIMO, FOX & RIFAI (1989)
4	POCESKI (1996)

Tabelle 5.8: Legende zu Abb. (5.14)

gegen den Wert $w_A = 25.053$. Die viel zitierte Lösung nach JANG UND PINSKY (1987) $w_A = 23.911$ ist damit auch im Vergleich mit der hier verwendeten Formulierung als zu steif anzusehen. In Tab. (5.9) sind die Werte verschiedener Elemente für eine (8x8)-Elementierung zusammengefaßt. Es werden jeweils die Abweichungen vom Wert $w_A = 25.053$ angegeben, der als Referenzwert fungiert. Bemerkenswerterweise

Element	w_A	Δ
Q1	22.671	-9.5 %
Q1E4	24.459	-3.4 %
POCESKI	23.93	-4.5 %
SIMO, FOX & RIFAI (1989)	23.685	-5.5 %
ANDELFINGER (1991)	23.680	-5.5 %

Tabelle 5.9: w_A im Vergleich für ein (8x8)-Netz

schlägt die Q1E4-Variante die EAS-Formulierung von ANDELFINGER (1991).

5.1.10 RAASCHS Haken

Ein besonderes Beispiel stellt der in der Literatur unter dem Namen RAASCH *challenge* bekannte Lastfall dar, der u.a. von KNIGHT (1996) und KEMP, CHO & LEE (1998) diskutiert wurde. Hierbei handelt es sich um ein dünnwandiges Blech, das zu einem Haken gebogen ist - wie in Abb. (5.15) skizziert. Der Haken ist einseitig eingespannt und wird am freien Ende belastet durch eine in der Tangentialebene wirkende Randkraft $F = 1$, die auf alle Randknoten verteilt wird. Damit ergibt sich infolge der Krümmung (in erster Linie) eine Koppelung von Torsions- und Biegebelastung. Detaillierte Untersuchungen sowie die Herleitung einer analytischen Lösung des Problems mit Mitteln der Balkentheorie sind bei SCHOOP, HORNIG & WENZEL (2002) angegeben.

Für die in der Literatur von KNIGHT (1996) zitierten Werte wurden die Berechnungen mit einer Querkontraktionszahl $\nu = 0.35$ und einem Elastizitätsmodul $E = 3300$

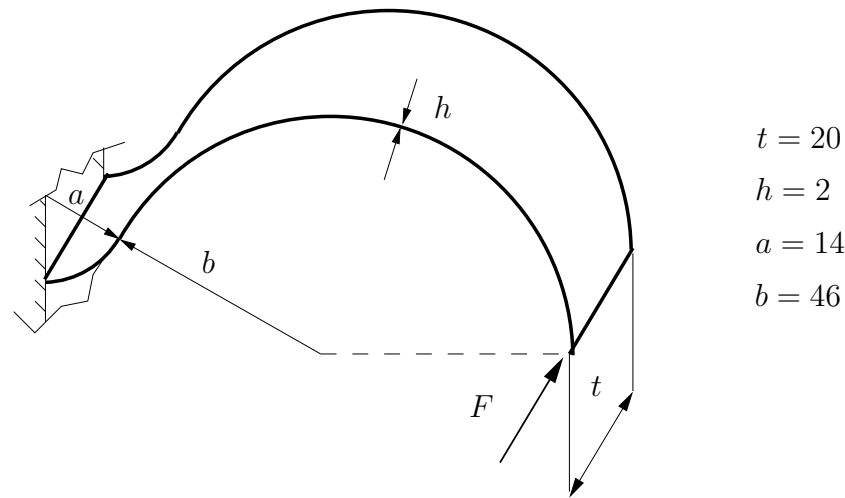


Abbildung 5.15: RAASCH Haken

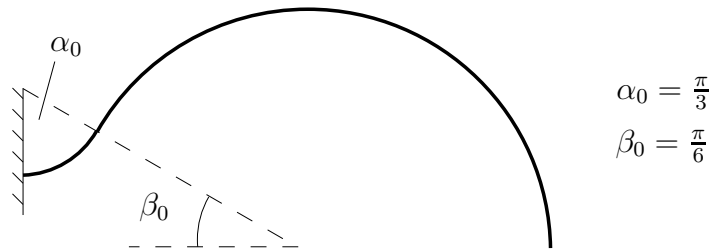


Abbildung 5.16: Geometrie des RAASCH Hakens

durchgeführt. Die genannten Elementierungen wurden zu Vergleichszwecken mit den Elementen Q1, Q1E4 und den beiden Abaqus-Elementen S4 und S4R5 berechnet. Die Rechenergebnisse sind in Tab. (5.10) zusammengestellt. Als möglichen (näherungsweise) Vergleichswert erhält man nach SCHOOP, HORNIG & WENZEL (2002) die Lösung nach der Theorie des gekrümmten dünnwandigen Stabes mit Wölb torsion zu 4.74565 für den zu $\nu = 0.35$ gehörigen Gleitmodul $G = 1222.22$. Die beiden Abaqus-Elemente streben von unten gegen einen deutlich höheren Wert sowohl gegenüber der Vergleichslösung als auch gegenüber den Elementen Q1 und Q1E4. Sie bilden die Struktur also weicher ab. Nach ABAQUS (2001) ist das S4 ein *general purpose* Schalenelement, das auf der Degeneration eines Volumenelementes basiert, also sechs Freiheitsgrade pro Knoten besitzt. Das Element S4R5 hingegen modelliert mit fünf Freiwerten pro Knoten und löst das Biegeproblem nach DKT. Beide Elemente wurden voll integriert. Die Daten für die Elementtypen 4STG, 4HYP und 3DKT wurden KNIGHT (1996) entnommen. Das Element 4STG wird von KNIGHT als reines Weggrößeelement angegeben, während 4HYP als hybrides Element mit einer *assumed stress* Formulierung bezeichnet ist. Zum Vergleich ist noch als einziges Dreieckselement das ebenfalls von KNIGHT (1996) referenzierte DKT-Element 3DKT angege-

Elementierung	Verschiebung w_{tip} [in]						
	Q1	Q1E4	S4	S4R5	4STG	4HYP	3DKT
1x9	4.844	4.853	4.852	28.582	4.4718	5.7061	4.1855
3x17	4.750	4.753	4.867	4.799	4.6381	5.7633	4.6011
5x34	4.727	4.728	4.95	4.829	4.6944	6.8392	4.6776
10x68	4.721	4.721	5.009	4.889	4.7087	10.7424	4.7042
20x136	4.719	4.720	5.033	4.964	4.7121	24.2047	4.6781

Tabelle 5.10: Verschiedene Elemente im Vergleich

ben. Die berechneten Verschiebungen w_{tip} sind gemeinsam in Abb. (5.17) dargestellt. Augenfällig ist zunächst die bereits von KNIGHT beobachtete Divergenz des hybriden

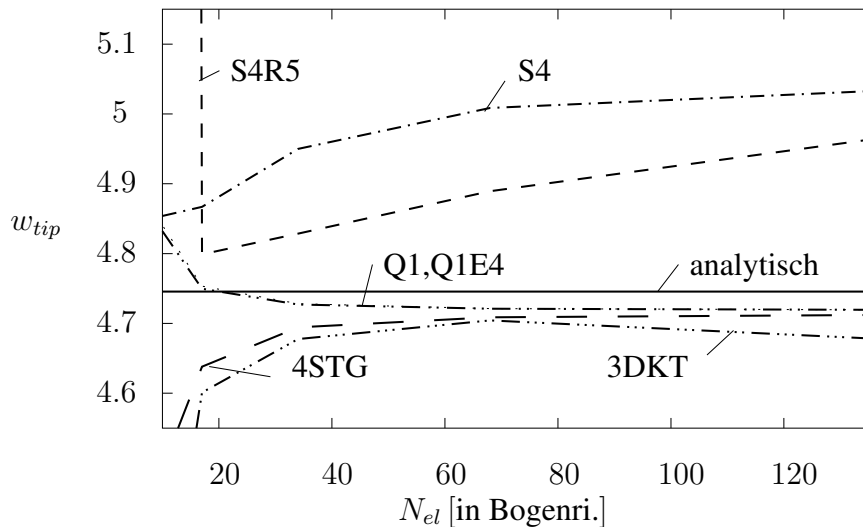


Abbildung 5.17: Konvergenz

Elementes 4HYP, dessen Ergebnisse demzufolge in Abb. (5.17) nicht dargestellt sind. Ebenfalls erstaunlich ist, daß das 3DKT-Element zwar bei der feinsten Elementierung einen sinnreichen Wert annimmt, aber ebenfalls keine saubere Konvergenz zeigt. Die Elemente S4R5 und S4 konvergieren von unten gegen einen weicheren Wert als die beiden Elemente Q1 und Q1E4, die von oben her gegen einen steiferen Wert konvergieren. Extrapoliert nach RICHARDSON ergibt sich für die beiden Elemente Q1 und Q1E4 ein Wert von 4.7189. In Abb. (5.17) liegen die Kurven der beiden Elemente Q1 und Q1E4 quasi übereinander. Die beste Übereinstimmung bei der feinsten Elementierung (20x136) ergibt sich für das Element 4STG, das um weniger als 0.1% von diesem Wert abweicht. Das ABAQUS S4-Element ist um 5.2% weicher, das ebenfalls auf fünf Freiheitsgraden basierende DKT-Element S4R5 weicht um 6.7% ab. Bezogen auf den

Vergleichswert 4.74565 ist die nach RICHARDSON extrapolierte Lösung der Elemente Q1 und Q1E4 nur um 0.6% weicher. Im Verhältnis zu den mit den *geeichten* Elementen Q1 oder Q1E4 ermittelten Lösungen werden mit Volumenelementen deutlich weichere Resultate erzielt. Eine Volumenelementlösung für die feinste Elementierung wird von KNIGHT (1996) mit 4.9352 angegeben für den Elementtyp 8HYP, während eine Rechnung mit Abaqus für das Element C3D20R sogar auf 5.035 führt. Dem gegenüber steht der auf der Stabtheorie nach WLASSOW (1964) basierende Wert von 4.74565, der eine um 5.7% steifere Endverschiebung erwarten läßt.

5.2 Nichtlinear elastische Beispiele

Während man in der Theorie I. Ordnung von biegedominierten Schalenproblemen sprechen kann, ist bei wirklich nichtlinearen Beispielen zu beachten, daß Membran- und Biegezustand stets miteinander gekoppelt sind. (Ausgenommen sind reine Scheibenprobleme.)

5.2.1 Pinched Hemisphere

Geometrie und Materialdaten bleiben gegenüber Abschnitt 5.1.8 unverändert. Die Last wird nun inkrementiert mit 10 Schritten à $\Delta F = 10.0$. Die Berechnung erfolgt geometrisch nichtlinear hyperelastisch, wobei die Struktur mit einem (16x16)-Netz (Vierecke) diskretisiert wird. Bei einem strukturierten Netzgenerator, der je ein Viereck in zwei Dreiecke teilt, entspricht das einem (32x32)-Dreiecksnetz bei gleicher Anzahl von Freiheitsgraden, da die Anzahl der Knoten unverändert ist. Es werden sowohl das NEO-HOOKE als auch das ST.VENANT-KIRCHHOFF Materialmodell untersucht. Die Durchbiegungen in den Lasteinleitungsstellen u_A (Zugseite) und v_B (Druckseite) dienen wie bereits bei der linearen Analyse als Benchmark. Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Form von Last-Verformungskurven in Abb. (5.18) dargestellt. Obwohl die maximalen Verzerrungen Werte von etwa 6% erreichen, differieren die berechneten Verformungen u_A und v_B abhängig vom verwendeten Materialgesetz (ST. VENANT-KIRCHHOFF bzw. NEO-HOOKE um weniger als 1%. Die Kurven sind kongruent im Rahmen der Zeichengenauigkeit, weshalb Abb. (5.18) nicht zwischen ST.VENANT-KIRCHHOFF und NEO-HOOKE unterscheidet. Die Linien stellen die Ergebnisse des Dreieckselements DKT3D dar, die Rauten- bzw. Kreuzsymbole beziehen sich auf das Viereckselement von BÜCHTER (1992). Die Übereinstimmung ist sehr gut.

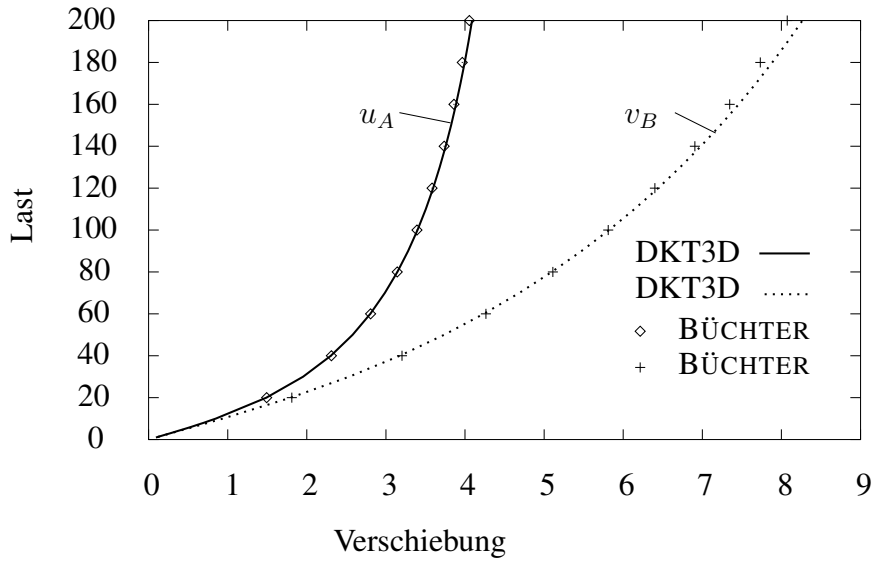


Abbildung 5.18: Last-Verformungskurve (Pinched Hemisphere)

5.2.2 COOKS Scheibe

Die in Abb. (5.13) skizzierte Scheibe wird unter denselben Bedingungen wie in Abschnitt 5.1.9 geometrisch nichtlinear berechnet. Hierbei wird einerseits anhand des ST. VENANT-KIRCHHOFF Materials geprüft, inwieweit durch die Elementvariante Q1E7 eine weitere Verbesserung gegenüber dem Element Q1E4 erzielt werden kann.

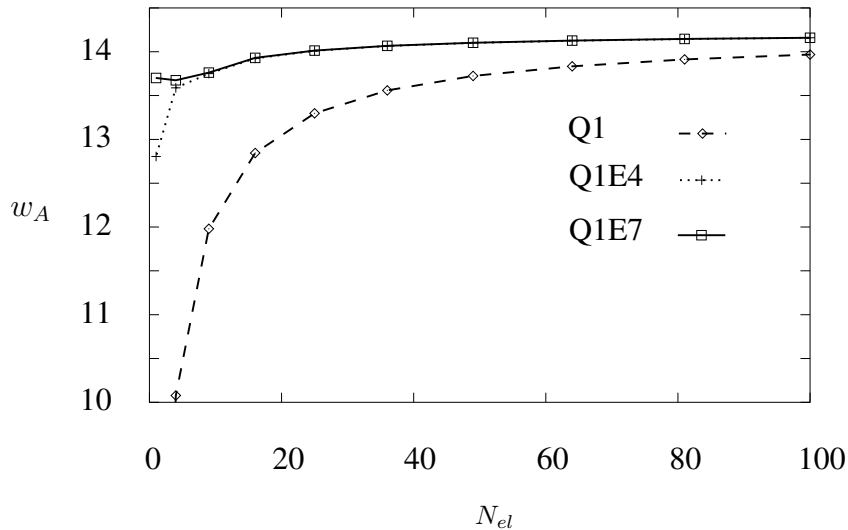


Abbildung 5.19: Konvergenz im Vergleich (ST. VENANT-KIRCHHOFF Material)

Andererseits wird anhand des NEO-HOOKE Stoffes geprüft, inwieweit die dreidimensionale Formulierung des Stoffgesetzes nach Abschnitt 3.1.2 in Zusammenhang mit

der numerischen Lösung des Problems des ebenen Spannungszustandes nach Anhang C übereinstimmt mit der zweidimensionalen Formulierung des Stoffgesetzes in Abschnitt 3.2.2. Weiterhin wird untersucht, inwieweit die Variante der vorgeschlagenen EAS-Formulierung nach Kapitel 4.2.3 sich von der nach BISCHOFF UND RAMM (1997) im Ergebnis unterscheidet. Die Abb. (5.19) zeigt, daß der Vorteil der siebenparametrischen Formulierung gegenüber dem Q1E4-Element bei strukturierten Netzen verschwindet. Das Ergebnis der nichtlinearen Analyse konvergiert nach RICHARDSON extrapoliert gegen den Wert $w_A = 14.258$, was mit den Berechnungen von KLINKEL (2000) in Einklang steht. Die Ergebnisse des Vergleichs der zweidimensionalen Be-

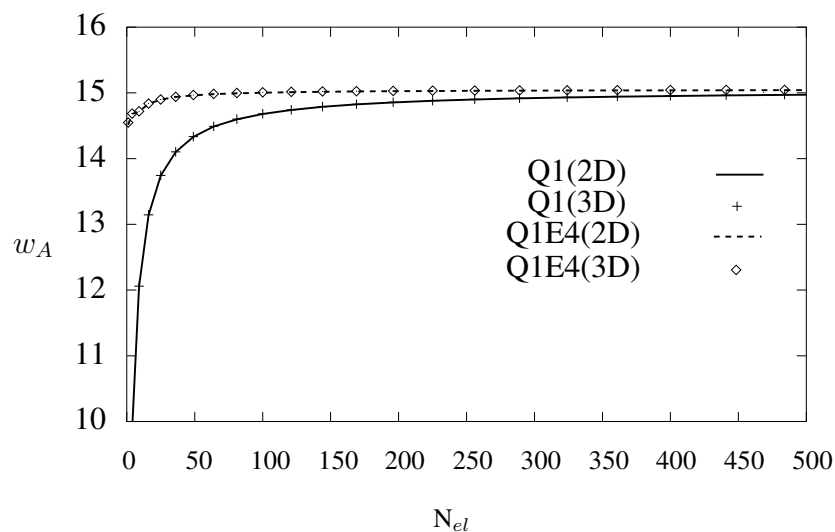


Abbildung 5.20: Konvergenz von 2D- und 3D-Formulierung (NEO-HOOKE Material)

rechnung mit der dreidimensionalen Berechnung inklusive Iterations- und Kondensationsverfahren (für ϵ_{33} bzw. $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$) sind in Abb. (5.20) dargestellt. Die Übereinstimmung ist sehr gut. Damit ist das kombinierte Iterations- und Kondensationsschema validiert (exemplarisch). Extrapoliert erhält man im Fall des NEO-HOOKE Materials die Lösung $w_A = 15.052$. Hält man sich die einachsigen Kurven der Abb. (3.1) im Kapitel 3 vor Augen, ist es plausibel, daß die Lösung des NEO-HOOKE Stoffes sich weicher verhält als die des ST. VENANT-KIRCHHOFF Materials. Die numerischen Werte unterscheiden sich gegenüber den zweidimensionalen Ergebnissen gemäß Abschnitt 3.2.2 lediglich nach der dritten bzw. vierten Kommastelle. Es ist bemerkenswert, daß die Übereinstimmung auch im nichtlinearen Bereich derartig gut ist, denn das in Abschnitt 3.2.2 angenommene Materialgesetz ist aus einer Grenzwertbildung im Übergang auf die Theorie I. Ordnung entwickelt worden. Von diesem Standpunkt her wären im geometrisch Nichtlinearen durchaus stärkere Abweichungen vorstellbar gewesen. Abb. (5.21) zeigt den unterschiedlichen Konvergenzverlauf für die beiden

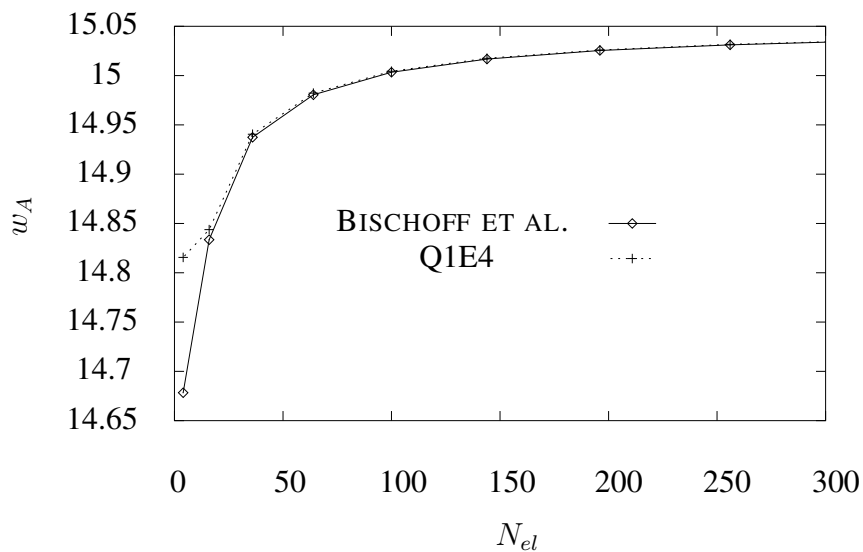


Abbildung 5.21: Konvergenz verschiedener EAS-Varianten

verschiedenen EAS-Varianten. Es ist ersichtlich, daß beide Formulierungen gleichwertig sind. Sie streben demselben Wert zu, lediglich für sehr wenige Elemente erscheint die Formulierung nach Abschnitt 4.2.3 vorteilhafter.

5.2.3 Orthotrope Kreisplatte

Der Gegenstand der Untersuchung ist eine Kreisplatte nach Abb. (5.22), die im Zentrum durch eine Einzelkraft in Querrichtung belastet wird. Die Plattendicke beträgt $t = 0.625$, der Außenradius beträgt $R = 50$ und der Radius am Lager $R_i = 46$. Die Platte ist horizontal verschieblich gelenkig gelagert. Dieses Problem tritt bei in der Halbleiterindustrie üblichen Waferplatten auf, an die sich die Material- und Geometriedaten anlehnen. Als Materialmodell ist das von ST.VENANT-KIRCHHOFF angenommen. Die Struktur ist als moderat orthotrop anzusehen, denn die Steifigkeiten lauten in VOIGT Notation

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 119000 & 53800 & 0 \\ 53800 & 119000 & 0 \\ 0 & 0 & 59000 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Eine Abweichung von der Isotropie ergibt sich infolge der Schubsteifigkeit, deren Wert etwa 80% über dem zugehörigen isotropen Wert von $C_{33} = 32600$ liegt. Die Struktur wird infolge der Symmetrie als Viertelplatte berechnet mit 150 Elementen und 401 Freiwerten. Die Berechnung erfolgt geometrisch nichtlinear in Lastinkrementen von $P = 5$ bis zu einer Gesamtlast $P = 150$. Die Ergebnisse der Mittendurchsenkung w_m abhängig von der Belastung sind in Abb. (5.24) angegeben, d.h. Abb. (5.24) beschreibt die zugehörige Last-Verformungskurve.

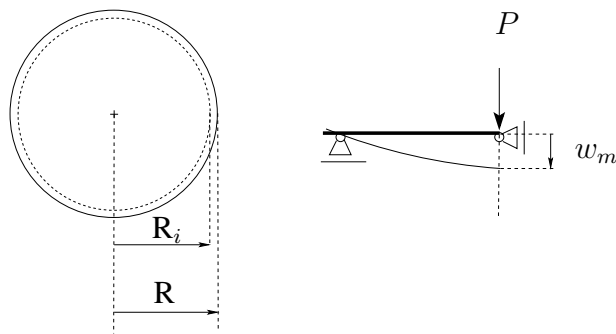


Abbildung 5.22: Waferplatte unter Einzelkraft

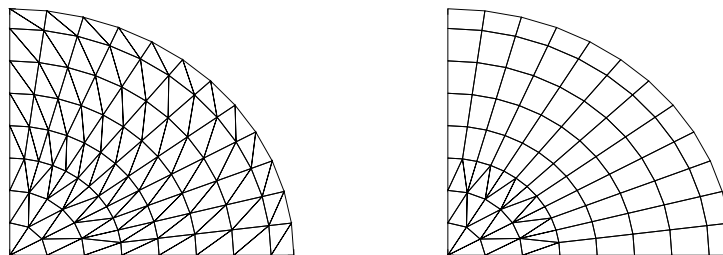


Abbildung 5.23: Verwendete Netze

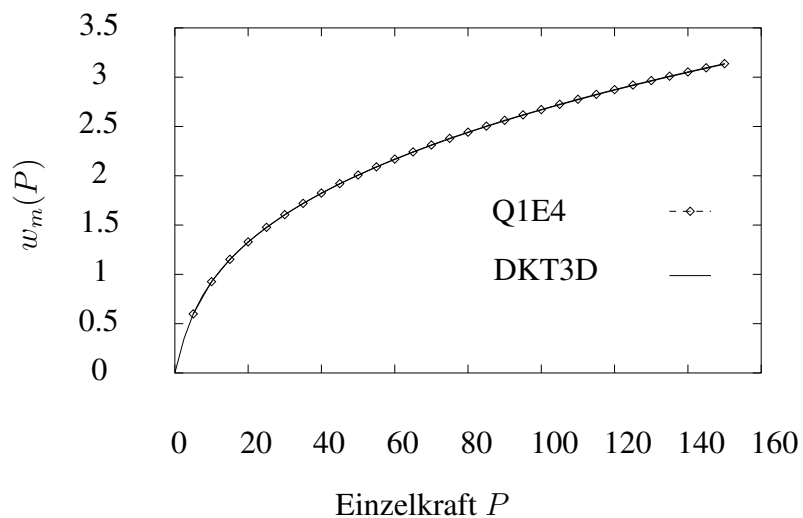


Abbildung 5.24: Verformungs-Lastkurve (Waferplatte)

Die Linie stellt die Ergebnisse einer Berechnung mit dem Element DKT3D dar, die Rautensymbole kennzeichnen die Ergebnisse einer Berechnung mit dem Element Q1E4. Die zugrunde gelegten Netze sind in Abb. (5.23) dargestellt. Es zeigt sich, daß das Tragverhalten offensichtlich nicht von starken Membrandehnungsgradienten geprägt ist, da die Verbesserung durch das EAS-Element gegenüber dem *constant-strain*

Dreieckselement praktisch keine Auswirkung auf die Mittendurchsenkung hat (bei einem Netz mit acht Ringen in radialer Richtung). Betrachtet man die Neigewinkel normal zum Plattenrand, erkennt man dort keinen signifikanten Einfluß der Orthotropie. Längs des Umfanges variiert der Neigewinkel numerisch zwischen -4.294° und -4.332° . Sein Maximum liegt unter 45° an der Diagonale der Viertelplatte. Die Netzstruktur der Dreiecksdiskretisierung induziert eine leichte Verletzung der Symmetriebedingung an den Rändern 0° und 90° . Dieser Effekt wird jedoch gemittelt, wenn man die Viertelplatte an den Symmetrierändern spiegelt.

5.3 Elasto-plastische Beispiele

5.3.1 Rechteckplatte unter Eigengewicht

Als elasto-plastisches Beispiel wird eine Rechteckplatte gemäß Abb. (5.25) unter konservativer Belastung berechnet (Steigerung des Eigengewichtes). Die Ränder der Platte sind gelenkig gelagert und erlauben eine Horizontalverschiebung. Die Aufprägung der Last erfolgt in Inkrementen $\Delta q = 0.1$. Mit der Mittendurchsenkung w_M in Abhängig-

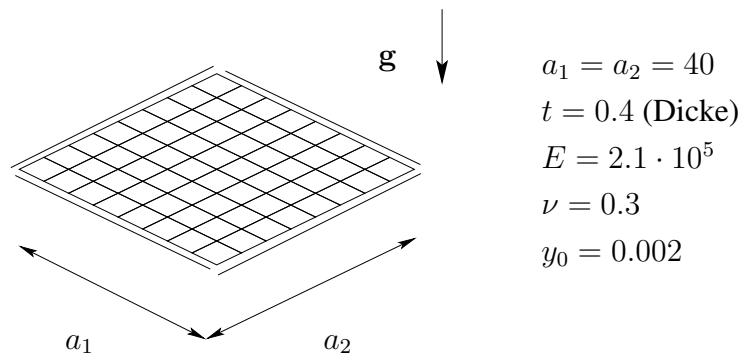


Abbildung 5.25: Rechteckplatte

keit von der Anzahl der Elemente ergibt sich die Konvergenzstudie nach Abb. (5.26). Die Rechnung basiert auf einer Laststufe $q = 20 \cdot \Delta q = 2.0$. Berechnet wurde ein symmetrisches Viertel der Platte. Da das Problem offensichtlich biegedominiert ist, fällt die Konvergenzverbesserung durch das Q1E4-Element nicht exorbitant aus. Aber eine geringfügige Qualitätssteigerung ist vorhanden, und außerdem validiert dieses Beispiel auch die Anwendbarkeit des in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Verfahrens im Bereich inelastischen Materialverhaltens.

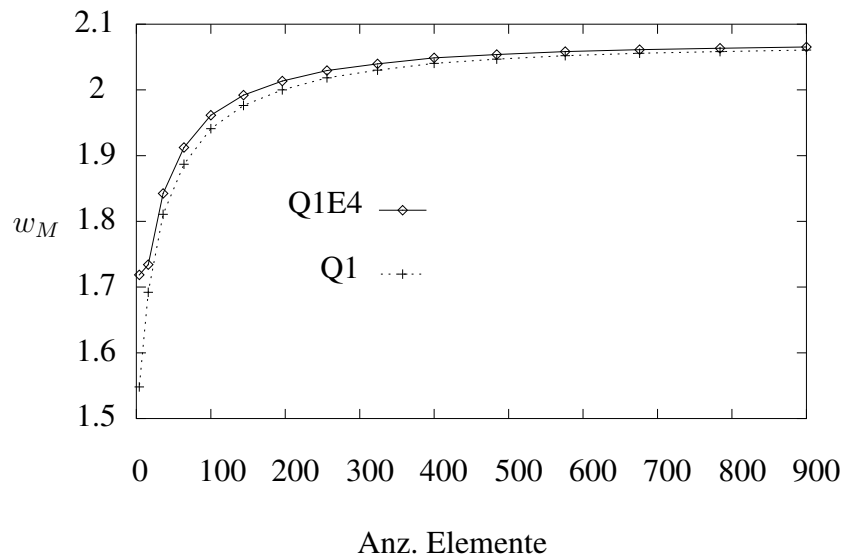


Abbildung 5.26: Q1 und Q1E4 im Vergleich

Die Last-Verformungskurve für das aus Symmetriegründen berechnete Viertel der Platte ist für eine (20x20)-Diskretisierung in Abb. (5.27) skizziert. Die Rautensymbole des Q1-Elementes liegen sämtlich auf der Q1E4-Kurve, was eine gute Übereinstimmung der Resultate anzeigt. Um ein Gefühl für das Deformationsverhalten

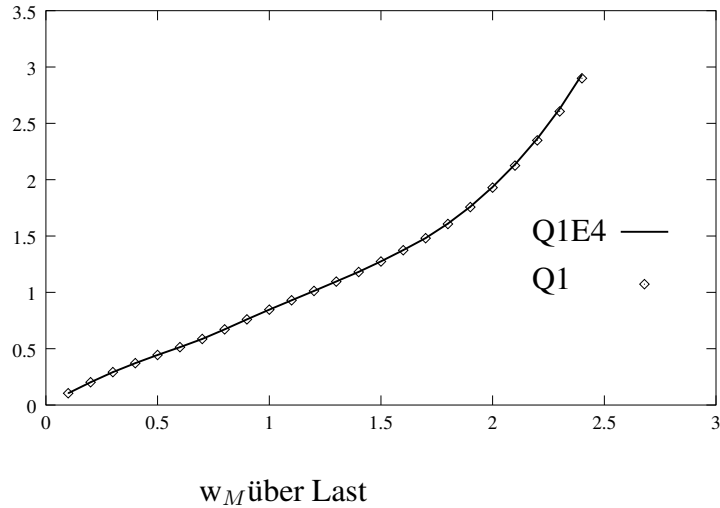


Abbildung 5.27: Last-Verformungskurve

der Platte zu bekommen, ist in Abb.(5.28) noch die deformierte Konfiguration nach dem Lastschritt $q = 55 \cdot \Delta q = 5.5$ skizziert. Die Ziffern geben die Anzahl der plastizierten Schichten an. Da mit Schichtpunkten gerechnet wurde, bedeuten fünf plastizierte Punkte eine Vollplastizierung des Querschnitts im zugehörigen (Flächen-)integrationspunkt. Man erkennt, daß die Symmetrie gewahrt bleibt, und daß die Plasti-

zierung in den Ecken am stärksten ist, da dort durch die Zwängung starke Krümmungen auftreten. Längs der Außenränder ist die Platte praktisch voll plastiziert.

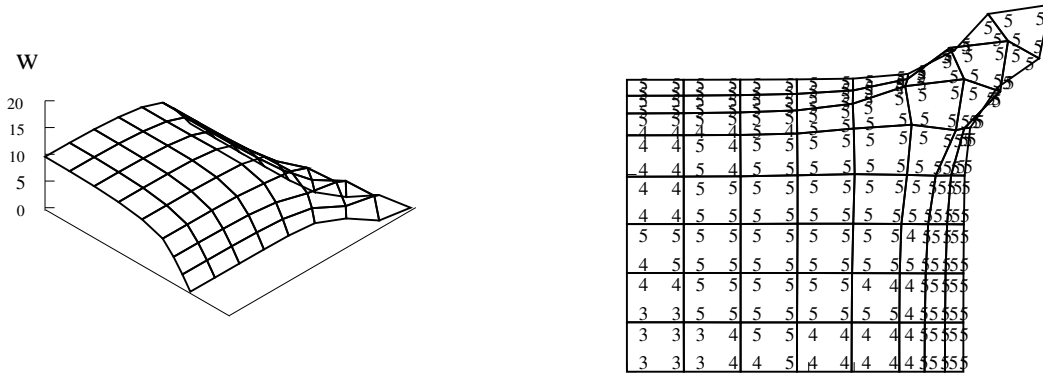
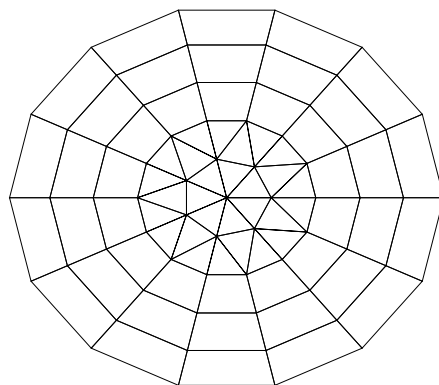


Abbildung 5.28: Deformierte Platte bei $q = 55 \cdot \Delta q = 5.5$

5.3.2 Kreisplatte unter Eigengewicht und Druck

Zur Simulation eines Umformprozesses wird ein kreisförmiges Blech in horizontaler Lage durch Drucksteigerung plastisch verformt. In der Rechnung werden die Daten gemäß Abb. (5.29) eingegeben. Abb. (5.29) skizziert ebenfalls die verwendete Diskretisierung. Es werden sieben Sektoren mit je sechs Q1E4- und vier DKT3D-Elementen verwendet. Die Berechnung erfolgt sowohl für den idealplastischen Fall als auch für den Fall der isotropen Verfestigung nach Gl. (3.44). Während das spezifische Gewicht vom ersten Lastschritt an konstant gehalten wird, wird Flächenlast inkrementiert in 50 Lastschritten bis zu einer Gesamtlast $P = 50 \cdot \Delta p = 5.0$. Die Platte ist an den Rändern gelenkig, aber horizontal verschieblich gelagert. In Abb. (5.30) ist die Last-



- $R = 50$ (Radius)
- $t = 1$ (Dicke)
- $E = 2.1 \cdot 10^5$
- $\nu = 0.3$
- $y_0 = 0.005$
- $\rho g = 73.575 \cdot 10^{-6}$
- $\Delta p = 10^{-1}$

Abbildung 5.29: Kreisplatte und Eingabedaten

Verformungskurve für den Plattenmittelpunkt dargestellt.

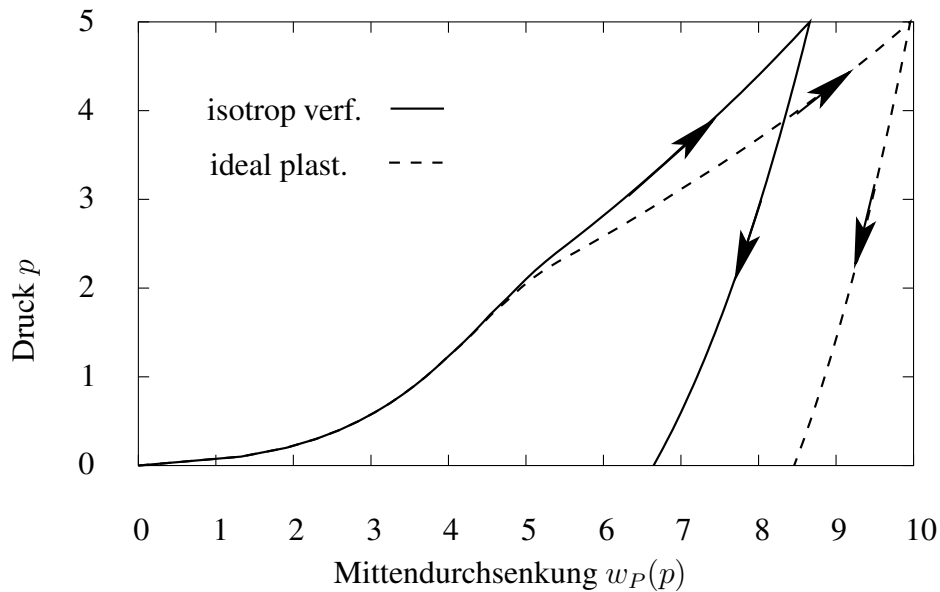


Abbildung 5.30: Last-Verformungskurve der Kreisplatte

Die gestrichelte Linie kennzeichnet die idealplastische Platte, während die durchgezogene Linie den Be- und Entlastungspfad der isotrop verfestigenden Platte beschreibt. Die Entlastung erfolgt in diesem Fall rein elastisch, es kommt nicht zu einer weiteren Plastizierung während des Entlastens. Die verfestigende Platte verhält sich steifer, was im Erreichen geringerer Durchbiegungen nach Be- und Entlastung gegenüber der idealplastischen Rechnung zum Ausdruck kommt. Die Konfiguration jeweils nach Be-

Materialmodell	w_P nach Bel. [mm]	w_P nach Entl. [mm]	Rückfederung [%]
ideal plast.	9.957	8.459	15
isotrop verf.	8.663	6.646	23

Tabelle 5.11: Mittendurchsenkung nach Be- und Entlastung

und nach Entlastung ist (nicht maßstäblich) in Abb. (5.31) für den Fall der verfestigenden Platte dargestellt. Die Rückfederung nach der Entlastung ist klar zu erkennen. Bei diesem Beispiel ist sie erheblich. Die Abb. (5.32) gibt die Anzahl der plastizierten Schichtpunkte in der Draufsicht auf die Platte wieder. Die Antwort der Struktur wahrt die Rotationssymmetrie der Belastung. Infolge des entstehenden Druckrings der Umfangsdehnungen $\epsilon_{\varphi\varphi}$ plastiziert die Platte vom Außenrand nach innen hin. Da die Rechnungen mit drei Schichtpunkten durchgeführt wurden, ist die Platte in den beiden äußeren Ringen bereits voll plastiziert.

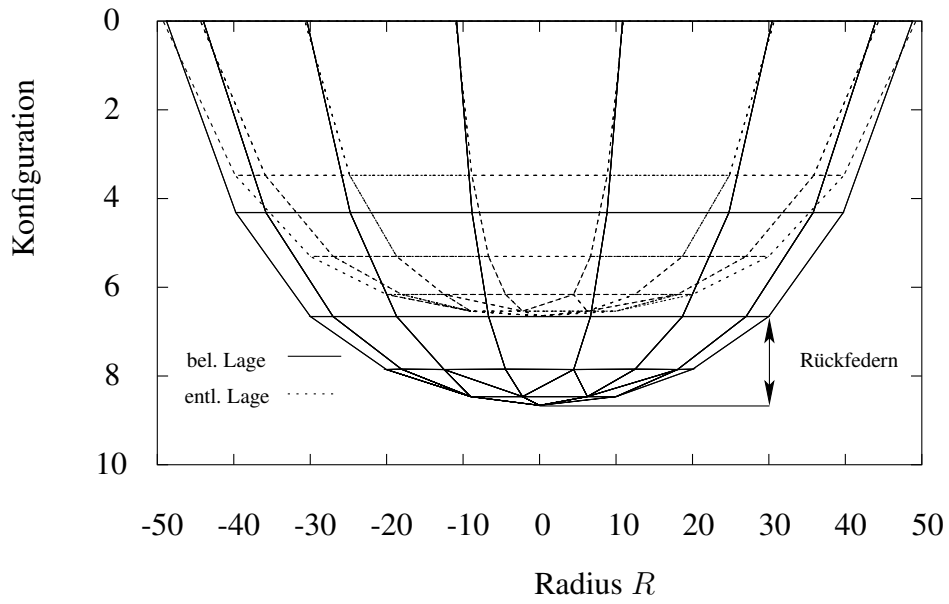


Abbildung 5.31: Be- und entlastete Konfiguration

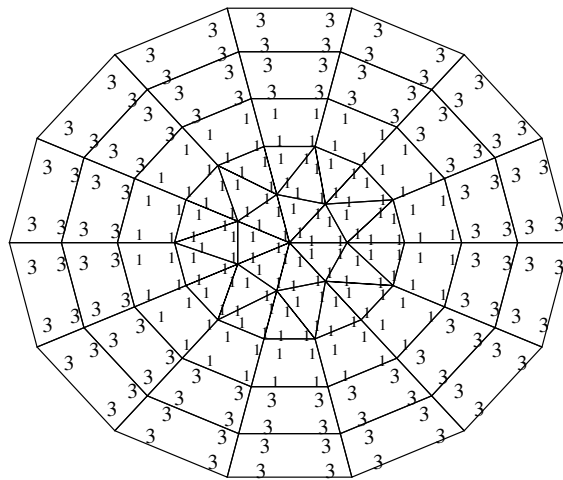


Abbildung 5.32: Anzahl plastischer Schichten

Kapitel 6

Schlußbemerkungen

6.1 Diskussion

Die in Kapitel 5 untersuchten Beispiele untermauern die Leistungsfähigkeit der umgesetzten FE-Formulierung. Anhand der Konvergenzstudien der Scheibenbiegung und des *Benchmarks* der COOK Scheibe wird deutlich, welches Optimierungspotential die Umsetzung der EAS-Methode ausschöpft - siehe Abb. (5.3), Abb. (5.5) und Abb. (5.14). Die biegedominierten Beispiele in den Abschnitten 5.1.4 bis 5.1.6 dokumentieren die Stärke des DKT-Konzeptes; die restlichen linearen Beispiele unterstützen ebenfalls die Wahl der Elementformulierung. Sehr erfreulich ist außerdem die sehr gute Übereinstimmung mit dem analytischen Vergleichswert im Falle des RAASCH Hakens.

Die nichtlinearen Ergebnisse in Abschnitt 5.2 validieren die Elemente Q1E4 und DKT3D sowohl für hyperelastische wie auch für elasto-plastische Berechnungen. Abb. (5.26) verdeutlicht, daß selbst bei einem biegedominierten Beispiel wie dem der Rechteckplatte unter Gleichlast eine Konvergenzverbesserung durch die EAS-Methode erzielt werden kann. Die Gleichwertigkeit des umgesetzten EAS-Verfahrens mit der klassischen Formulierung kommt in Abb. (5.21) zum Ausdruck.

6.2 Fazit

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit war die Weiterentwicklung der von VERHOEVEN (1992) vorgeschlagenen Elementformulierung. Die erfolgreiche Implementierung eines fünfparametrischen Einsdirektorkonzeptes in Verbindung von DKT und EAS liefert ein leistungsfähiges Element, das - wie Kapitel 5 belegt - als *robust* gelten darf. Seine Anwendbarkeit auch auf inelastisches Materialverhalten wurde unter Beweis gestellt.

Literaturverzeichnis

- ABAQUS, 2001. *Abaqus Theory Manual*, Vol.V. 6.2. Hibitt, Karlsson and Sorensen Inc.
- ADINI, A. AND CLOUGH, R., 1961. *Analysis of plate bending by the finite element method*. Technical Report G7337, National Science Foundation.
- AHMAD, S., IRONS, B. AND ZIENKIEWICZ, O., 1970. *Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements*. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **2**, 3, pp. 419–451.
- ANDELFINGER, U. AND RAMM, E., 1993. *EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements*. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **36**, 8, pp. 1311–1337.
- ANDELFINGER, U., 1991. *Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiten Elemente für Flächentragwerke*. Dissertation, Universität Stuttgart.
- ARGYRIS, J., 1954. *Energy theorems and structural analysis*. *Aircraft Engineering* **5**.
- ARGYRIS, J., 1982. *An excursion into large rotations*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **32**, pp. 85–155.
- ARMERO, F., 2000. *On the locking and stability of finite elements in finite deformation plane strain problems*. *Computers & Structures* **75**, pp. 261–290.
- BAŞAR, Y. AND DING, Y., 1997. *Shear deformation models for large-strain shell analysis*. *Int. J. Solids Struct.* **34**, 14, pp. 1687–1708.
- BAŞAR, Y. UND KRÄTZIG, W., 1985. *Mechanik der Flächentragwerke*. Vieweg.
- BARTHOLD, F., 1993. *Theorie und Numerik zur Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien*. Dissertation, Universität Hannover.

- BATHE, K.-J., DVORKIN, E. AND HO, L., 1983. *Our discrete Kirchhoff and isoparametric shell elements for nonlinear analysis - an assessment*. *Computers & Structures* **16**, 1-4, pp. 89–98.
- BATHE, K.-J. AND HO, L., 1981. *A simple and effective shell element for analysis of general shell structures*. *Computers & Structures* **13**, 5-6, pp. 673–681.
- BATOZ, J.-L., BATHE, K.-J. AND HO, L.-W., 1980. *A study of three node triangular plate bending elements*. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **15**, 12, pp. 1771–1812.
- BECKER, W. UND BÜRGER, E., 1975. *Kontinuumsmechanik*. Teubner.
- BELYTSCHKO, T., ONG, J., LIU, W. AND KENNEDY, J., 1984. *Hourglass control in linear and nonlinear problems*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **43**, pp. 251–276.
- BELYTSCHKO, T., LIU, W. AND MORAN, B., 2000. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley.
- BELYTSCHKO, T. AND TSAY, C., 1983. *A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one-point quadrature*. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **19**, 3, pp. 405–420.
- BESDO, D., 1980. *Zur Formulierung von Stoffgesetzen für plastisch anisotrope/elastisch isotrope Medien im Dehnungsraum*. *ZAMM* **60**, S. T101–104.
- BETSCH, P., MENZEL, A. AND STEIN, E., 1998. *On the parametrization of finite rotations in computational mechanics. A classification of concepts with application to smooth shells*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **155**, pp. 273–305.
- BETSCH, P. AND STEIN, E., 1996. *A nonlinear extensible 4-node shell element based on continuum theory and assumed strain interpolations*. *J. Nonlinear Sci.* **6**, pp. 169–199.
- BETSCH, P., 1996. *Statische und dynamische Berechnungen von Schalen endlicher elastischer Deformationen mit gemischten Finiten Elementen*. Dissertation, Universität Hannover.
- BISCHOFF, M. AND RAMM, E., 1997. *Shear deformable shell elements for large strains and rotations*. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **40**, 23, pp. 4427–4449.
- BISCHOFF, M., 1999. *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertation, Universität Stuttgart.
- BLETZINGER, K.-U., BISCHOFF, M. AND RAMM, E., 2000. *A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements*. *Computers & Structures* **75**, pp. 321–334.

- BRAESS, D., 1998. *Enhanced assumed strain elements and locking in membrane problems*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **165**, pp. 155–174.
- BRANK, B. AND IBRAHIMBEGOVIC, A., 2001. *On the relation between different parametrizations of finite rotations for shells*. *Eng. Comp.* **18**, 7, pp. 950–973.
- BRAUN, M., 1995. *Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Tragwerken*. Dissertation, Universität Stuttgart.
- BROCKS, W. UND OLSCHESKI, J., 1995. *Bruchmechanik II*. Unterlagen zur Vorlesung, TU Berlin.
- BRONSTEIN UND SEMENDJAJEW, 1989. *Taschenbuch der Mathematik*, 24. Aufl. Harry Deutsch, Leipzig.
- BRUSH, D. O. AND ALMROTH, B. O., 1975. *Buckling of Bars, Plates and Shells*. Mc Graw Hill.
- BÜCHTER, N. AND RAMM, E., 1992. *Shell theory versus degeneration - a comparison in large rotation finiteelement analysis*. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **34**, 1, pp. 39–60.
- BÜCHTER, N., 1992. *Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen*. Dissertation, Universität Stuttgart.
- CLOUGH, R., 1960. *The finite element in plane stress analysis*. ASCE Conference on electronic Computation.
- CRISFIELD, M., MOITA, G., JELENCIC, G. AND LYONS, L., 1995. *Enhanced lower-order element formulations for large strains*. *Computational Mechanics* **17**, pp. 62–73.
- CRISFIELD, M., 1986. *Finite Elements on Solution Procedures for Structural Analysis, I. Linear Analysis*. Pineridge Press, Swansea.
- DING, Y., 1989. *Finite-Rotations-Elemente zur geometrisch nichtlinearen Analyse allgemeiner Flächentragwerke*. Technischer Bericht 89-6, Inst. für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- DOLL, S., 1998. *Zur numerischen Behandlung großer elasto-viskoplastischer Deformationen bei isochor-volumetrisch entkoppeltem Stoffverhalten*. Dissertation, Universität Fridericiana Karlsruhe.
- DUSCHEK, A. UND HOCHRÄINER, A., 1970. *Tensorrechnung in analytischer Darstellung, Bd. II Tensoranalysis*, 3. Aufl. Springer.

- DVORKIN, E. AND BATHE, K.-J., 1984. *A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis*. *Eng. Comput.* **1**, 1, pp. 77–88.
- EBERLEIN, R. AND WRIGGERS, P., 1999. *Finite element concepts with elastoplastic strains and isotropic stress response in shells: theoretical and computational analysis*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **171**, pp. 243–279.
- EBERLEIN, R., 1997. *Finite-Elemente-Konzepte für Schalen mit großen elastischen und plastischen Verformungen*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt.
- ERINGEN, C., 1967. *Mechanics of Continua*. Wiley.
- FELIPPA, C. AND MILITELLO, C., 1990. *Developments in variational methods for high performance plate and shell elements*. In *Analytical and Computational models of shells presented at the ASME winter-meeting 1989* (San Francisco, CA), (ed. A. Noor), ASME.
- GIRKMANN, K., 1963. *Flächentragwerke*, 6. Aufl. Springer.
- GÖLDNER, H., 1991. *Höhere Festigkeitslehre*, 3. Aufl. Fachbuchverlag Leipzig.
- GREEN, A. AND ZERNA, W., 1950. *The equilibrium of thin elastic shells*. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **III**, 1, pp. 9–22.
- HARBORD, R., 1972. *Berechnung von Schalen mit endlichen Verschiebungen - Gemischte Finite Elemente*. Dissertation, Technische Universität Carolo-Wilhelmina Braunschweig.
- HARNAU, M. AND SCHWEIZERHOF, K., 2002. *About linear and quadratic solid-shell elements at large deformations*. *Computers & Structures* **80**, pp. 805–817.
- HAUPTMANN, R., 1997. *Strukturangepasste geometrisch nichtlineare Finite Elemente für Flächentragwerke*. Dissertation, Universität Karlsruhe.
- HONG, W., KIM, Y. AND LEE, S., 2001. *An assumed strain triangular solid shell element with bubble function displacements for analysis of plates and shells*. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **52**, 4, pp. 455–469.
- HUGHES, T., COHEN, M. AND HAROUN, M., 1978. *Reduced and selective integration techniques in finite element analysis of plates*. *Nuclear Engineering and Design* **46**, pp. 203–222.
- HUGHES, T. AND TEZDUYAR, T., 1981. *Finite elements based upon mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element*. *J. Appl. Mech.* **48**, pp. 587–596.

- HUGHES, T., 1987. *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- JANG, J. AND PINSKY, P. M., 1987. *An assumed covariant strain based 9-node shell element*. *Int. J. Numer. Meth. Engng* **24**, 12, pp. 2389–2411.
- JIRASEK, M. AND BAZANT, Z., 2001. *Inelastic Analysis of Structures*. Wiley.
- KEMP, B., CHO, C. AND LEE, S., 1998. *A four-node solid shell element formulation with assumed strains*. *Int. J. Numer. Meth. Engng* **43**, 5, pp. 909–924.
- KLINKEL, S. AND WAGNER, W., 1997. *A geometrical nonlinear brick element based on the EAS- method*. *Int. J. Numer. Meth. Engng* **40**, 24, pp. 4529–4545.
- KLINKEL, S., 2000. *Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen*. Dissertation, Universität Karlsruhe.
- KNIGHT, N., 1996. *The Raasch challenge for shell elements*. Technical Report AIAA-96-1369-CP, American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- KORELC, J. AND WRIGGERS, P., 1996. *Consistent enhanced gradient for a stable four node enhanced element undergoing large strains*. *Eng. Comp.* **15**, pp. 669–679.
- KRÖNER, E., 1960. *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. *Arch. Rat. Mech.* **4**, S. 273–334.
- KÜHHORN, A. AND SCHOOP, H., 1992. *A nonlinear theory for sandwich shells including the wrinkling phenomenon*. *Arch. Appl. Mech.* **62**, pp. 413–427.
- LEE, E. AND LIU, E., 1967. *Finite-strain-elastic-plastic theory with application to plane wave analysis*. *J. Appl. Phy.* **38**, pp. 19–27.
- LEE, E., 1969. *Elastic-plastic deformation at finite strains*. *J. Appl. Mech.* **36**, pp. 1–6.
- LEMAITRE, J. AND CHABOCHE, J.-L., 1990. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press.
- LÜBCKE, E., 1992. *Zur Beschreibung von Falten in Membranen mittels nichtlinearer Finiter Plattenelemente*. Dissertation, TU Berlin.
- LUBLINER, J., 1990. *Plasticity Theory*. Macmillan, New York.
- MACNEAL, R. H. AND HARDER, R. L., 1985. *A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*. *Finite Elements in Analysis and Design* **1**, pp. 3–20.

- MACNEAL, R. H., 1998. *Perspective on finite elements for shell analysis. Finite Elements in Analysis and Design* **30**, pp. 175–186.
- MACVEAN, D. B., 1968. *Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren. Z. angew. Math. u. Phys.* **19**, S. 157–184.
- MALVERN, L., 1969. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.* Prentice-Hall Inc.
- MAUGIN, G., 1992. *The Thermodynamics of Plasticity and Fracture.* Cambridge University Press.
- MIEHE, C., 1998. *A theoretical and computational model for isotropic elastoplastic stress analysis in shells at large strains. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **155**, 3, pp. 193–233.
- MÜLLER, M., 2002. *Zum Stabilitätsverhalten von Finiten Elementen in der Hyperelastizität.* Diplomarbeit, Inst. f. Mechanik, TU Berlin.
- NAGHDI, P., 1956. *On the theory of thin elastic shells. Quart. Appl. Math.* **14**, pp. 369–380.
- NAGHDI, P., 1972. *The theory of shells and plates.* In *Handbuch der Physik/Encyclopedia of physics*, (eds. Flügge and Truesdell), Vol.VIa/2, Springer.
- OGDEN, R., 1984. *Non-Linear Elastic Deformations.* Ellis Horwood and John Wiley.
- PARISCH, H., 1991. *An investigation of a finite rotation four node assumed strain shell element. Int. J. Numer. Meth. Engng.* **31**, 3, pp. 127–150.
- PARISCH, H., 1995. *A continuum based shell theory for nonlinear application. Int. J. Numer. Meth. Engng.* **38**, 3, pp. 1855–1883.
- POCESKI, A. M., 1996. *Finite Element Method based on the differential equations.* University Sent Kiril I Metodij, Skopje.
- RAMM, E., BRAUN, M. AND BISCHOFF, M., 1995. *Higher order nonlinear shell formulations: Theory and application. Bulletin of the IASS* **36**, pp. 145–152.
- REESE, S., 1994. *Theorie und Numerik des Stabilitätsverhaltens hyperelastischer Festkörper.* Dissertation, TH Darmstadt.
- REESE, S., 2002. *On the equivalence of mixed element formulations and the concept of reduced integration in large deformation problems. Int. J. Nonlinear Scie.* **3**, pp. 1–33.

- ROTT, O., 2003. *Beanspruchung eines Kugel-Druckbehälters aus Stahl bei großen Verformungen*. Studienarbeit, Inst. f. Mechanik, TU Berlin.
- SANSOUR, C. AND BUFLER, H., 1992. *An exact finite rotation shell theory, its mixed variational formulation and its finite element implementation*. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **34**, 1, pp. 73–116.
- SANSOUR, J., 1996. *Nichtlineare Dynamik geometrisch exakter Schalen und Stäbe: Theorie, Numerik finiter Elemente und Integrationsalgorithmen*. Dissertation, TH Darmstadt.
- SANSOUR, C., 1998. *Large strain deformations of elastic shells - constitutive modelling and finite element analysis*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **161**, pp. 1–18.
- SCHOOP, H., HORNIG, J. UND WENZEL, T., 2002. *Remarks on Raasch's Hook*. *Technische Mechanik* **22**, 4, S. 259–270.
- SCHOOP, H., 1986. *Oberflächenorientierte Schalentheorien endlicher Verschiebungen*. *Ing.-Archiv* **56**, S. 427–437.
- SCHOOP, H., 1987. *Schalentheorie mit 6 kinematischen Freiheitsgraden bei großen Verschiebungen*. *Z. angew. Math. Mech.* **67**, 4, S. T237–T239.
- SCHOOP, H., 1989. *A simple nonlinear flat element for large displacement structures*. *Computers & Structures* **32**, 2, pp. 379–385.
- SCHWARZ, H., 1991. *Methode der Finiten Elemente*, 3. Aufl. Teubner.
- SIMO, J., FOX, D. AND RIFAI, M., 1989. *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory; computational aspects*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **73**, pp. 53–92.
- SIMO, J. AND ARMERO, F., 1992. *Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes*. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **33**, 7, pp. 1413–1449.
- SIMO, J. AND FOX, D., 1989. *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **72**, pp. 267–307.
- SIMO, J. AND HUGHES, T., 1998. *Computational Inelasticity*. Springer.
- SIMO, J. AND PISTER, K., 1984. *Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **40**, pp. 201–215.

- SIMO, J. AND RIFAI, M., 1990. *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. Int. J. Numer. Meth. Engng.* **29**, 8, pp. 1595–1638.
- SYNGE, J. L., 1960. *Principles of classical mechanics and field theory. In Handbuch der Physik/Encyclopedia of physics*, (ed. Flügge), Vol.III/1, Springer.
- TAYLOR, R., BERESFORD, P. AND WILSON, E., 1976. *A non-conforming element for stress analysis. Int. J. Numer. Meth. Engng.* **10**, 2, pp. 1211–1219.
- TIETZE, P., 1986. *Finite Elemente Anwendung eines isotropen elastisch-plastischen Stoffgesetzes im Dehnungsraum.* Dissertation, Universität Hannover.
- TIMOSHENKO, S. AND GERE, J., 1961. *Theory of elastic Stability.* McGraw Hill.
- TONG, L.-Y., 1988. *On variational principles of elastic mechanics. In Proceedings of the Int. conf. on Comp. Eng. Science*, (eds. S. Atluri and G. Yagawa), Springer.
- TRUESDELL, C. AND NOLL, W., 1965. *The nonlinear field theories of mechanics. In Handbuch der Physik/Encyclopedia of physics*, (ed. Flügge), Vol.III/3, Springer.
- TRUESDELL, C. AND TOUPIN, R., 1960. *Principles of classical mechanics and field theory. In Handbuch der Physik/Encyclopedia of physics*, (ed. Flügge), Vol.III/1, Springer.
- TURNER, M., CLOUGH, R., MARTIN, H. AND TOPP, L., 1956. *Stiffness and deflection analysis of complex structures. Journal of Aerospace Science* **23**, pp. 805–823.
- VERHOEVEN, H., 1992. *Geometrisch und physikalisch nichtlineare finite Plattenelemente mit Berücksichtigung der Dickenverzerrung.* Dissertation, TU Berlin.
- WALL, W. A., BISCHOFF, M. AND RAMM, E., 2000. *A deformation dependent stabilization technique, exemplified by EAS elements at large strains. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **188**, pp. 859–871.
- WASHIZU, K., 1982. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 3rd ed. Pergamon Press.
- WEMPNER, G., 1969. *Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. Int. J. Solids Struct.* **5**.
- WENZEL, T. AND SCHOOP, H., 2003. *A nonlinear triangular curved shell element. Commun. Numer. Meth. Engng.*, (to be published).
- WIEDEMANN, J., 1986. *Leichtbau Band 1:Elemente.* Springer.

- WLASSOW, W., 1964. *Dünnwandige elastische Stäbe Band 2*. VEB Verlag für das Bauwesen Berlin.
- WRIGGERS, P. AND REESE, S., 1996. *A note on enhanced strain methods for large deformations*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **135**, 201-209.
- WRIGGERS, P., 2001. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer.
- YANG, H., SAIGAL, S., MASUD, A. AND KAPANIA, R., 2000. *A survey of recent shell finite elements*. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **47**, 2, pp. 101–127.
- ZIENKIEWICZ, O., TAYLOR, R. AND TOO, J., 1971. *Reduced integration technique in general analysis of plates and shells*. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **3**, 2, pp. 275–290.
- ZIENKIEWICZ, O., 1975. *Methode der Finiten Elemente*, 1. Aufl. Carl Hanser.
- ZIENKIEWICZ, O., 2000. *Achievements and some unsolved problems of the finite element method*. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **47**, 2, pp. 9–28.

Anhang A

Differentialgeometrie

Umfangreiche Darstellungen zur Flächentheorie finden sich zum Beispiel bei ERINGEN (1967), BAŞAR UND KRÄTZIG (1985) oder DUSCHEK UND HOCHRÄINER (1970). Wesentlich zur Beschreibung einer Fläche im Raum ist die Einführung zweier Parameter q^α , mit denen eine Fläche beschrieben wird als zweidimensionale Struktur mittels der Darstellung

$$\mathbf{r}(q^\alpha). \quad (\text{A.1})$$

Basisvektoren und Metriktensor Durch Ableitung des Ortsvektors \mathbf{r} nach den Flächenkoordinaten erhält man die kovariante Basis \mathbf{g}_α der Fläche. Diese Basisvektoren liegen tangential zu den Koordinatenlinien.

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \quad (\text{A.2})$$

Zur Beschreibung der Längenverhältnisse auf einer Fläche dient der Metriktensor. Es gilt für das Quadrat eines differentiellen Linienelementes ds auf einer Fläche:

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta dq^\alpha dq^\beta = g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta. \quad (\text{A.3})$$

$g_{\alpha\beta}$ sind die kovarianten Komponenten des Metriktensors der Fläche. Die rechte Seite von Gl. (A.3) wird als *erste Fundamentalform* der Flächentheorie bezeichnet. Die kovariante Metrik $g_{\alpha\beta}$ gemäß

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta \quad (\text{A.4})$$

trägt ihren Namen aufgrund der geometrischen Deutung als Maßtensor für Bogenlängen. Die Determinante des Metriktensors wird mit

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \quad (\text{A.5})$$

bezeichnet. Für die sogenannten kontravarianten Komponenten des Metriktensors gilt die Definition

$$g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta, \quad (\text{A.6})$$

d.h. man erhält sie durch Invertieren der Koeffizientenmatrix $g_{\alpha\beta}$. Mit Hilfe des Metrik-tensors kann man eine weitere Basis definieren, die ebenfalls in der Tangentialebene der Fläche liegt, aber bzgl. der kovarianten Basis reziprok ist.

$$\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{g}^\alpha = g^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\beta \quad (\text{A.8})$$

\mathbf{g}_α und \mathbf{g}^β bilden sog. *duale* Basen.

Haupttensor Betrachtet man die Differentiale des Ortsvektors $d\mathbf{r}$ und des Normalenvektors $d\mathbf{n}$ auf einer Fläche, lassen sich der Fläche Krümmungseigenschaften zuweisen. Mit

$$d\mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{n}_{,\alpha} \cdot \mathbf{r}_{,\beta} dq^\alpha dq^\beta = \mathbf{n}_{,\alpha} \cdot \mathbf{g}_\beta dq^\alpha dq^\beta = -b_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta \quad (\text{A.9})$$

werden durch $b_{\alpha\beta}$ die kovarianten Komponenten des Krümmungstensors \mathbf{B} definiert. Gl. (A.9) nennt man die *zweite Fundamentalform* der Flächentheorie. Als nützlich erweisen sich die Hauptwerte des Krümmungstensors. Aus den kovarianten Komponenten $b_{\alpha\beta}$ ermittelt man mit Hilfe von Gl. (A.5) die mittlere Krümmung H und die GAUSSsche Krümmung K als

$$H = \frac{1}{2} \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11}}{g}, \quad (\text{A.10})$$

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{g}. \quad (\text{A.11})$$

Differentielles Volumenelement Im Schalenraum beschreibt

$$\mathbf{x}(q^\alpha, \zeta) = \mathbf{r}(q^\alpha) + \zeta \mathbf{n}(q^\alpha) \quad (\text{A.12})$$

einen beliebigen materiellen Punkt (für $\zeta \neq 0$ außerhalb der Mittelfläche). Für ein differentielles Volumenelement im Schalenraum erhält man mittels der Invarianten des Haupttensors die Darstellung

$$dV = (1 - 2H\zeta + K\zeta^2) dA d\zeta. \quad (\text{A.13})$$

Der Nabla-Operator Im Schalenraum nimmt man infolge des kinematischen Ansatzes nach Gl. (A.12) zweckmäßigerweise eine Aufspaltung des Nabla-Operators vor. Mit dem planaren Nabla-Operator $\nabla_2 = \mathbf{g}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}$ ergibt sich

$$\nabla = (\boldsymbol{\delta} - \zeta \mathbf{B})^{-1} \cdot \nabla_2 + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \zeta}. \quad (\text{A.14})$$

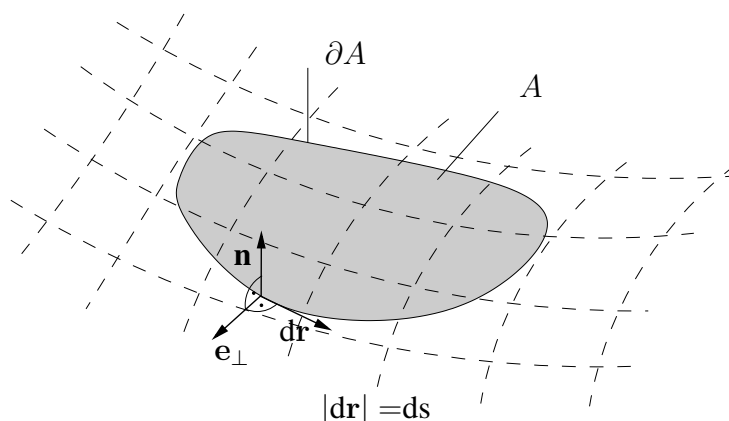


Abbildung A.1: GAUSSscher Satz für Flächen

Der GAUSSsche Integralsatz Für ein zweidimensionales Gebiet wird mittels des Integralsatzes nach GAUSS die Gleichwertigkeit eines Flächenintegrals und des die Fläche umschließenden Kurvenintegrals angegeben. Man erhält

$$\oint_{\partial A} \mathbf{e}_{\perp} \otimes \phi \, ds = \int_A (\nabla_2 + 2H\mathbf{n}) \otimes \phi \, dA. \quad (\text{A.15})$$

Hierbei beschreibt \otimes eine beliebige multiplikative Verknüpfung und ϕ eine beliebige Größe. Ist speziell ϕ ein planarer Vektor \mathbf{c}_2 in der Tangentialebene und ersetzt man \otimes durch das Skalarprodukt, erhält man wegen $\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}_2 = 0$

$$\oint_{\partial A} \mathbf{e}_{\perp} \cdot \mathbf{c}_2 \, ds = \int_A \nabla_2 \cdot \mathbf{c}_2 \, dA \text{ bzw.} \quad (\text{A.16})$$

$$\oint_{\partial A} e_{\perp\beta} c_2^{\beta} \, ds = \int_A c_2^{\beta}{}_{|\beta} \, dA. \quad (\text{A.17})$$

Spannungstensoren Vermöge des Axioms von CAUCHY ermittelt man den differentiellen Kraftvektor $d\mathbf{k}$ einer Schnittfläche dA der aktuellen Konfiguration durch das innere Produkt mit dem CAUCHY Spannungstensor \mathbf{T} :

$$d\mathbf{k} = \mathbf{T} \cdot dA. \quad (\text{A.18})$$

Aus physikalischen Gründen muß die Kraft $d\mathbf{k}$ unabhängig von der Beschreibung sein, so daß mit

$$d\mathbf{k} = \mathbf{P} \cdot dA_0 \quad (\text{A.19})$$

eine referenzbezogene Darstellung gegeben ist. Hierbei bedeutet \mathbf{P} den LAGRANGE oder 1. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor, der Index 0 nimmt Bezug auf die Referenz. Zwischen \mathbf{T} und \mathbf{P} gilt die Umrechnung

$$\mathbf{P} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (\text{A.20})$$

Da jedoch \mathbf{P} nicht symmetrisch ist, führt man den - völlig unanschaulichen - 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor \mathbf{S} ein mit

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (\text{A.21})$$

Während \mathbf{T} und \mathbf{S} jeweils auf die aktuelle Lage bzw. Referenzkonfiguration Bezug nehmen, stellt der 1. PIOLA-KIRCHHOFF Tensor \mathbf{P} einen Tensor da, der - wie der Deformationsgradient - in beiden Konfigurationen orientiert ist. Seine natürliche Dyade enthält Basen beider Konfigurationen. Eine Übersicht der in der nichtlinearen Theorie definierbaren Spannungsmaße - insbesondere im Hinblick auf arbeitskonforme Verzerrungstensoren - gibt MACVEAN (1968).

Anhang B

Gleichgewichtsaussagen

Die integrale Form des Gleichgewichts gemäß Gl. (2.29) unter Berücksichtigung von Gl. (2.30) und Gl. (2.36) soll in eine differentielle Form, d.h. in Feldgleichungen und Randaussagen, überführt werden. Hierzu werden die auftretenden Integrale durch partielle Integration und Anwendung des GAUSSSchen Integralsatzes so lange umgeformt, bis die Variationssymbole $\delta \mathbf{r}$ bzw. $\delta \mathbf{d}$ - wegen der Beliebigkeit der virtuellen Zustände - ausgeklammert werden können. Die zugehörigen Randbedingungen fallen automatisch an bei der Anwendung des Integralsatzes. Wendet man Gl. (A.17) auf Gl. (2.30) und Gl. (2.36) an, so ergeben sich folgende Umformungen

$$\hat{t}^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{r}_{,\beta} = [\hat{t}^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{r}]_{|\beta} - [\hat{t}^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha}]_{|\beta} \cdot \delta \mathbf{r}, \quad (\text{B.1})$$

$$Q^\beta \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{r}_{,\beta} = [Q^\beta \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{r}]_{|\beta} - [Q^\beta \mathbf{d}]_{|\beta} \cdot \delta \mathbf{r}, \quad (\text{B.2})$$

$$m^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{r}_{,\beta} = [m^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{r}]_{|\beta} - [m^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha}]_{|\beta} \cdot \delta \mathbf{r}, \quad (\text{B.3})$$

$$[m^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha}] \cdot \delta \mathbf{d}_{,\beta} = [m^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{d}]_{|\beta} - [m^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha}]_{|\beta} \cdot \delta \mathbf{d}. \quad (\text{B.4})$$

Nach dem Einsetzen der Glg. (B.1) bis (B.4) und dem Sortieren nach den Variations-Differentialen ergibt sich aus Gl. (2.29)

$$\begin{aligned} & \int_A \left\{ \left([\hat{t}^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha} + Q^\beta \mathbf{d} + m^{\alpha\beta} \mathbf{d}_{,\alpha}]_{|\beta} + \mathbf{p}_0 \right) \cdot \delta \mathbf{r} \right. \\ & \left. + \left([m^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha}]_{|\beta} - t^3 \mathbf{d} - Q^\alpha \mathbf{r}_{,\alpha} + \mathbf{p}_1 \frac{h}{2} \right) \cdot \delta \mathbf{d} \right\} dA \\ & \oint_{\partial A} e_{\perp\beta} \left[(\hat{t}^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha} + Q^\beta \mathbf{d} + m^{\alpha\beta} \mathbf{d}_{,\alpha} - \mathbf{P}_R) \cdot \delta \mathbf{r} \right. \\ & \quad \left. + (m^{\alpha\beta} \mathbf{r}_{,\alpha} - \mathbf{M}_R) \cdot \delta \mathbf{d} \right] ds = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Wegen der Beliebigkeit der virtuellen Zustände $\delta \mathbf{r}$ bzw. $\delta \mathbf{d}$ müssen die Ausdrücke in den runden Klammern verschwinden. Daraus folgen die in Gl. (2.37) bis Gl. (2.38)

notierten Gleichgewichtsbedingungen (Integranden des Flächenintegrals) in differentieller Form bzw. die zum Randwertproblem gehörigen Randbedingungen (Integranden des Kurvenintegrals) der Kräfte und Momente.

Anhang C

Ebener Spannungszustand

Der ESZ ist gekennzeichnet durch den Zustand $\sigma_{a3} = \sigma_{33} = 0$. Obwohl dieser Zustand bereits in der Theorie I. Ordnung i.a. die Kompatibilitätsbedingungen verletzt [GÖLDNER (1991)], stellt er insbesondere bei dünnen Flächentragwerken eine sinnvolle Näherung dar. Während bei linearen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen eine geschlossene Lösung zur Elimination der Dickenverzerrung ϵ_{33} bzw. C_{33} erhältlich ist, sind bei nichtlinearen Stoffgesetzen Zusatzüberlegungen notwendig.

Numerische Lösung des ESZ Ausgehend von dreidimensionalen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen und unter der Annahme $C_{\alpha 3} = 0$ soll eine numerische Lösung bestimmt werden. Ziel ist es, diejenige Dehnung C_{33} zu bestimmen, die den Zustand $\sigma_{33}(C_{33}) = 0$ erfüllt. Beginnt man mit dem Startwert $C_{33}^0 = 1$, muß die Gleichung

$$C_{33}^{n+1} = C_{33}^n - 2 \left(\frac{\sigma_{33}(C_{33})}{C_{3333}} \right)^n \quad (\text{C.1})$$

iterativ gelöst werden, wobei C_{3333} eine Komponente der Materialtetraede \mathbb{C} nach Gl. (3.10) bezeichnet. Die hochgestellten Indizes geben hierbei den Iterationsschritt an.

Kondensation der Materialsteifigkeit Neben der Ermittlung des Dehnungszustandes, der die Bedingung ESZ erfüllt, muß auch die zugehörige Spannungsableitung ermittelt werden. Hierzu läßt sich in Anlehnung an BARTHOLD (1993) ein Kondensationsverfahren angeben, das die ebene Materialtetraede $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ aus der dreidimensionalen C_{ijkl} ermittelt. Definitionsgemäß gilt im fall des ESZ für das vollständige Differential der Spannungskomponenten σ_{ij}

$$d\sigma_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial C_{\alpha\beta}} dC_{\alpha\beta} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial C_{33}} dC_{33}. \quad (\text{C.2})$$

Insbesondere für $d\sigma_{33}$ gilt dann

$$d\sigma_{33} = \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial C_{\alpha\beta}} dC_{\alpha\beta} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial C_{33}} dC_{33}. \quad (\text{C.3})$$

Fordert man nun, daß Gl. (C.3) ebenfalls gleich null wird, da der ESZ auch in einem infinitesimalen Nachbarzustand von σ_{33} erfüllt sein soll, läßt sich aus Gl. (C.3) das unbekannte Differential dC_{33} eliminieren:

$$dC_{33} = - \left(\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial C_{33}} \right)^{-1} \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial C_{\alpha\beta}} dC_{\alpha\beta}. \quad (\text{C.4})$$

Nach Einsetzen in Gl. (C.2) liefert Gl. (C.4) dann die kondensierte Spannungsableitung zu

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 2 \left[\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial C_{\gamma\delta}} - \left(\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial C_{33}} \right)^{-1} \frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial C_{33}} \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial C_{\gamma\delta}} \right]. \quad (\text{C.5})$$

Aus Gl. (C.5) ist somit diejenige Spannungsableitung bestimmt, die den Bedingungen des ESZ entspricht.

Anhang D

Fließspannung und Fließdehnung

In der von BESDO (1980) und TIETZE (1986) formulierten Fließbedingung wird mit einer Fließdehnung y eine - der spannungsexpliziten Form der Fließbedingung gleichwertige - Äquivalenzbedingung angegeben:

$$g = \frac{1}{4} \left[\left(\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C} \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C} \right) - \frac{1}{3} \left(\hat{\mathbf{B}} \cdot \cdot \mathbf{C} \right)^2 \right] - y_0^2 = 0. \quad (\text{D.1})$$

In Gl. (D.1) bedeutet $\hat{\mathbf{B}}$ den linken CAUCHY Tensor der inversen plastischen Dehnungen und \mathbf{C} den rechten CAUCHY Tensor. Die klassische Formulierung der Fließbedingung nach VON MISES lautet hingegen

$$f = \sqrt{-3S_2'} - \sigma_y = 0. \quad (\text{D.2})$$

In Gl. (D.2) bedeutet S_2' die zweite Invariante des Spannungsdeviators \mathbf{S}' und σ_y die Fließspannung. Um eine Umrechnung von Fließspannung in Fließdehnung angeben zu können, wird die Gl. (D.2) in Dehnungsgrößen formuliert und mit der Gl. (D.1) verglichen. Dies erfolgt unter der Voraussetzung, daß für ST. VENANT-KIRCHHOFF Material beide Bedingungen identisch werden. Da auch beim erstmaligen Auftreten einer Plastizierung die Gleichheit der beiden Bedingungen postuliert wird, ist in Gl. (D.1) $\hat{\mathbf{B}} = 0$ zu setzen. Mit der Umrechnung

$$\mathbf{C} = \mathbf{1} + 2\mathbf{E} \quad (\text{D.3})$$

werden Gl. (D.3) und $\hat{\mathbf{B}} = 0$ in Gl. (D.1) eingesetzt. Berücksichtigt man noch die Deviatorzerlegung

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}' + \frac{1}{3}(\text{sp}\mathbf{C})\mathbf{1}, \quad (\text{D.4})$$

so folgt für den Zusammenhang zwischen den Deviatoren nach Gl. (D.3)

$$\mathbf{C}' = 2\mathbf{E}'. \quad (\text{D.5})$$

Aus Gl. (D.1) ergibt sich dann unter den genannten Voraussetzungen

$$\begin{aligned}
 g &= (\mathbf{1} \cdot \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{1} \cdot \mathbf{C}) - \frac{1}{3} (\text{sp}\mathbf{C})^2 - 4y_0^2 \\
 &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} - \frac{1}{3} (\text{sp}\mathbf{C})^2 - 4y_0^2 \\
 &= \left(\mathbf{C}' + \frac{1}{3}(\text{sp}\mathbf{C})\mathbf{1} \right) \cdot \left(\mathbf{C}' + \frac{1}{3}(\text{sp}\mathbf{C})\mathbf{1} \right) - \frac{1}{3} (\text{sp}\mathbf{C})^2 - 4y_0^2 \\
 &= \mathbf{C}' \cdot \mathbf{C}' + \underbrace{\frac{2}{3}(\text{sp}\mathbf{C})(\text{sp}\mathbf{C}')}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{9}(\text{sp}\mathbf{C})^2 \cdot 3 - \frac{1}{3}(\text{sp}\mathbf{C})^2}_{=0} - 4y_0^2 \\
 &= 4\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}' - 4y_0^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Damit erhält man anstelle von Gl. (D.1) die Bedingung

$$g = 4\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}' - 4y_0^2 = 0. \quad (\text{D.6})$$

Um die Gl. (D.2) in Verzerrungsgrößen auszudrücken, wird zunächst das ST. VENANT-KIRCHHOFF Gesetz bemüht, um die Invarianten ineinander überführen zu können. Aus Gl. (3.6) und der Spur

$$\text{sp}\mathbf{S} = 2G \left(\text{sp}\mathbf{E} + 3\frac{\nu}{1-2\nu}\text{sp}\mathbf{E} \right) = 2G\frac{1+\nu}{1-2\nu}\text{sp}\mathbf{E} \quad (\text{D.7})$$

erhält man unter Berücksichtigung von Gl. (D.5) und Gl. (D.7) die Form

$$\mathbf{S}' + \frac{1}{3}2G\frac{1+\nu}{1-2\nu}(\text{sp}\mathbf{E})\mathbf{1} = 2G \left(\mathbf{E}' + \frac{1}{3}(\text{sp}\mathbf{E})\mathbf{1} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\text{sp}\mathbf{E})\mathbf{1} \right), \quad (\text{D.8})$$

aus der die proportionale Zuordnung der Deviatoren zu

$$\mathbf{S}' = 2G\mathbf{E}' \quad (\text{D.9})$$

folgt. Die zweite Invariante des Deviators berechnet sich als

$$S'_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{S}' \cdot \mathbf{S}' = -\frac{1}{2}(2G)^2\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}'. \quad (\text{D.10})$$

Das Einsetzen von Gl. (D.9) ergibt damit als Äquivalenz der Gl. (D.2) den Ausdruck

$$f = \sqrt{-3S'_2 - \sigma_y} = \sqrt{3(2G)^2 E'_{ij}E'_{ji} - \sigma_y} = 0. \quad (\text{D.11})$$

Aus Gl. (D.11) ergibt sich somit

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}' = \frac{2}{3} \left(\frac{\sigma_y}{2G} \right)^2. \quad (\text{D.12})$$

Andererseits folgt aus Gl. (D.6)

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}' = y_0^2. \quad (\text{D.13})$$

Durch Vergleich von Gl. (D.12) mit Gl. (D.13) ergibt sich die gesuchte Vorschrift, nach der Fließspannung und Fließdehnung ineinander umgerechnet werden können, zu:

$$y_0 = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\sigma_y}{2G}}. \quad (\text{D.14})$$

Anhang E

Ableitungen der $\tilde{\epsilon}$

Benötigt wird für die Bildung der Elementsteifigkeitsmatrix der Ausdruck

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}_l}{\partial a_{jn}} = M_{lm} \frac{\partial \alpha_m}{\partial a_{jn}}. \quad (\text{E.1})$$

Da im nichtlinearen Fall kein analytischer Zusammenhang zwischen α und \mathbf{a} besteht, wird zur Ermittlung der Ableitungen auf eine Reihenentwicklung zurückgegriffen. Gemäß Gl. (4.34) ist im Element derjenige Zustand \mathbf{a} ermittelt worden, für den $\tilde{\mathbf{R}} = 0$ erfüllt ist. Nun fordert man, daß auch für einen infinitesimalen Nachbarzustand $\mathbf{a} + d\mathbf{a}$ Gl. (4.34) erfüllt ist. Entwickelt in einer TAYLOR Reihe erhält man somit¹

$$\begin{aligned} & \int_V \left(t_k [\epsilon_k^u(a_{jn} + da_{jn}) + \tilde{\epsilon}_k(a_{jn} + da_{jn}) \right. \\ & \quad \left. + z \kappa_k(a_{jn} + da_{jn}) \right] \frac{\partial \tilde{\epsilon}_k}{\partial \alpha_i} \Big|_{\alpha_i} dV = 0 \\ & = \underbrace{\int_V t_k \frac{\partial \tilde{\epsilon}_k}{\partial \alpha_i} dV}_{= 0 \text{ [Gl. (4.34)]}} + \underbrace{\int_V \frac{\partial t_k}{\partial a_{jn}} \frac{\partial \tilde{\epsilon}_k}{\partial \alpha_i} dV}_{\text{I}} da_{jn} + \underbrace{O((da_{jn})^2)}_{\approx 0} \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Da das linke Integral identisch erfüllt ist, kann aus dem Verschwinden des Integrals I die gesuchte Ableitung durch Matrizeninversion ermittelt werden. Zunächst wendet man die Kettenregel an und erhält

$$\int_V \frac{\partial t_k}{\partial \epsilon_l} \left(\frac{\partial \epsilon_l}{\partial a_{jn}} + \frac{\partial \tilde{\epsilon}_l}{\partial a_{jn}} + z \frac{\partial \kappa_l}{\partial a_{jn}} \right) \frac{\partial \tilde{\epsilon}_k}{\partial \alpha_i} dV = 0. \quad (\text{E.3})$$

Berücksichtigt man $\tilde{\epsilon}_{,\alpha} = \mathbf{M}$ und benutzt die Abkürzung \mathbf{C} für die Steifigkeit, folgt

$$\int_V C_{kl} \left(\frac{\partial \epsilon_l}{\partial a_{jn}} + M_{lm} \frac{\partial \alpha_m}{\partial a_{jn}} + z \frac{\partial \kappa_l}{\partial a_{jn}} \right) M_{ki} dV = 0. \quad (\text{E.4})$$

¹VOIGT Notation wie im ganzen Abschnitt 4.2.3.

Daraus resultiert ein System linearer Gleichungen zur Bestimmung der gesuchten Ableitungen:

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial a_{jn}} = - \left(\int_V M_{oi} C_{op} M_{pm} \, dV \right)^{-1} \left(\int_V M_{ki} C_{kl} \left(\frac{\partial \epsilon_l^u}{\partial a_{jn}} + z \frac{\partial \kappa_l}{\partial a_{jn}} \right) \, dV \right). \quad (\text{E.5})$$

Mit Gl. (E.5) ist die Steifigkeitsmatrix als konsistente Tangente berechenbar.

Anhang F

Transformation des Direktors

Ziel dieser Transformation ist es, zu verhindern, daß der Breitengrad φ während der Iteration den Wert $\pi/2$ annimmt, da in diesem Fall die Ableitung $\mathbf{d}_{,\varphi}$ nicht mehr eindeutig angebar ist. Dazu wird die globalkartesische Beschreibung des Direktors \mathbf{d}_k am Knoten k

$$\mathbf{d}_k = \cos \varphi_k \cos \psi_k \mathbf{e}_1 + \cos \varphi_k \sin \psi_k \mathbf{e}_2 + \sin \varphi_k \mathbf{e}_3, \quad (\text{F.1})$$

in eine Darstellung

$$\mathbf{d}_k = f_i(\eta, \xi) \hat{\mathbf{e}}_i \quad (\text{F.2})$$

überführt. Dabei sind (η, ξ) die Drehwinkel im neuen Koordinatensystem $\hat{\mathbf{e}}_k$. Das System $\hat{\mathbf{e}}_k$ ist nach wie vor ein sphärisches Koordinatensystem. Es ist jedoch im Raum derart orientiert, daß seine Äquatorebene $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2)$ mit dem Direktor \mathbf{d}_k komplanar ist. Diese Transformation läßt sich im Sinne eines EULER bzw. KARDAN Schemas als Hintereinanderschaltung finiter Rotationen darstellen.

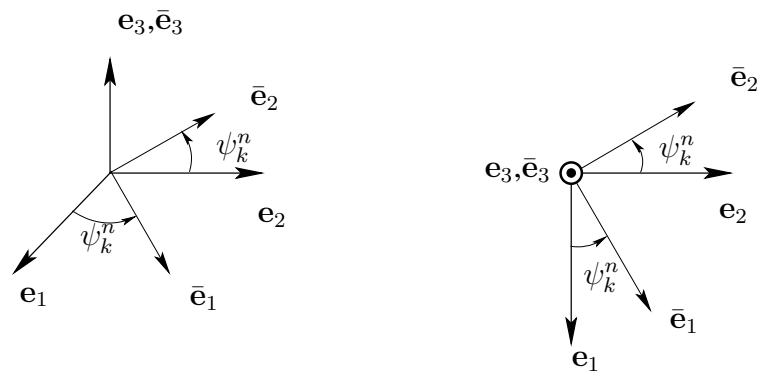
Drehung um die Achse \mathbf{e}_3 mit ψ_k^n Zunächst wird das (globalkartesische) System \mathbf{e}_k um die \mathbf{e}_3 -Achse mit dem Winkel ψ_k^n gedreht¹ gemäß Abb. (F.1). Die Transformation der Basisvektoren \mathbf{e}_i läßt sich über eine Drehmatrix $Q_{ij}^{(3)}(\psi_k^n)$ beschreiben:

$$Q_{ij}^{(3)}(\psi_k^n) = \begin{pmatrix} \cos \psi_k^n & \sin \psi_k^n & 0 \\ -\sin \psi_k^n & \cos \psi_k^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.3})$$

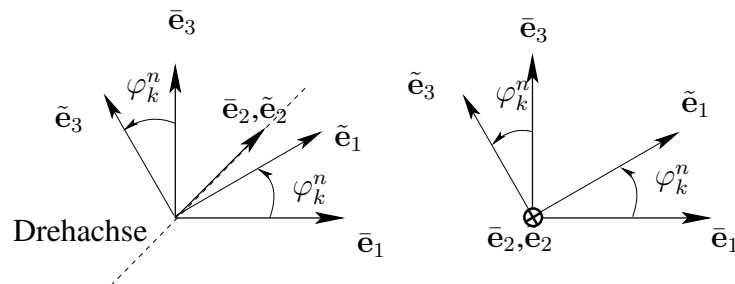
Mit Hilfe dieser Matrix ergeben sich die neuen Basisvektoren $\bar{\mathbf{e}}_i$ zu:

$$\bar{\mathbf{e}}_i = Q_{ij}^{(3)}(\psi_k^n) \mathbf{e}_j. \quad (\text{F.4})$$

¹ ψ_k^n bedeutet den Winkel ψ am Knoten k und n die Laststufe der Berechnung.

Abbildung F.1: Drehung um die Achse e_3

Drehung um die Achse \bar{e}_2 mit φ_k^n Als nächstes wird das System \bar{e}_k um die \bar{e}_2 -Achse mit φ_k^n gedreht. Dabei wird φ_k^n gemessen, wie in Abb. (F.2) eingeführt.

Abbildung F.2: Drehung um die \bar{e}_2 -Achse

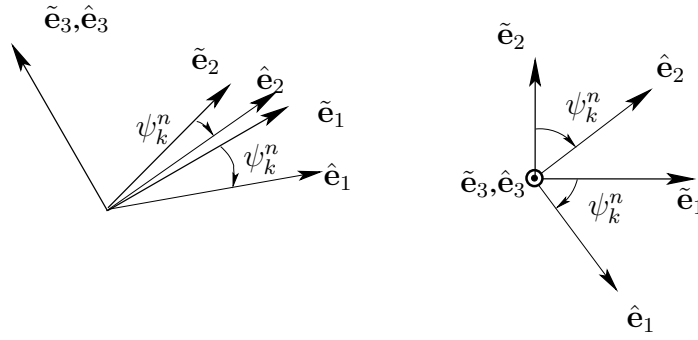
Die Transformation der Basisvektoren \bar{e}_i läßt sich wieder durch eine Drehmatrix $Q_{ij}^{(2)}(\varphi_k^n)$ beschreiben:

$$Q_{ij}^{(2)}(\varphi_k^n) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_k^n & 0 & \sin \varphi_k^n \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_k^n & 0 & \cos \varphi_k^n \end{pmatrix}. \quad (\text{F.5})$$

Mit Hilfe dieser Matrix ergeben sich die neuen Basisvektoren \tilde{e}_i zu:

$$\tilde{e}_i = Q_{ij}^{(2)}(\varphi_k^n) \bar{e}_j. \quad (\text{F.6})$$

Drehung um die Achse \tilde{e}_3 mit $-\psi_k^n$ Zuletzt wird das System \tilde{e}_k um die \tilde{e}_3 -Achse mit $\vartheta_k^n = -\psi_k^n$ zurückgedreht, um zu gewährleisten, daß der Direktor in dieser Basis die gewünschten Komponenten hat. Die Transformation ist in Abb. (F.3) skizziert. Die Transformation der Basisvektoren \tilde{e}_i läßt sich wiederum durch eine Drehmatrix

Abbildung F.3: Zurückdrehung um die \tilde{e}_3 -Achse

$Q_{ij}^{(3)}(\psi_k^n)$ beschreiben:

$$Q_{ij}^{(3)}(\psi_k^n) = \begin{pmatrix} \cos \psi_k^n & \sin \psi_k^n & 0 \\ -\sin \psi_k^n & \cos \psi_k^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.7})$$

Vermöge dieser Matrix ergeben sich die neuen Basisvektoren \hat{e}_i zu:

$$\hat{e}_i = Q_{ij}^{(3)}(-\psi_k^n) \tilde{e}_j. \quad (\text{F.8})$$

Das durch diese Transformation entstandene Koordinatensystem \hat{e}_k ist nun derart orientiert, daß der Direktor \mathbf{d}_k zu Beginn der Lastschritts n in der Ebene (\hat{e}_1, \hat{e}_2) liegt.

Darstellung des Direktors im System \hat{e}_k Die schrittweise Transformation der Basisvektoren \mathbf{e}_i auf die Basisvektoren \hat{e}_i läßt sich als Hintereinanderschaltung von Drehmatrizen notieren:

$$\begin{aligned} \hat{e}_i &= (\mathbf{Q}^{(3)}(-\psi_k^n) \cdot \mathbf{Q}^{(2)}(\varphi_k^n) \cdot \mathbf{Q}^{(3)}(\psi_k^n))_{ij} \cdot \mathbf{e}_j \\ &= \Phi_{ij} \cdot \mathbf{e}_j. \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Dabei wurde die Definition verwendet:

$$\Phi(\varphi_k^n, \psi_k^n) = \mathbf{Q}^{(3)}(-\psi_k^n) \cdot \mathbf{Q}^{(2)}(\varphi_k^n) \cdot \mathbf{Q}^{(3)}(\psi_k^n). \quad (\text{F.10})$$

Führt man diese Vorschrift aus, ergibt sich die folgende Transformation:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= (\cos^2 \psi_k^n \cos \varphi_k^n + \sin^2 \psi_k^n) \mathbf{e}_1 + \\ &\quad (\cos \psi_k^n \cos \varphi_k^n \sin \psi_k^n - \sin \psi_k^n \cos \psi_k^n) \mathbf{e}_2 + \\ &\quad \cos \psi_k^n \sin \varphi_k^n \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_2 &= (\cos \psi_k^n \cos \varphi_k^n \sin \psi_k^n - \sin \psi_k^n \cos \psi_k^n) \mathbf{e}_1 + \\ &\quad (\sin^2 \psi_k^n \cos \varphi_k^n + \cos^2 \psi_k^n) \mathbf{e}_2 + \sin \psi_k^n \sin \varphi_k^n \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

$$\hat{e}_3 = -\sin \varphi_k^n \cos \psi_k^n \mathbf{e}_1 - \sin \varphi_k^n \sin \psi_k^n \mathbf{e}_2 + \cos \varphi_k^n \mathbf{e}_3. \quad (\text{F.13})$$

Um die Darstellung des Direktors in dem System \hat{e}_k zu ermitteln muss nun die gegebene Abbildung für die Basisvektoren invertiert werden. Da $\Phi \cdot \Phi^T = \mathbf{1}$ gilt, ergibt die Berechnung der inversen Abbildung:

$$\begin{aligned}
(\Phi)_{ij}^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos^2 \psi_k^n \cos \varphi_k^n + \sin^2 \psi_k^n & \cos \psi_k^n \sin \psi_k^n (\cos \varphi_k^n - 1) & \cos \psi_k^n \sin \varphi_k^n \\ \cos \psi_k^n \sin \psi_k^n (\cos \varphi_k^n - 1) & \sin^2 \psi_k^n \cos \varphi_k^n + \cos^2 \psi_k^n & \sin \psi_k^n \sin \varphi_k^n \\ -\sin \varphi_k^n \cos \psi_k^n & -\sin \varphi_k^n \sin \psi_k^n & \cos \varphi_k^n \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2 \psi_k^n \cos \varphi_k^n + \sin^2 \psi_k^n & \cos \psi_k^n \sin \psi_k^n (\cos \varphi_k^n - 1) & \cos \psi_k^n \sin \varphi_k^n \\ \cos \psi_k^n \sin \psi_k^n (\cos \varphi_k^n - 1) & \sin^2 \psi_k^n \cos \varphi_k^n + \cos^2 \psi_k^n & \sin \psi_k^n \sin \varphi_k^n \\ -\sin \varphi_k^n \cos \psi_k^n & -\sin \varphi_k^n \sin \psi_k^n & \cos \varphi_k^n \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2 \psi_k^n \cos \varphi_k^n + \sin^2 \psi_k^n & \cos \psi_k^n \sin \psi_k^n (\cos \varphi_k^n - 1) & -\cos \psi_k^n \sin \varphi_k^n \\ \cos \psi_k^n \sin \psi_k^n (\cos \varphi_k^n - 1) & \sin^2 \psi_k^n \cos \varphi_k^n + \cos^2 \psi_k^n & -\sin \psi_k^n \sin \varphi_k^n \\ \sin \varphi_k^n \cos \psi_k^n & \sin \varphi_k^n \sin \psi_k^n & \cos \varphi_k^n \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{F.14}$$

Mittels dieser Transformation lassen sich die Basisvektoren e_i als Kombination der Basisvektoren \hat{e}_j darstellen:

$$e_i = (\Phi)_{ij}^{-1} \cdot \hat{e}_j. \tag{F.15}$$

Führt man die gegebene Rechenvorschrift aus, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
e_1 &= (\cos^2 \psi_k^n \cos \varphi_k^n + \sin^2 \psi_k^n) \hat{e}_1, \\
&+ (\cos \psi_k^n \sin \psi_k^n (\cos \varphi_k^n - 1)) \hat{e}_2 - \cos \psi_k^n \sin \varphi_k^n \hat{e}_3
\end{aligned} \tag{F.16}$$

$$\begin{aligned}
e_2 &= (\cos \psi_k^n \sin \psi_k^n (\cos \varphi_k^n - 1)) \hat{e}_1, \\
&+ (\sin^2 \psi_k^n \cos \varphi_k^n + \cos^2 \psi_k^n) \hat{e}_2 - \sin \psi_k^n \sin \varphi_k^n \hat{e}_3
\end{aligned} \tag{F.17}$$

$$e_3 = \sin \varphi_k^n \cos \psi_k^n \hat{e}_1 + \sin \varphi_k^n \sin \psi_k^n \hat{e}_2 + \cos \varphi_k^n \hat{e}_3. \tag{F.18}$$

Nun muß diese Darstellung der Basisvektoren nur noch in die Direktordarstellung Gl. (F.1) eingesetzt werden. Nach einigen Vereinfachungen erhält man:

$$\mathbf{d}_k = \cos \psi_k^n \hat{e}_1 + \sin \psi_k^n \hat{e}_2. \tag{F.19}$$

Direktorparametrisierung im System \hat{e}_k Der Direktor liegt nun in der neu erzeugten (\hat{e}_1, \hat{e}_2) -Ebene, der Äquatorebene des Koordinatensystems. Von dieser Ebene aus zählen die Koordinaten (η, ξ) . Dazu wird als erste Koordinate der Winkel η eingeführt, der zunächst dem Winkel ψ_k^n entsprechen soll [vgl. Abb. (F.4)]. Dies bedeutet in Formeln ausgedrückt $\eta := \psi_k^n$. Mit dieser Definition ergibt sich der Direktor zu:

$$\mathbf{d}_k^n = \cos \eta \hat{e}_1 + \sin \eta \hat{e}_2. \tag{F.20}$$

Im Laufe der Deformation ändern sich Lage und Dierktorstellung. Dies bedeutet insbesondere für den Direktor, daß dieser nicht mehr in der (\hat{e}_1, \hat{e}_2) -Ebene liegt. Das

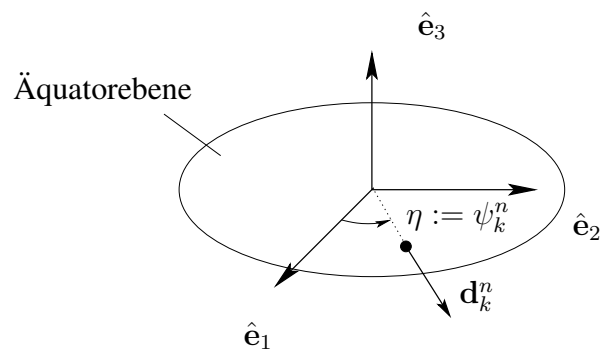


Abbildung F.4: Direktordarstellung nach der Transformation

so entstandene Problem der Direktordarstellung läßt sich aber lösen, indem man eine zusätzliche Koordinate ξ einführt, die den Winkel zwischen der (\hat{e}_1, \hat{e}_2) -Ebene und dem Direktor angibt. Vor der Belastung gilt demnach $\xi = 0$. Die Darstellung des Direktors nach einer Belastung läßt sich wieder einfach aus Abb. (F.5) ablesen:

$$\mathbf{d}_k^n = \cos \eta \cos \xi \hat{e}_1 + \sin \eta \cos \xi \hat{e}_2 + \sin \xi \hat{e}_3 . \quad (\text{F.21})$$

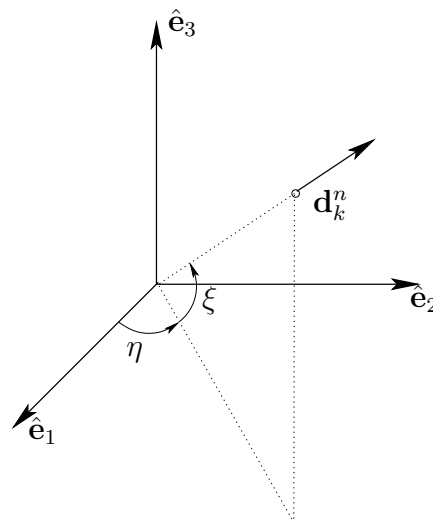


Abbildung F.5: Direktordarstellung nach der Transformation und einer Belastung

Es sei darauf hingewiesen, daß die Koordinaten η und ξ nach der Belastung erst durch eine NEWTON Iteration, d.h. durch eine Lösung des globalen Gleichungssystems, bestimmt werden müssen.

Rücktransformation des Direktors Die Darstellung des Direktors im globalkartesischen Koordinatensystem nach dem Lastschritt n lautete:

$$\mathbf{d}_k^n = \cos \varphi_k^n \cos \psi_k^n \mathbf{e}_1 + \cos \varphi_k^n \sin \psi_k^n \mathbf{e}_2 + \sin \varphi_k^n \mathbf{e}_3 . \quad (\text{F.22})$$

Im System $\hat{\mathbf{e}}_k$ gilt am Ende des neuen Lastschritts $n+1$:

$$\mathbf{d}_k^{n+1} = \cos \eta \cos \xi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \eta \cos \xi \hat{\mathbf{e}}_2 + \sin \xi \hat{\mathbf{e}}_3 . \quad (\text{F.23})$$

Ziel ist es nun, einen Zusammenhang zwischen den Koordinaten η, ξ (die ja bekannt sind) und den Koordinaten $\psi_k^{n+1}, \varphi_k^{n+1}$ (die noch nicht bekannt sind) herzustellen.

Multipliziert man Gl. (F.23) mit \mathbf{e}_2 und mit \mathbf{e}_1 und dividiert die Ergebnisse, so folgt

$$\psi_k^{n+1} = \arctan \left(\frac{\mathbf{d}_k^{n+1} \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{d}_k^{n+1} \cdot \mathbf{e}_1} \right) , \quad (\text{F.24})$$

Für den Winkel φ_k^n ergibt sich entsprechend

$$\varphi_k^{n+1} = \arcsin (\mathbf{d}_k^{n+1} \cdot \mathbf{e}_3) . \quad (\text{F.25})$$

Mit den Glg. (F.24) und (F.25) kann die Rücktransformation am Ende des neuen Lastschritts $n+1$ angegeben werden.

Anhang G

RODRIGUES Darstellung mit Einsdirektoren

Es soll kurz erläutert werden, auf welche Weise BETSCH ET AL. in ihrer Beschreibung der zweiparametrischen Direktorformulierung die Darstellung der Direktoren über den RODRIGUES Vektor konkret umsetzen. Zunächst werden einige Abkürzungen definiert, die sich an BETSCH, MENZEL & STEIN (1998) anlehnen.

- \mathbf{Q} stellt einen Drehtensor oder Versor als Knotengröße dar; es gilt $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{1}$. Der Index n ist fortgelassen.
- θ bezeichnet den RODRIGUES Vektor.
- \mathbf{e}_k ist die globalkartesische Basis.
- \mathbf{t} bezeichnet den Direktor am Knoten n . Der Einfachheit halber ist der Knotenindex fortgelassen.
- Das Symbol $\Delta(\dots)$ kennzeichnet die erste Ableitung und das Symbol $\delta\Delta(\dots)$ die zweite Ableitung von (\dots) im Sinne des vollständigen Differentials.

Grundgedanke ist es, den Knotendirektor über einen Knotenversor darzustellen als

$$\mathbf{t} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_3, \quad (\text{G.1})$$

wobei \mathbf{Q} die Darstellung

$$\mathbf{Q}(\theta) = \cos \theta \mathbf{1} + (1 - \cos \theta) \mathbf{n} \circ \mathbf{n} + \sin \theta (\mathbf{n} \times \mathbf{1}) \quad (\text{G.2})$$

besitzt und entsprechend während der Berechnung aktualisiert werden muß. Hierbei gilt

$$\theta = \theta \mathbf{n}. \quad (\text{G.3})$$

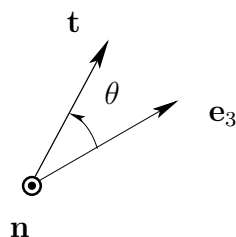


Abbildung G.1: Ebene Drehung des Direktors

\mathbf{n} gibt dabei die Drehachse an, d.h. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$. θ kennzeichnet den Winkel der Drehung. Im *nullten* Iterationsschritt bzw. in der Referenzkonfiguration ist \mathbf{n} eine raumfeste Achse. Man untersucht nun eine ebene Drehung gemäß Abb. (G.1). Wie ermittelt man den Vektor $\boldsymbol{\theta}$ in Gl. (G.3), wenn der Knotendirektor \mathbf{t} der Referenzkonfiguration in der globalkartesischen Basis \mathbf{e}_k gegeben ist?

Da nur die Richtung von \mathbf{t} interessiert und nicht der Angriffspunkt, kann man z.B. ansetzen

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{t}}{\|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{t}\|}. \quad (\text{G.4})$$

Somit ist die Achse der Drehung bestimmt. Den Drehwinkel bestimmt man aus

$$\cos \theta = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{t}. \quad (\text{G.5})$$

Ist nun für \mathbf{t} die Parametrisierung durch die Längen- und Breitenkreise (ψ, φ) gegeben, erhält man zunächst¹

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi \\ \sin \psi \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{e}_3 \times \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\sin \psi \cos \varphi \\ \cos \psi \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.6})$$

Damit ergibt sich der RODRIGUES Vektor als

$$\boldsymbol{\theta} = \arccos(\sin \varphi) \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.7})$$

Der Versor nach Gl. (G.2) ist damit in der Referenzkonfiguration für jeden Knoten in Abhängigkeit der Parameter φ, ψ bestimmt. Die Darstellung in Gl. (G.7) nimmt Bezug auf die globalkartesische Basis \mathbf{e}_k . Nun werden noch die Ableitungen des RODRIGUES

¹Üblicherweise wählte man $\varphi =: \frac{\pi}{2} - \tilde{\varphi} \Leftrightarrow \tilde{\varphi} = \frac{\pi}{2} - \varphi$, so daß sich die Gl. (G.7) entsprechend vereinfachte. Hier wird jedoch die durch die Einführung der Winkel nach Abschnitt 4.2.11 gewählte Parametrisierung beibehalten.

Vektors angegeben. Mit dem Symbol Δ wird in Anlehnung an BETSCH ET AL. die erste Ableitung² von θ bezeichnet:

$$\Delta\theta_1 = \sin\psi \Delta\varphi - \arccos(\sin\varphi) \cos\psi \Delta\psi \quad (\text{G.8})$$

$$\Delta\theta_2 = -\cos\psi \Delta\varphi - \arccos(\sin\varphi) \sin\psi \Delta\psi \quad (\text{G.9})$$

Die Glg. (G.8) und (G.9) beziehen sich ebenfalls auf die Basis e_k .

$\Delta\mathbf{t}$ bzw. die 1. Ableitung ds Direktors Mit dem Drehtensor nach Gl. (G.2) kann man auch das gesamte Referenzdreibein e_k an jeden Knoten transformieren. Damit erhält man eine Knotenorthonormalbasis $(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t})$ - siehe BETSCH, MENZEL & STEIN (1998) - durch

$$\mathbf{t}_\alpha = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_\alpha \quad (\text{G.10})$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_3. \quad (\text{G.11})$$

Somit ergibt sich mittels $(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t})$ die Darstellung des Differential des RODRIGUES Vektors als

$$\Delta\theta = \Delta\theta_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \Delta\theta_3 \mathbf{t}. \quad (\text{G.12})$$

Hierbei ist der Ausdruck $\Delta\theta_3$ zunächst noch unbestimmt, aber er wird auch nicht benötigt. Zentraler Gedanke von BETSCH ET AL. ist es, in der Linearisierung die infinitesimale Drehung anstatt durch die skalare Multiplikation mit dem Versor durch das Kreuzprodukt mit dem RODRIGUES Drehdifferentialvektor zu ersetzen. Damit ergibt sich:

$$\Delta\mathbf{t} = \Delta\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_3 = \Delta\theta \times \mathbf{t}. \quad (\text{G.13})$$

Der Anteil $\Delta\theta_3$ spielt wegen des Kreuzproduktes keine Rolle. Da nur \mathbf{t} bzw. $\Delta\mathbf{t}$ physikalische Vektoren sind, darf man über die Richtung der Drehachse verfügen und $\Delta\theta_3 \equiv 0$ setzen. Es verbleibt

$$\Delta\mathbf{t} = \Delta\theta_\alpha \mathbf{t}_\alpha \times \mathbf{t}. \quad (\text{G.14})$$

Mit den Abkürzungen $\Delta T_1 = \Delta\theta_2$ bzw. $\Delta T_2 = -\Delta\theta_1$ lautet diese Darstellung verkürzt:

$$\Delta\mathbf{t} = \Delta T_\alpha \mathbf{t}_\alpha. \quad (\text{G.15})$$

Außerdem läßt sich Gl. (G.3) noch umschreiben. $\mathbf{t} \times$ Gl. (G.13) liefert für die Inkremente von θ :

$$\Delta\theta = \mathbf{t} \times \Delta\mathbf{t} \quad \text{für} \quad \Delta\theta_3 \equiv 0. \quad (\text{G.16})$$

Mit Gl. (G.15) sind infolge der inkrementellen Drehvektoren auch inkrementelle Drehtensoren angebar ($\Delta\mathbf{Q} = \Delta\theta \times \mathbf{1}$); der Rechenablauf ist in Tab. (G.1) angegeben.

²Man beachte $[\arccos(\sin\varphi)]_{,\varphi} = -1$.

$\delta\Delta\mathbf{t}$ bzw. die 2. Ableitung des Direktors Die zweite Ableitung wird für das NEWTON Verfahren benötigt. Die Bezeichnung ist mit $\delta\Delta\mathbf{t}$ wiederum an BETSCH ET AL. angelehnt. Die Idee ist es, den Direktor \mathbf{t} in einer weiter gedrehten Lage $\tilde{\mathbf{t}}$ auf die Basis $(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t})$ zu beziehen

$$\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{t}_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \tilde{t} \mathbf{t} . \tag{G.17}$$

und die beiden Komponenten \tilde{t}_α als generalisierte Drehkoordinaten zu betrachten. Infolge der Nebenbedingung $\tilde{\mathbf{t}} \cdot \tilde{\mathbf{t}} = 1$ ist die Komponente \tilde{t} eine Funktion der \tilde{t}_α . Bildet man jetzt die Ableitungen $\Delta\tilde{\mathbf{t}}$ und $\delta\Delta\tilde{\mathbf{t}}$ - bei festgehaltener Basis $(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t})$ - und führt in der Lage $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t}$, d.h. $\tilde{t} = 1$, die Benennung $\Delta\mathbf{t} := \Delta\tilde{\mathbf{t}}$ und $\delta\Delta\mathbf{t} := \delta\Delta\tilde{\mathbf{t}}$ ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta\Delta\mathbf{t} &= \delta[\Delta T_\alpha \mathbf{t}_\alpha] \\ &= \delta[\Delta T_\alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_\alpha] \\ &= \Delta T_\alpha \delta\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ &= \Delta T_\alpha \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t}_\alpha \\ &= \Delta T_\alpha \delta\theta_\beta \mathbf{t}_\beta \times \mathbf{t}_\alpha \\ &= (\Delta T_1(-)\delta\theta_2 + \Delta T_2\delta\theta_1)\mathbf{t} \\ &= -\Delta T_\alpha \delta T_\alpha \mathbf{t} \end{aligned} \tag{G.18}$$

Das bedeutet zugleich, daß die Drehungen $\delta\theta$ und $\Delta\theta$ um die gleiche Achse erfolgen; damit wird $\delta\boldsymbol{\theta} = \delta\theta_\beta \mathbf{t}_\beta$. Eine beliebige nachgeschaltete Drehung $\delta\boldsymbol{\theta}$ muß im allgemeinen nicht parallel zu $\Delta\boldsymbol{\theta}$ sein, so daß Gl. (G.18) nur für diesen Spezialfall gültig ist.

Schema Für das Direktor- bzw. Versorupdate ergibt sich dann das folgende Schema:

Startwerte:	ΔT_α gemäß Gl. (G.8) bzw. (G.9) $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})^k$ gemäß Gl. (G.2) und (G.7)
1. Schritt:	Direktorinkremente gemäß Gl. (G.15) $\Delta\mathbf{t} = \Delta T_\alpha \mathbf{t}_\alpha = \Delta T_\alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_\alpha$
2. Schritt	Inkremente des Drehvektors nach Gl. (G.16) $\Delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{t} \times \Delta\mathbf{t}$
3. Schritt	Inkrementeller Drehtensor $\Delta\mathbf{Q}$ nach Gl. (G.2) $\theta^\Delta = \ \Delta\boldsymbol{\theta}\ , \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta^\Delta}$ $\Delta\mathbf{Q} = \cos \theta^\Delta \mathbf{1} + (1 - \cos \theta^\Delta) \mathbf{n} \circ \mathbf{n} + \sin \theta^\Delta (\mathbf{n} \times \mathbf{1})$
4. Schritt	Update des Drehtensors $\mathbf{Q}^{k+1} = \Delta\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^k$

Tabelle G.1: Update des Drehtensors nach BETSCH, MENZEL & STEIN (1998)

Sonderfall $\mathbf{t} = \mathbf{e}_3$ Definitionsgemäß versagt Gl. (G.4) für den Fall, daß der Direktor in \mathbf{e}_3 -Richtung weist. In diesem Fall wählt man stattdessen \mathbf{t} als bild von \mathbf{e}_2

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{t}}{\|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{t}\|}. \quad (\text{G.19})$$

Analog zu Gl. (G.7) erhält man

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\arccos(\sin \psi \cos \varphi)}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos^2 \psi}} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ -\cos \psi \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (\text{G.20})$$

Die Ableitungen sind dann entsprechend zu bilden.

Anhang H

Symbolverzeichnis

H.1 Lateinische Symbole

Symbol	Beschreibung	Gl.	Seite
A^a	äußere Arbeit	2.29	10
A^i	innere Arbeit	2.29	10
a	Plattenabmessung	-	17
$\frac{a_1}{a_2}$	Seitenverhältnis der Elementlängen	-	60
\mathbf{a}	Knotenfreiwerte	-	46
\mathbf{a}_e	Knotenfreiwerte des Elements	-	57
b	Plattenabmessung	-	82
b_β^γ	Komponenten von \mathbf{B}	-	9
\mathbf{B}	Haupttensor	2.3	6
$B_{\alpha\beta mn}$	Biegematrix des Viereckselements	4.114	74
$B_{\alpha\epsilon mn}$	Biegematrix des Dreieckselements	4.136	74
\mathbf{b}^*	äußere Kraftdichte	4.22	45
$\hat{\mathbf{B}}$	Tensor der inversen plastischen Dehnungen	3.30	27
\mathbf{C}	rechter CAUCHY Verzerrungstensor (3D)	3.8	24
\mathbb{C}	Materialtetraeder	3.7	23
\mathbf{C}^e	elastischer rechter CAUCHY Tensor	3.27	27
$\hat{\mathbf{C}}$	plastischer rechter CAUCHY Tensor	3.28	27
\mathbf{C}^K	VOIGT Notation von \mathbb{C} für KAPPUS Material	4.35	47
\mathbf{C}^N	VOIGT Notation von \mathbb{C} für NEO-HOOKE Material	4.46	50
\mathbf{C}_2	rechter CAUCHY Verzerrungstensor (2D)	3.16	25
$C_{\alpha\beta\gamma\delta}$	planare Komponenten von \mathbb{C}	-	123
C_{ijkl}	Komponenten von \mathbb{C}	-	123

Symbol	Beschreibung	Gl.	Seite
C_{3333}	Komponente von \mathbb{C}	C.1	123
C_{in}	DKT-Anteile der Neigungsinterpolation	4.95	68
c_{in}	DKT-Anteile der Neigungsinterpolation	4.96	68
c_{mn}	Ansatzkonstanten	2.56	16
\mathbf{c}_2	beliebiger 2D-Vektor	A.16	119
\mathbf{D}	Verzerrungsmatrix	4.42	50
\mathbf{D}_n	Referenzknotendirektoren	-	41
\mathbf{d}	Direktor der aktuellen Lage	2.2	6
\mathbf{d}_n	aktuelle Knotendirektoren	-	41
D_i	Komponenten von \mathbf{D}	4.87	66
d_i	Komponenten von \mathbf{d}	4.88	66
$d\mathbf{A}$	aktuelles Flächendifferential	A.18	119
$d\mathbf{A}_0$	Referenzflächendifferential	A.19	119
dA^L	Flächendifferential der unteren Laibung	-	11
dA^U	Flächendifferential der oberen Laibung	-	11
$d\mathbf{n}$	Differential des Normalenvektors	-	118
ds	Betrag des differentiellen Linienelements	A.3	117
dV	Volumendifferential	A.13	118
E	Elastizitätsmodul	-	17
e	Zusammendrückung	-	16
\mathbf{e}	Eigenvektor	4.68	58
\mathbf{e}_i	global kartesische Basis	-	6
$\bar{\mathbf{e}}_i$	lokale Orthonormalbasis	4.12	43
$\tilde{\mathbf{e}}_i$	gegenüber \mathbf{e}_i gedrehte Basis	4.73	64
$\hat{\mathbf{e}}_i$	gegenüber \mathbf{e}_i gedrehte Basis	-	66
\mathbf{E}	3D-GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensor	2.7	7
\mathbf{E}_2	2D-GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensor	2.8	7
\mathbf{E}^u	kompatibler GREEN-LAGRANGE Tensor	4.20	45
$\tilde{\mathbf{E}}$	enhanced GREEN-LAGRANGE Tensor	4.20	45
\mathbf{E}_2^0	GREEN-LAGRANGE Membranverzerrung	2.9	8
\mathbf{E}_2^1	GREEN-LAGRANGE Biegeverzerrung	2.9	8
\mathbf{E}_\perp	GREEN-LAGRANGE Schubverzerrung	2.12	8
\mathbf{E}_{33}	GREEN-LAGRANGE Dickenverzerrung	2.13	8
EA	Dehnsteifigkeit des Stabes	-	82
EI	Biegesteifigkeit des ebenen Balkens	4.70	60
EI_y	Biegesteifigkeit des räumlichen Balkens	5.1	85
EI_z	Biegesteifigkeit des räumlichen Balkens	5.2	86

Symbol	Beschreibung	Gl.	Seite
\mathbf{F}	Deformationsgradient	-	6
$\bar{\mathbf{F}}$	Deformationsgradient aus Ref.-Koord. .	4.97 -	69
\mathbf{F}_2	planarer Deformationsgradient	2.6	7
\mathbf{F}_e	Elementfehlkraftvektor	4.44	50
\mathbf{F}^e	elastischer Deformationsgradient	-	27
$\hat{\mathbf{F}}$	plastischer Deformationsgradient	-	27
F_{res}^{Eul}	resultierende Kraft (EULER)	-	13
$F_{res}^{2.PK}$	resultierende Kraft (2. PIOLA-KIRCHHOFF)	-	13
\mathbf{F}_{sys}	Systemfehlkraftvektor	-	53
G	Gleitmodul	-	23
G_{ij}	Komponenten von $\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C} - 1$	3.48	9
$G_{\alpha\beta}$	kovariante Metrik der Referenz	2.15	9
\mathbf{G}^α	kontravariante Basis der Referenz	2.4	6
$G^{\alpha\beta}$	kontravariante Metrik der Referenz	2.15	9
GA_s	Schubsteifigkeit des Balkens	-	84
g	Konsistenzbedingung	3.33	28
g	$\det g_{\alpha\beta}$ (im Anhang)	A.5	117
\mathbf{g}_α	kovariante Basis	A.2	117
\mathbf{g}^α	kontravariante Basis	A.8	118
\mathbf{g}_α^*	kovariante Basis im Schalenraum	-	38
$g_{\alpha\beta}$	kovariante Metrik	A.4	117
H	mittlere Krümmung, Invariante von \mathbf{B}	-	118
h	Dickenabmessung	2.1	5
\mathbb{I}	Einstensor 4. Stufe	3.7	23
i, j, k, l	Index des Wertevorrats $1, \dots, 3$	3.48	32
J	$\sqrt{\det G_{\alpha\beta}}$ im GAUSS Punkt	4.54	48
J_0	$\sqrt{\det G_{\alpha\beta}}$ in der Elementmitte	4.54	48
K	GAUSSsche Krümmung, Invariante von \mathbf{B}	-	118
K_P	Plattenbiegesteifigkeit	-	16
\mathbf{K}_e	Elementsteifigkeitsmatrix	4.45	50
\mathbf{K}_{e+u}	lineare Elementsteifigkeitsmatrix	4.61	54
\mathbf{K}_g	geometrische Elementsteifigkeitsmatrix	4.62	54
\mathbf{K}_n	interne Steifigkeitsmatrix der α	4.50	50
\mathbf{K}_{sys}	Systemteifigkeitsmatrix	-	53
ℓ	Plattenabmessung	-	82
\mathbf{L}	Koppelungsmatrix	4.42	50
$L_n(\xi, \eta)$	Dreiecksansatzfunktionen	4.115	75

Symbol	Beschreibung	Gl.	Seite
\mathbf{M}	Momententensor (in Kap. 2)	-	13
\mathbf{M}	Ansätze der EAS-Verzerrungen (nicht in Kap. 2)	4.38	47
\mathbf{M}_R	Randmomente	-	11
M_{xy}	Plattentorsionsmoment	-	88
m, n	Knotenindizes (1, . . . 3 oder 4)	-	41
$m^{\alpha\beta}$	Biegemomentkomponenten	2.26	10
$m_{\alpha\beta}$	kartesische Biegemomentkomponenten	-	16
$m_{\varphi\varphi}$	physikalische Biegemomentkomponenten	2.41	13
N_{el}	Anzahl der Elemente	-	84
$N_n(\xi, \eta)$	bilineare Ansatzfunktionen im Einheitsviereck	4.1	41
$N_n^*(\xi, \eta)$	quadratische Seitenmittenansätze im Einheitsviereck	4.95	68
\mathbf{n}	Normale der Referenz	2.1	5
\mathbf{P}	äußere Kraft (nicht im Anhang)	-	59
\mathbf{P}	1. PIOLA-KIRCHHOFF Tensor (im Anhang)	-	119
$\hat{\mathbf{P}}$	äußere Kraft	-	59
P_{kr}	Knicklast des ebenen Balkens in $[N]$	4.70	60
P_{kr}^y	Knicklast des räumlichen Balkens in $[N]$	5.1	85
P_{kr}^z	Knicklast des räumlichen Balkens in $[N]$	5.2	86
\mathbf{P}^*	eingeprägte Kraft	4.22	45
\mathbf{P}_R	Randkräfte	-	11
p_{kr}	kritische Drucklast in $[\frac{N}{m}]$	2.57	16
p_n	Last in physikalischer Normalenrichtung	2.41	13
\mathbf{p}^L	Last auf untere Laibung	-	11
\mathbf{p}^U	Last auf obere Laibung	-	11
\mathbf{p}_0	auf die Mittelfläche wirkende Drucklast	-	11
\mathbf{p}_1	den Direktor drehende/stauchende Drucklast	-	11
\mathbf{Q}	Querkrafttensor (in Kap. 2)	-	13
\mathbf{Q}	Drehtensor (in Kap. 4.2.9)	4.73	64
$\mathbf{Q}^{(n)}$	Drehtensor bzgl. Achse n (im Anhang)	-	131
Q^α	Querkraftkomponenten	2.27	10
Q_{ij}	Komponenten von \mathbf{Q}	4.74	64
$Q_{ij}^{(n)}$	Komponenten von $\mathbf{Q}^{(n)}$	-	131
q	Drucklast	-	16
\mathbf{q}	Volumenlast	-	11
\mathbf{R}	Referenzmittelfläche (nicht Kap. 4.2.3)	2.1	5
\mathbf{R}	Elementknotenkräfte (in Kap. 4.2.3)	4.34	46
$\tilde{\mathbf{R}}$	Elementknotenkräfte infolge α	4.34	46

Symbol	Beschreibung	Gl.	Seite
\mathbf{R}_n	Knotenlage der Referenz	-	41
\mathbf{r}	Mittelfläche der aktuellen Lage	2.2	6
\mathbf{r}_n	aktuelle Knotenlage	-	41
\mathbf{S}	2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor (3D)	2.23	9
\mathbf{S}_2	2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor (2D)	3.14	25
\mathbf{S}'	Spannungsdeviator	-	27
\mathbf{s}_n	Referenzseitenvektor	-	41
\mathbf{s}_n^*	bezogener Referenzseitenvektor	4.107	68
\mathbf{s}_n^0	Dreiecksseiteneinheitsvektor	-	77
$s_{\alpha n}^0$	Komponenten von \mathbf{s}_n^0	4.131	78
S_2'	2. Invariante des Spannungsdeviators	-	27
\mathbf{T}	EULER-Spannungstensor	-	9
\mathbf{t}	Membrankrafttensor in VOIGT-Notation	4.35	47
$t^{\alpha\beta}$	Membrankraftkomponenten	2.25	10
$\hat{t}^{\alpha\beta}$	Membrankraftkomponenten im Schalenraum	2.32	11
t	Plattenabmessung	-	82
t^3	transversale Normalkraftkomponente	2.28	10
t_n	physikalische transversale Normalkraftkomponente	2.41	13
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor	4.20	45
u	Balkenlängsverschiebung	2.62	18
u_α	planare Verschiebungen	-	15
W	Formänderungsenergie	3.1	22
W_s	spezifische Formänderungsenergie	4.21	45
w	transversale Verschiebung	-	15
X_i	global kartesische Koordinaten	-	15
X_{in}	Koordinate i am Knoten n	4.120	75
X	global kartesische Balkenkoordinate	2.62	18
\mathbf{X}	Ortsvektor der Referenz	2.1	5
\mathbf{x}	Ortsvektor der aktuellen Lage	2.2	g
Y	Fließspannung des verfestigenden Materials	3.44	31
Y_0	Fließspannung zu Beginn der plastischen Dehnung	3.44	31
y	Fließdehnung	3.33	28
y_0	Anfangsfließdehnung des verfestigenden Materials	3.37	28
\mathbf{Z}	Shiftertensor	-	38

H.2 Griechische Symbole

Symbol	Beschreibung	Gl.	Seite
α, β, γ	Index des Wertevorrats 1, 2	-	5
α	Elementfreiwerte (enhanced)	-	46
α_q	Komponenten von α	-	47
δ	Kennzeichen virtueller Größen	-	9
δ_{ij}	Kroneckersymbol	-	32
$\Delta \mathbf{a}$	Inkremente von \mathbf{a}	4.65	54
$\Delta \alpha$	Inkremente von α	4.65	54
$\Delta \mathbf{P}$	Inkremente von \mathbf{P}	-	59
δ	planarer Einstensor 2. Stufe	2.3	6
$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$	CHRISTOFFEL-Symbole 2. Art	-	13
γ	Balkenneigewinkel	2.62	18
Γ	Referenzneigungen der Schale	4.94	68
γ	aktuelle Neigungen der Schale	4.94	68
γ_{α}	Neigungskomponenten	-	15
Γ_i	Komponenten von Γ	4.95	68
γ_i	Komponenten von γ	4.96	68
Γ_{in}	Knoten­neigungen gegenüber mittl. Elementebene	4.95	68
γ_{in}	Knoten­neigungen gegenüber mittl. Elementebene	4.96	68
ϵ^u	VOIGT Notation von \mathbf{E}^u	4.47	47
$\tilde{\epsilon}$	VOIGT Notation von $\tilde{\mathbf{E}}$	4.47	47
$\epsilon_{\alpha\beta}$	Komponenten von \mathbf{E}_2	2.15	9
$\epsilon_{\alpha\beta}^0$	Komponenten von \mathbf{E}_2^0	4.18	44
ϵ_{ij}	Komponenten von \mathbf{E}	2.30	11
$\epsilon_{3\alpha}$	Komponenten von \mathbf{E}_{\perp}	2.17	9
ϵ_{33}	Komponenten von \mathbf{E}_{33}	2.18	9
ζ	materielle Koordinate	2.1	5
ζ	Breitengrad (nur in 4.2.10)	4.92	67
η	Elementkoordinate	4.120	75
ϑ_{13}	akt. Seitenbiegewinkel in 1-Ri. am Knoten 3	-	72
ϑ_{14}	akt. Seitenbiegewinkel in 1-Ri. am Knoten 4	-	72
θ_{13}	Referenzseitenbiegewinkel in 1-Ri. am Knoten 3	-	72
θ_{14}	Referenzseitenbiegewinkel in 1-Ri. am Knoten 4	-	72
$\kappa_{\alpha\beta}$	Komponenten von \mathbf{E}_2^1	2.16	9

Symbol	Beschreibung	Gl.	Seite
Λ	Materialparameter	-	23
λ	Materialparameter	-	24
$\tilde{\lambda}$	Materialparameter	-	25
μ	Materialparameter	-	23
$\tilde{\mu}$	Materialparameter	-	25
μ_k	Eigenwerte von \mathbf{Q}	-	65
ν	Querkontraktionszahl	-	17
ξ	Elementkoordinate	4.121	75
Π	Potential	4.19	45
Π_a	inneres Potential	4.19	45
Π_i	äußeres Potential	4.19	45
Π^{HW}	Potential nach HU-WASHIZU	4.19	45
ρ	Dichte des Materials in der Referenz	-	28
ρ_4	Parameter der EULER-Darstellung	4.82	65
$\boldsymbol{\rho}$	EULER Vektor	4.82	65
$\boldsymbol{\rho}_r$	Parameter der EULER Darstellung	4.82	65
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	VOIGT Notation von \mathbf{S}	4.48	51
$\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}$	Komponenten von \mathbf{S}	2.23	9
$\tilde{\sigma}^{ij}$	Komponenten von \mathbf{S}	2.30	11
$\tilde{\sigma}_0^{\alpha\beta}$	Komponenten von \mathbf{S} in der Mittelfläche	2.24	10
$\tilde{\sigma}_1^{\alpha\beta}$	Komponenten von \mathbf{S} im Schalenraum	2.24	10
$\tilde{\sigma}^{3\alpha}$	Komponenten von \mathbf{S}	2.23	9
$\tilde{\sigma}^{33}$	Komponenten von \mathbf{S}	2.23	9
σ^{Eul}	Biegespannung (EULER)	-	13
σ_n	transversale Normalspannung	-	14
$\sigma^{2.PK}$	Biegespannung (2. PIOLA-KIRCHHOFF)	-	13
σ_y	Fließspannung	3.37	28
τ	Eigenwert von \mathbf{K}_e	4.68	58
$\hat{\varphi}$	akkumulierte plastische Dehnung	3.45	31
Φ	überlagerter Drehtensor	-	131
Φ_{ij}	Komponenten von Φ	-	131
$\hat{\varphi}$	akkumul. plast. Formänderung	3.45	31
φ	Drehwinkel (nicht Kap. 4.2.10)	-	64
φ	aktueller Breitengrad (in Kap. 4.2.10)	4.88	66
φ_0	Referenz-Breitengrad (in Kap. 4.2.10)	4.88	66
φ_k^n	Breitengrad am Knoten k bei Laststufe n	-	129
$\boldsymbol{\varphi}$	RODRIGUES Vektor	4.76	64

Symbol	Beschreibung	Gl.	Seite
ψ	aktueller Längengrad (in Kap. 4.2.10)	4.87	66
ψ_0	Referenz-Längengrad (in Kap. 4.2.10)	4.87	66
ψ_k^n	Längengrad am Knoten k bei Laststufe n	-	129
ω	LAGRANGE Parameter des Radial-Return	-	30
ω_S	Sonderfall des LAGRANGE Parameters	3.67	34
ω_T	Sonderfall des LAGRANGE Parameters	3.64	34

H.3 Sonstige Symbole

Symbol	Beschreibung	Gl.	Seite
\mathcal{A}	Fließflächenabstand im Dehnungsraum	3.38	29
\mathcal{L}	Sattelpunktproblem des Radial-Return	3.39	30
$\mathbf{1}$	Einstensor 2. Stufe	-	7
\circ	dyadisches Produkt	-	7
\cdot	inneres Produkt	-	6
\times	äußeres Produkt	4.75	65
$(\cdot)^T$	Transponierte von (\cdot)	2.7	7
∇	3D-Nablaoperator	2.3	6
∇_2	2D-Nablaoperator	2.3	6
$(\cdot) _\alpha$	kovariante Ableitung von (\cdot) nach q^α	A.16	6
$(\cdot)_{,\alpha}$	partielle Ableitung von (\cdot) nach q^α	2.15	6
$(\cdot)^A$	(\cdot) im alten Lastschritt des Radial-Return	-	29
$(\cdot)^N$	(\cdot) im neuen Lastschritt des Radial-Return	-	29
$\hat{(\cdot)}$	(\cdot) ist eine schiefsymmetrische Größe	4.77	64
2D	zweidimensional	-	
3D	dreidimensional	-	
AKF	aktuelle Lage	-	3
ANS	assumed natural strain method	-	3
DKT	discret KIRCHHOFF theory	-	4
DSG	discrete shear gap method	-	4
EAS	enhanced assumed strain method	-	3
ESZ	ebener Spannungszustand	-	3
RKF	Referenzkonfiguration	-	3
ZKF	Zwischenkonfiguration	-	3
Gl.	Gleichung	-	-
Gln.	Gleichungen	-	-
TOL	Toleranz einer Norm	-	54